

Új utakon a hullámterjedés leírása

E. FERENCZ ORSOLYA, FERENCZ CSABA

ELTE Földrajz- és Földtudományi Intézet, Űrkutató Csoport
spacerg@sas.elte.hu

Lektorált

Kulcsszavak: hullámterjedés, módusok, inhomogenitás

A cikk megismerteti az olvasót egy alapvető tévedésből fakadó ellentmondással, mely a hullámterjedési számításokban a mai napig elterjedt és elfogadott, ám hibás eredményeket eredményez. Az elvi ellentmondás felismerése után egy olyan megoldási módszert ismertetünk, amely lehetőséget nyújt új, helyes megoldások meghatározására, elkerülve a korábbi tévedéseket, s amellyel sikerült sok űrkutatói mérési eredményt interpretálni.

1. Bevezetés

Számos fontos hullámterjedési kérdés megválaszolása megkerülhetetlenül igényli a fizikai képnek, a kialakuló és terjedő jel szerkezetének minél pontosabb modellezését. Az egyik – talán legérzékenyebb – terület az inhomogén közegekben terjedő elektromágneses jelek pontos leírása, eltekintve most a szórás-számítást igénylő igen erős inhomogenitásoktól. Az ismert és széles körben alkalmazott modellek (például az úgynevezett W.K.B. leírás, Airy-függvények és a Stokes-egyenlet megoldása, az eikonal-egyenlet, az általánosított terjedési vektor alkalmazása stb. [1]) azonban alapvető tévedést hordoznak magukban a jel szerkezetét illetően. Hogy ezt megvilágíthassuk, röviden bemutatjuk a legegyszerűbb példán magát a problémát.

2. A jel szerkezete

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg egy szigorúan monokromatikus jel terjedését lineáris, izotróp, időinvariáns, veszteségmentes egyszerű közegben. A közeg tartalmazzon térbeli inhomogenitást. Ekkor a terjedő jel egy része, a közegen történő áthaladás során pontról pontra reflektálódik, miközben az előre terjedő jel amplitúdója csillapodik. A modell egyszerűségéből adódik, hogy a permittivitást $\varepsilon(\vec{r})$ skalárként definiálhatjuk. További egyszerűsítésként vegyük a permeabilitást μ_0 -nak.

A fellépő jel alakja tehát:

$$\vec{G}(\vec{r}, t) \triangleq \vec{G}_0(\vec{r}) e^{i[\omega t - \varphi(\vec{r})]} \quad (1)$$

ahol \vec{G} rövidítve jelenti a $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{G}_0$ függvényeket, \vec{r} a helyvektor, t az idő, ω a körfrekvencia, φ pedig a fázis.

Esetünkben tehát a Maxwell-egyenletek alakja a következő:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= j\omega \varepsilon \vec{E}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

amiből ismert úton adódik, hogy a harmadik és negyedik egyenlet automatikus teljesül, ha az első kettő teljesül, amennyiben nem disztribúciókkal írjuk le a közeget (a függvények folytonosan deriválhatóak). Így a megoldandó egyenletek a következő alakban írhatók:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0) - j\vec{\nabla} \varphi \times \vec{H}_0 &= j\omega \varepsilon \vec{E}_0, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{E}_0) - j\vec{\nabla} \varphi \times \vec{E}_0 &= -j\omega \mu_0 \vec{H}_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Bevezetve $\vec{k} \triangleq \vec{\nabla} \varphi$ és $\vec{k} \times \vec{u} \triangleq \vec{k} \cdot \vec{u}$ jelöléseket (ahol \vec{u} tetszőleges vektor), és feltételezve, hogy (mint a legegyszerűbb esetekben szokásos) \vec{G}_0 és φ valós függvények, a megoldandó egyenletrendszer két részre bomlik szét. A valós rész

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H}_0 &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

míg a képzetes rész

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{H}_0 &= -\omega \varepsilon \vec{E}_0, \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 &= \omega \mu_0 \vec{H}_0. \end{aligned} \quad (5)$$

(Ezt a szeparálást sokszor azzal az indoklással is alátámasztja az irodalom, hogy tekintsünk nagyon gyenge inhomogenitású közegeket, ahol a közegjellemzők változása lassú. Azonban nyilvánvaló, hogy önmagában ez a feltételezés már erős megszorítást jelent a modellek érvényességi határaitban.)

Mivel e szétválás automatikusan azt eredményezi, hogy nem teljesül az energia-megmaradás a két egyenletrészre külön, a W.K.B. filozófia ezt az ellentmondást egy járulékos, a terjedő jel energiájának állandóságára vonatkozó feltétel bevezetésével küszöböli ki.

A (4) és (5) külön-külön vizsgálandó. (5) megoldása a jól ismert diszperziós egyenletre vezet,

$$\left[\vec{k} \vec{k} + \omega^2 \varepsilon \mu_0 \vec{1} \right] = 0, \quad (6)$$

amiből

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0, \text{ és } k = \pm \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0}, \quad (7)$$

adódik a terjedési vektorra, sejtetve, hogy egy előre és egy visszafelé terjedő jelet eredményez a megoldás.

A (4) viszont egy (5)-től független egyenletrendszer, melynek megoldása során minden esetben

$$\vec{H}_0 = \text{konstans és } \vec{E}_0 = \text{konstans} \quad (8)$$

adódik az amplitúdókra. Azonban (8) fellépése elvileg lehetetlen inhomogén közegben, és ellentmondásra vezet (7)-tel összevetve.

Mi okozhatja ezt az ellentmondást? Az ok nyilvánvalóan a feltételezett megoldás szerkezetében keresendő. Az inhomogenitással foglalkozó hagyományos elképzelések az előre terjedő és a reflektált jelet külön-külön is a Maxwell-egyenletek megoldásaként veszik figyelembe a levezetés során. Az a matematikában jól ismert tény, hogy egy lineáris differenciálegyenlet-rendszer egymástól független megoldásainak összege is az egyenlet-rendszer megoldása. Az azonban nem vehető általánosan igaznak, hogy egy ismert megoldást valamilyen módon additív részekre bontva, az így kapott részek önmagukban, külön-külön is megoldásai lennének az eredeti egyenlet-rendszernek.

A fizikai kép még világosabb. Ahhoz, hogy a haladó és a reflektált jelet külön-külön kezelhessük, önmagukban létezőnek, a Maxwell-egyenletek megoldásának kell feltételeznünk őket (és esetleg a számítások során, egyéb járulékos feltételezések alkalmazásával létesítünk közöttük valamiféle csatolást, kapcsolatot). Azonban az inhomogenitás jelenléte (legyen az bármilyen gyenge is) automatikusan kiváltja a jel reflexióját, azaz a terjedő és a reflektált jelrész csak és kizárólag együtt tűnhet fel inhomogén közegekben, önállóan nem.

Ahhoz, hogy még pontosabban lássuk a problémát, nézzük meg a szintén inhomogén esetekben használt Stokes-egyenlet és Airy-függvények alkalmazását [1,5].

Ahogy az például Budden könyvében is megtalálható ([1], 9. és 15. fejezet), inhomogén esetben szokásos eljárás, az úgynevezett Stokes-egyenlet felírására visszavezetni a Maxwell-egyenleteket:

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 q^2 E_y = 0 \quad (9)$$

ahol

$$q^2 = n^2 \text{ (longitudinális terjedés esetén)} \quad (10)$$

n pedig a törésmutató.

Amint az Budden levezetésében jól követhető, a kiinduló jelalakot a terjedő és a reflektált jelrész eredő összegeként veszi fel:

$$E_y = A \cdot e^{-jk_z z} + B \cdot e^{jk_z z} \quad (11)$$

ahol

$$k_z = k_0 \cdot n = \frac{\omega}{c} \cdot n$$

A további levezetésekben Budden arra hivatkozik, hogy ezt a (11)-ben látható jelalakot alkalmazza a Maxwell-egyenletekből adódó Stokes egyenlet megoldása során, amelynek ismert megoldásai az úgynevezett Airy-integrál függvények.

Azonban a továbbiakban Budden az előre terjedő és a reflektált jelrészt külön-külön helyettesíti be a Maxwell-egyenletekbe, formálisan azonos egyenleteket kapva ez által. Ezután a Maxwell-egyenleteket kü-

lön-külön oldja meg a terjedő és a reflektált jelre, nem pedig a két jelrész eredő összegére.

Ahogy azonban azt már korábban említettük, csak és kizárólag a terjedő és a reflektált jelrész eredője lehet a Maxwell-egyenletek megoldása, a jelrészek önmagukban nem léphetnek fel, így a Maxwell-egyenleteket sem elégíthetik ki, abból önmagukban nem vezethetők le, amennyiben a közeg inhomogenitást tartalmaz. Ellenőrizzük le tehát Budden számításait a két jelrész összegét (amit (11)-ben láthatunk) visszaírva a Stokes-egyenletbe.

Élve Budden feltételezésével, miszerint A és B konstansok (bár hangsúlyozzuk, hogy ez nagyon komoly megszorítást jelent a modell érvényességét tekintve) helyettesítsük be (11)-t a Stokes-egyenletbe. Ekkor a következő megoldást kapjuk:

$$A = -B \cdot e^{i2k_z z} \quad (12)$$

Nyilvánvaló ellentmondásra jutottunk tehát ismét, hiszen (12) alapján A és B nem konstansok. Budden megoldása tehát az előre és visszaterjedő jelrészre külön-külön értelmezhető csak, amit viszont inhomogenitás jelenlétében nem tételvezethetünk fel. (Eredetileg Budden sem teszi ezt.)

Ha A és B nem konstansok, és továbbra is (11) alakú megoldást írunk vissza a Stokes-egyenletbe, akkor még jelentősebb eltérést kapunk Budden eredményeitől, mivel egyáltalán nem adódik ki az a differenciálegyenlet, melynek megoldása az Airy-függvény, hanem A és B között még bonyolultabb összefüggést kapunk:

$$\begin{aligned} & \left[-2j \frac{dA}{dz} (\mp k_0 q) - jA \left(\mp k_0 \frac{dn}{dz} \right) + \frac{d^2 A}{dz^2} \right] \cdot e^{-jk_z z} + \\ & + \left[2j \frac{dB}{dz} (\mp k_0 q) + jB \left(\mp k_0 \frac{dn}{dz} \right) + \frac{d^2 B}{dz^2} \right] \cdot e^{+jk_z z} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Ez az összefüggés egyfelől nem azonos a Budden által levezetettel, másfelől olyan alulhatározott matematikai leírást eredményez, amely nem oldható meg.

Vizsgálatunkkal tehát azt kaptuk, hogy a Stokes-egyenletet alkalmazó inhomogén számítási módszerek impliciten tartalmazzák azt a hibás, és többszörösen ellentmondásra vezető feltételezést, mely szerint a terjedő és a reflektált jel önmagában létezik, s így a Maxwell-egyenletek megoldásaként külön-külön meghatározható. Ez a megállapítás a jel természetétől (monokromatikus vagy UWB, tranzien) függetlenül érvényes.

3. Inhomogén Alapmódusok Módszere

Mint azt az előző pontban részletesen bemutattuk, az összes ismert inhomogén modell és megoldási módszer közös és alapvető elméleti hibája, hogy téves a feltételezett jel szerkezete, amennyiben az előre és a visszaterjedő jeleket önmagukban létezőkként vezetik le a Maxwell-egyenletekből. Hogyan kerülhető el ez az alapvető belső ellentmondás? Olyan jelszerkezetet kell feltételeznünk, amely minden térbeli és időbeli pontban

egyszerre tartalmazza az összes lehetséges fellépő jel eredő összegét, és abból kell kiindulnunk, hogy csak ez az eredő összeg lehet megoldása a Maxwell-egyenleteknek, azonban egyes részei (módusai) önmagukban nem. Ez a módszer az Inhomogén Alapmódusok Módszere (angol rövidítése: MIBM [2]).

A módszer bemutatásához tekintsünk egy lineáris, időinvariáns, bianizotróp közeget, ahol a térerősségekre azt mondhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \bar{\epsilon}(\bar{r})\bar{E} + \bar{\kappa}(\bar{r})\bar{H}, \\ \bar{B} &= \bar{v}(\bar{r})\bar{E} + \bar{\mu}(\bar{r})\bar{H}. \end{aligned} \quad (14)$$

A térerősségeket monokromatikus függvényeknek véve, általános alakban írva

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^n a_i(\bar{r}) \cdot \bar{G}_{0i}(\bar{r}) \cdot \exp j(\omega t - \varphi_i(\bar{r})). \quad (15)$$

ahol $a_i(\bar{r})$ általános hely-függő burkolófüggvény, n pedig a lehetséges módusok száma.

Írjuk vissza (15)-öt a Maxwell-egyenletekbe. Mivel most is eltekintünk a disztribúciók jelenlététől (bár az MIBM módszer ezekre az esetekre is érvényes, de a cikk keretein túlmutatna ennek részletezése), a III. és IV. egyenlet automatikusan teljesül, ha az I. és II. teljesül. Elvégezve néhány egyszerű átalakítást, a következő egyenleteket nyerjük (16):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\bar{\nabla}(\ln a_i - j\varphi_{ai}) \times \bar{H}_i + \bar{\nabla}_{TH0i} \bar{H}_i - j\bar{K}_i \times \bar{H}_i] &= \sum_{i=1}^n j\omega(\bar{\epsilon}\bar{E}_i + \bar{\kappa}\bar{H}_i) \\ \sum_{i=1}^n [\bar{\nabla}(\ln a_i - j\varphi_{ai}) \times \bar{E}_i + \bar{\nabla}_{TE0i} \bar{E}_i - j\bar{K}_i \times \bar{E}_i] &= -\sum_{i=1}^n j\omega(\bar{v}\bar{E}_i + \bar{\mu}\bar{H}_i) \end{aligned}$$

ahol

$$\bar{\nabla}_{TG0i} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \ln G_{20i}}{\partial x_3} & \frac{\partial \ln G_{30i}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \ln G_{10i}}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \ln G_{30i}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \ln G_{10i}}{\partial x_2} & \frac{\partial \ln G_{20i}}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_i &= \bar{\nabla}\varphi_i; \\ \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} &= \bar{\nabla} \cdot \bar{\alpha}; \\ \left(\bar{\nabla}_{ai} \bar{G}_{0i} \right)_{mn} &= \alpha_{mn} \frac{\partial \ln G_{0im}}{\partial x_m}; \end{aligned} \quad (17)$$

A (16)-ban látható egyenletrendszer közeléből megvizsgálva egy nagyon fontos sajátosságot vehetünk észre. Ez az egyenletrendszer a teljes, inhomogén közegben kialakuló megoldást tartalmazza, korlátozó megszorítások nélkül. Az egyenletek baloldalának utolsó tagjai és a jobboldali tagok formailag teljesen megegyeznek azzal az egyenletrendszerrel, amit homogén esetben a Maxwell-egyenletekből kapunk, míg a baloldali első két tag új, a homogén esetben nem szerepel. Mivel mindenképpen célszerű olyan alakban keresnünk a megoldást, hogy homogén esetben visszahozzuk az ismert alakokat, így gondolatmenetünket erre a felismerésre alapozzuk.

Definiáljuk az inhomogén alapmódusokat úgy, hogy a homogén esetben visszamaradó tagokból álló egyenletrészek megoldásait adják külön-külön. De ne tévesz-

szük szem előtt, hogy ezek az alapmódusok önmagukban nem megoldásai a (16)-ban látható teljes Maxwell-egyenlet rendszernek, annak csak egy rész-egyenlet-rendszerét elégítik ki. Azonban az ismert megoldásokra homogén esetben visszavezetnek, hiszen ekkor az első két tag eltűnik. Definiáljuk az általánosított terjedési vektort ($\bar{K}_i = \bar{\nabla}\varphi_i$) úgy, hogy megoldása legyen az alábbi diszperziós egyenletnek, mint kvázi-homogén esetben

$$\left[(\bar{K}_i + \omega\bar{\kappa})\bar{\mu}^{-1}(\bar{K}_i - \omega\bar{v}) + \omega^2\bar{\epsilon} \right] = 0. \quad (18)$$

Így a \bar{K}_i -hoz tartozó inhomogén alapmódusokat az alábbi egyenletek megoldásaként kapjuk meg:

$$\begin{aligned} (\bar{K}_i \times \bar{H}_i) &= -\omega(\bar{\epsilon}\bar{E}_i + \bar{\kappa}\bar{H}_i) \\ (\bar{K}_i \times \bar{E}_i) &= \omega(\bar{v}\bar{E}_i + \bar{\mu}\bar{H}_i) \end{aligned} \quad (19)$$

Most, alapvetően új és a korábbi módszerektől döntően eltérő lépésként helyettesítsük vissza az így kapott inhomogén alapmódusokat (16)-ba, azaz a teljes, elhanyagolásoktól mentes Maxwell-egyenletekbe. Visszamaradó ismeretlen mennyiségeink a burkoló függvények és a fázisfüggvények. Az egyenlet homogén esetben megmaradó részei viszont értelemszerűen kiesnek (hiszen azoknak megoldásai az alapmódusok), a megmaradó egyenleteket pedig csatolóegyenleteknek hívjuk, hiszen azok adják meg a hiányzó ismeretlen paramétereket, azaz a módusok, és a gerjesztés közötti kapcsolatot írják le:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\bar{\nabla}(\ln a_i - j\varphi_{ai}) \times \bar{H}_i + \bar{\nabla}_{TH0i} \bar{H}_i] &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [\bar{\nabla}(\ln a_i - j\varphi_{ai}) \times \bar{E}_i + \bar{\nabla}_{TE0i} \bar{E}_i] &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

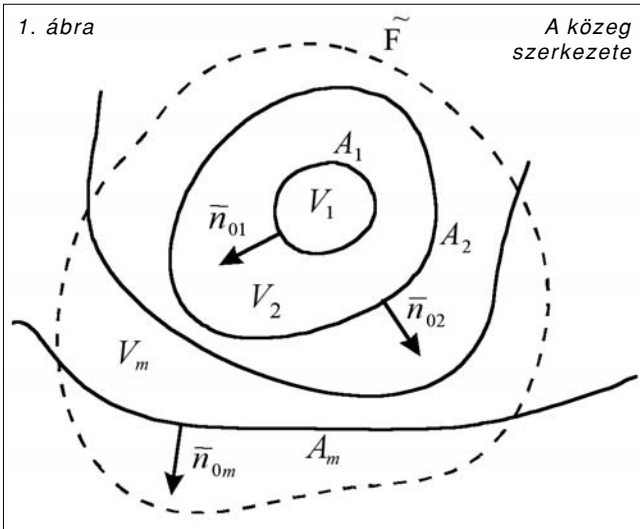
A csatolóegyenletek megoldásával a teljes megoldás rendelkezésünkre áll, az egyidejűleg fellépő összes módus és a közöttük lévő kapcsolat is meghatározható. Ez az inhomogén közegben a terjedő és a reflektált jelrész mindenkor eredőjét jelenti, valamint kapcsolatukat a gerjesztéssel.

4. A Maxwell-egyenletek megoldása disztribúciók jelenlétében

Most azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a közegjellemzők hirtelen változnak meg néhány nyitott vagy zárt A_m felület mentén, melyek egymást nem keresztezik (1. ábra). A közegjellemzők e felületek közötti V_m térfogatokban változnak folytonos függvények szerint, melyek ugrással kapcsolódnak egymáshoz a felületeknél. Ez az eset a disztribúciókkal (funkcionálokkal) leírható közegjellemző-változás [3].

Vizsgáljunk továbbra is szigorúan monokromatikus elektromágneses jeleket, és tegyük fel hogy az $\exp j(\omega t - \varphi)$ típusú megoldások léteznek a V_m térfogatokban. A V_m tartományokban keresett megoldások tehát

$$\bar{G}_m = \left[\sum_i \bar{G}_i \right]_m = \left[\sum_i (a_i \cdot e^{-j\varphi_{ai}}) \bar{G}_{0i} \cdot e^{j(\omega t - \varphi_i)} \right]_m. \quad (21)$$



A továbbiakban vezessük be a jól ismert $1(x)$ Heaviside (egység-ugrás) és $\delta(x)$ Dirac-delta disztribúciókat. $1[\bar{r}(p_m, q_m)]$ jelöli azt a disztribúciót, melynek értéke a $\bar{r} = \bar{r}(p_m, q_m)$ felület mentén nulláról egyre változik.

A $\bar{r}(p_m, q_m)$ vektor pedig az A_m felület paramétere. Az egyes A_m felületekhez tartozó $1[\bar{r}(p_m, q_m)]$ egység-ugrás függvényekből alkossunk kapufüggvényeket az alábbi módon:

$$s_m(\bar{r}) = \{1[\bar{r}(p_{m-1}, q_{m-1})] - 1[\bar{r}(p_m, q_m)]\}, \quad (22)$$

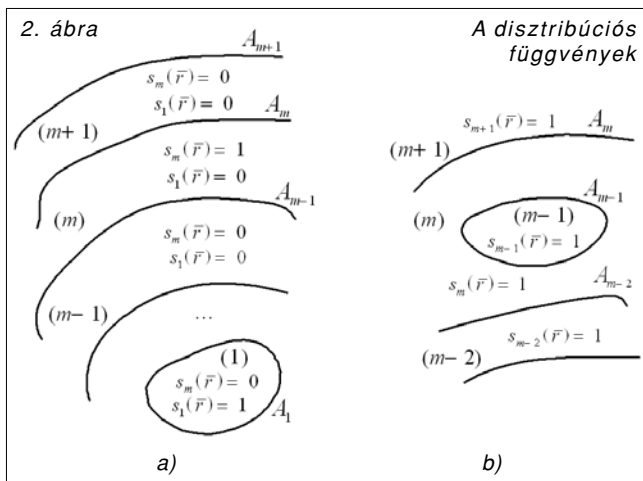
melynek értéke A_{m-1} és A_m között 1, egyébként 0.

E kapufüggvényekre alkalmazva a deriválás szabályait, és tudva, hogy $1(x)$ általánosított deriváltja $\delta(x)$, olyan függvényt kapunk, melynek értéke csak a felületeken különbözik 0-tól:

$$\bar{\nabla} \cdot s_m(\bar{r}) = \delta[\bar{r} - \bar{r}(p_{m-1}, q_{m-1})] \bar{n}_{0m-1} - \delta[\bar{r} - \bar{r}(p_m, q_m)] \bar{n}_{0m}, \quad (23)$$

ahol \bar{n}_{0m} az A_m felület kifelé mutató normálisa.

A teljes megoldást ezek után az Inhomogén Alapmódusok Módszerével kaphatjuk meg ismét. A 2. ábrán látható módon értelmezve a kapufüggvényeket, az egyes $s_m(\bar{r})=1$ térrészekben felírjuk az összes lehetséges alpmódus összegét, és mindezt a teljes vizsgált tartományra is összegezzük az alábbi módon:



$$\bar{G} = \sum_{m=1}^M s_m(\bar{r}) \left[\sum_{i=1}^n \bar{G}_i \right]_m, \quad (24)$$

ahol M a folytonos V_m tartományok száma.

Ezeket az alpmódusokat a 3. pontban ismertetett módon határozhatjuk meg az alábbi egyenletekből az egyes V_m tartományokon belül

$$\begin{aligned} \bar{K}_{im} \times \bar{H}_{im} &= -\omega(\bar{\epsilon}_m \bar{E}_{im} + \bar{\kappa}_m \bar{H}_{im}), \\ \bar{K}_{im} \times \bar{E}_{im} &= \omega(\bar{v}_m \bar{E}_{im} + \bar{\mu}_m \bar{H}_{im}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\bar{K}_{im} + \omega \bar{\kappa}_m \bar{\mu}_m^{-1} (\bar{K}_{im} - \omega \bar{v}_m) + \omega^2 \bar{\epsilon}_m = 0 \quad (26)$$

A teljes megoldás meghatározásához az így kapott alpmódusokat visszairjuk a Maxwell-egyenletekbe, és a csatolóegyenleteket megoldva a még hiányzó paraméterek meghatározhatók:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \bar{\nabla} \cdot s_m(\bar{r}) \times \left[\sum_{i=1}^n \bar{H}_i \right]_m &= 0, \\ \sum_{m=1}^M \bar{\nabla} \cdot s_m(\bar{r}) \times \left[\sum_{i=1}^n \bar{E}_i \right]_m &= 0, \\ \sum_{m=1}^M \bar{\nabla} \cdot s_m(\bar{r}) \left\{ \bar{\epsilon}_m \left[\sum_{i=1}^n \bar{E}_i \right]_m + \bar{\kappa}_m \left[\sum_{i=1}^n \bar{H}_i \right]_m \right\} &= 0, \\ \sum_{m=1}^M \bar{\nabla} \cdot s_m(\bar{r}) \left\{ \bar{v}_m \left[\sum_{i=1}^n \bar{E}_i \right]_m + \bar{\mu}_m \left[\sum_{i=1}^n \bar{H}_i \right]_m \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

5. Az új modell eredményei

Alkalmazzuk tehát a megismert számítási eljárást tetzőlegesen erősen inhomogén közegekben terjedő monokromatikus, illetve tranzien (Ultra Wide Band) jelekre [4,5,6]. A közeg legyen előmágnesezett, anizotróp plazma, ami az úrkutatásban nagyon gyakori feladat. Eltekintve a teljes levezetés ismertetésétől, csak végeredményeket közlünk, szemléltetve, hogy az új modell milyen nagy mértékben, érdemi módon változtatja meg a korábban kapott megoldásokhoz képest a jel szerkezetét.

Monokromatikus esetben (is) az MIBM módszerrel kiadódó megoldás szukcesszív approximációval iterálható. Ennek nulladrendben közelítő megoldása visszaadja a jól ismert W.K.B. formulát.

$$E_1(x) = C \sqrt{Z_0(x)} \quad \text{ahol } C = \text{konstans} \quad (28)$$

$$E_2 = \frac{E_{10}}{2} \sqrt{Z_0(x)} \int_x^{x_M} \frac{d(\ln Z_0)}{du} e^{-j2 \int_0^u k(v) dv} du \quad (29)$$

A következő, elsőrendű közelítés eredménye még pontosabb formulákat ad, és a jelrészek közötti energiacsatolás jól látható a formulák szerkezetében:

$$E_1 = E_{10} \sqrt{Z_0(x)} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \int_0^x \frac{d(\ln Z_0)}{du} e^{j2 \int_0^u k(v) dv} \cdot \left[\int_u^{x_M} \frac{d(\ln Z_0)}{dv} e^{-j2 \int_0^u k(v) dv} dv \right] du \right\} \quad (30)$$

Impulzus gerjesztést feltételezve [7]

$$I_{x=0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-x_0}^0 J_0 \left(l, t + \frac{l}{c} \right) dl \right\} e^{-j\omega t} dt \quad (31)$$

a szukcesszív approximáció első lépésében a reflektált jelre adódó megoldás az alábbi:

$$E_{z2}(x,t) = -\frac{j}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{C_0(\omega)}{\sqrt{k(x,\omega)}} \int_{\xi}^x \frac{1}{2k(u,\omega)} \frac{\partial k(u,\omega)}{\partial u} e^{-2j \int_0^u k(v,\omega) dv} du \right] e^{j \left(\omega t + \int_0^x k(h,\omega) dh \right)} d\omega \quad (32)$$

ahol

$$C_0(\omega) = I_{x=0}(\omega) \frac{k_0(\omega) \sqrt{k(x=0,\omega)}}{k_0(\omega) + k(x=0,\omega)} \quad (33)$$

$$k(x,\omega) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega \omega_b(x) \omega_p^2(x) + \omega^2 [\omega_p^2(x) + \omega_b^2(x) - \omega^2]}{\omega_b^2(x) - \omega^2}} \quad (34)$$

A megoldás szerkezetében egymásba ágyazódó integrálok segítségével pontról-pontra nyomom követhető, hogy a terjedő és a reflektálódó energia szoros, pontról pontra változó kapcsolatban van egymással.

6. Összegzés

Bemutattuk, hogy az eddig ismert és általánosan használt inhomogén hullámterjedési leírások alapvető elméleti tévedést és ebből fakadó hibát, ellentmondást rejtenek magukban, a jel szerkezetének eleve hibás feltételezése miatt.

Röviden összefoglalva ismertettük az Inhomogén Alapmódusok Módszerét (MIBM), amelynek segítségével ez az ellentmondás és hiba elő sem áll, és alkalmazásával valóban pontos hullámterjedési leírás és megoldás nyerhető.

Az ismertett probléma és megoldási módszer jelentősége nagyon nagy, tekintve, hogy újragondolásra készíti az elmúlt 100 év hullámterjedési eredményeit, kaput nyitva olyan pontos, új leírások felé, amelyek segítségével környező világunkról alkotott képünk és megszerzett ismereteink interpretálása komoly fejlődésen mehet keresztül a jövőben. A reflexiónak ez a pontos meghatározása számos területen (űrkutatás, radar-technika, hírközlés stb.) befolyásolja a kutatást.

Köszönetnyilvánítás

A bemutatott eredmények alapvetően a Magyar Űrkutatási Iroda (Informatikai és Hírközlési Minisztérium) támogatásával születtek meg, támogatva továbbá az MTA-ELTE Geoinformatikai és Űrtudományi Kutatócsoport, valamint az MTA és a már lezárult OTKA T037611 és F037603 szerződések által.

Irodalom

- [1] Budden K.G.:
Radio waves in the ionosphere;
Cambridge University Press, London 1966.
- [2] Ferencz Cs.:
Elektromágneses hullámterjedés;
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1996.
- [3] Idemen M.:
The Maxwell' equations in the Sense of Distributions;
IEEE Trans. on Ant. and Prop.; AP-21, 1973.
pp.736–738.
- [4] Cs. Ferencz:
Real solution of monochromatic wave propagation
in inhomogeneous media,
PRAMANA Journal of Physics, Vol. 62, No.4, 2004.
pp.943–955.
- [5] Ferencz O. E.:
Full-wave solution of short impulses
in inhomogeneous plasma;
Pramana Journal of Physics, Vol. 64, No.2, 2005.
pp.1–20.
- [6] Erhardtné Ferencz O., Ferencz Cs.:
Elektromágneses impulzusok terjedésének vizsgálata
különböző közegekben;
Híradástechnika, LIX, 2004/5, pp.18–24.
- [7] Ferencz Cs., Ferencz O.E., Hamar D., Lichtenberger J.:
Whistler Phenomena, Short Impulse Propagation;
Kluwer Academic Publishers,
Astrophysics and Space Science Library, Dordrecht,
2001.