Latin és bűvös négyzetek a játékos alkalmazásoktól a biztonságig

DÉNES TAMÁS *matematikus*

tdenest@freemail.hu

***Kulcsszavak:** négyzetek szerkesztése, ortogonális rendszer, összegezési szabályok*

Nem egyedülálló a matematika történetében, hogy egyes fejezetei a szórakozás, a játék területén fogantak és hosszabb-rövidebb fejlődés után a matematika új fejezeteivé váltak. Ezt az utat járta be a kombinatorika egy alig 300 éves fejezete, a latin négyzetek elmélete. Különössége mégsem abban áll, hogy fejlődésének és főleg alkalmazásainak jelentős része a XX. század gyümölcse, hanem abban, hogy a klasszikus numerikus gondolkodást felcserélte a struktúrák belső összefüggéseinek elemzésével és igen szemléletes ábrázolásával. A cikk a latin négyzetek szerteágazó, klasszikus és egészen modern alkalmazásainak vázlatos bemutatását tűzte ki célul, a szórakoztató matematikától, a XXI. század információs társadalmában kulcs jelentőségű adatátvitelen keresztül, a kriptográfiáig.

Alapfogalmak és definíciók történeti illusztrációkba ágyazva

Mivel a latin négyzetek elmélete egyelőre nem képezi matematika oktatásunk törzsanyagát, így a cikk megértéséhez az olvasónak néhány alapfogalom megismerésére lesz szüksége. Ezeket az alapvető fogalmakat és összefüggéseket, valamint a keletkezésük történetét ismertetem a következőkben.

Egy n-ed rendű *latin négyzeten* egy olyan n x n méretű négyzetes mátrixot értünk, amelynek soraiban és oszlopaiban az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek mindegyike egyszer és csak egyszer szerepel. Általában az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek az *1,2,...,n* természetes számok. Az *1/a. és 1/b. ábra* egy-egy 4-ed rendű latin négyzetre mutat példát.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1/a. ábra

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	1

1/b. ábra

A definícióból világosan kiderül, hogy jelen esetben nem az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek számértéke számít, csupán csak különbözőségük, valamint a mátrixban elfoglalt helyük (struktúrájuk).

Egy *latin négyzetet ciklikusnak* nevezünk, ha egymás alatti soraiban az elemek sorrendje azonos, csak egy hellyel jobbra (vagy balra) vannak az elemek eltolva (lásd 1/b. ábra). Egy n-ed rendű latin négyzet egy *tranzverzálisán* értjük n darab olyan elemét, amelyek mindegyike különböző sorában, illetve oszlopában helyezkedik el és nincs köztük két azonos. Az 1/a. ábrán látható latin négyzetben a satírozott négy elem például egy tranzverzálist alkot. Két n-ed rendű latin négyzetet akkor nevezünk *ortogonálisnak*, ha egymásra helyezve őket, az egymás felett levő elemekből alkotott párok mind különbözőek. Példaképpen bemutatjuk az I/a. ábrán szereplő latin négyzet egy ortogonális párját *(2. ábra)*, majd a két latin négyzet egymásra helyezésével nyert számpárokat. (A *3. ábra* segítségével könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a 16 számpár mind különböző.)

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

2. ábra

1,1	2,2	3,3	4,4
2,4	1,3	4,2	3,1
3,2	4,1	1,4	2,3
4,3	3,4	2,1	1,2

3. ábra

Az ortogonális latin négyzet párok létezése, mint látni fogjuk, szoros kapcsolatban van a tranzverzálisokkal. Erre vonatkozó alapvető eredmény Dulmage-Mendelshon tétele:

Két n-ed rendű latin négyzet ortogonalitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy a diszjunkt diagonálisaik száma pontosan n legyen.

$L_1, L_2, \ldots, L_k$ n-ed rendű latin négyzetek egy *ortogonális rendszert* alkotnak, ha bármely két különböző latin négyzetet véve a k darab közül, azok ortogonális párt képeznek. Bebizonyítható, hogy *nxn*-es latin négyzetekből legfeljebb n-1 olyan létezhet, amelyek közül bármely kettő ortogonális, ha viszont ezek mind léteznek, akkor az *ortogonális latin négyzetek teljes rendszeréről* beszélünk. A XX. század elején kiderült, hogy számos súlyos kombinatorikai probléma mélyén az ilyen rendszerek létezésének kérdése rejlik.

Egy L latin négyzetet akkor nevezünk *vízszintesen teljesnek*, ha bármely a latin négyzetben szereplő *a, b* *(a≠b)* elempárra van olyan sora L-nek, amelyben az a elemet b követi. (Ha a leírt tulajdonság oszlop irányban teljesül, akkor az L latin négyzetet *függőlegesen teljesnek* nevezzük.) Egy latin négyzetet, amely vízszintesen és függőlegesen is teljes, *teljes latin négyzetnek* nevezzük.

A *4. ábrán* látható latin négyzet teljes (erről győződhet meg az olvasó, ha a kívánt tulajdonságot megvizsgálja az összes lehetséges (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) elempárokra).

4	1	3	2
3	4	2	1
1	2	4	3
2	3	1	4

4. ábra

Kártyalapok és a 36 tiszt problémája

Leonhard Euler (1707–1783) XVIII. századi matematikus a latin négyzetek névadója, mivel ő alkalmazott a négyzetes mátrixbeli elemek jelölésére latin betűket, az addig szokásos számok helyett. Ez az algebrai struktúrák területén hasonló jelentőséggel bírt, mint F. Viéte (1540–1603) kétszáz évvel korábbi tette, az algebrai egyenletek szimbólumainak bevezetésével. L. Eulert szokták említeni, mint aki bevezette az ortogonális latin négyzet párok fogalmát is. Azonban már Eulert megelőzően is ismerték a neki tulajdonított két fogalmat. A történelmi hűség kedvéért felhívom az olvasó figyelmét Claude-Gaspar Bachet de Méziriac-ra (1581–1638) és M. Ozanam-ra (1640–1712), akik a játékkártyával kapcsolatosan már Euler előtt is eljutottak a latin négyzetek, illetve az ezekből alkotott ortogonális párok fogalmához [1,9,10].

Az *5. ábrán* látható negyed rendű ortogonális latin négyzet pár [1]-ből való, amely tulajdonképpen a következő feladatot oldja meg: *hogyan lehet a francia kártya négy színű (kör, treff, káró, pikk) négy figurájából (ász, király, dáma, bubi) 16 lapot úgy kiválasztani és egy 4x4 méretű mátrixban elrendezni, hogy minden szín minden figurával előforduljon és minden sorban, illetve oszlopban minden szín és minden figura pontosan egyszer forduljon elő.*

Ász kör	Király treff	Dáma káró	Bubi pick
Bubi káró	Dáma pick	Király kör	Ász treff
Király pick	Ász káró	Bubi treff	Dáma kör
Dáma treff	Bubi kör	Ász pick	Király káró

5. ábra

Később 1776-ban majd 1779-ben Euler a Szent Pétervári Akadémián tartott előadásában már megmutatta, hogy ha *n* 4-gyel osztható természetes szám, akkor van n-ed rendű latin négyzetekből álló ortogonális pár.

Ugyancsak ekkor vetette fel az azóta *36 tiszt problémájaként* ismert feladatot: *Válasszunk ki 36 tisztet úgy, hogy közöttük hat különböző rendfokozatú szerepeljen és a tisztek hat különböző csapattestből kerüljenek kiválasztásra, minden egyes csapattestből hat különböző rendfokozatú tiszt szerepeljen a 36 között. Fel lehet-e a fentiek szerint kiválasztott tiszteket úgy állítani egy 6x6-os alakzatba, hogy minden egyes sorban illetve oszlopban minden rendfokozat illetve csapattest pontosan egyszer szerepeljen. A kérdés röviden úgy is feltehető, hogy létezik-e két olyan hatod rendű latin négyzet, amely egymásra ortogonális?*

A feladat kísértetiesen hasonlít az előzőkben a francia és magyar kártyákkal megoldottakhoz, mégis Euler azt sejtette, hogy a 36 tiszt problémájának nincs megoldása. Sőt ennél általánosabban azt is sejtette, hogy általában ha *n=4k+2* alakú, akkor nincsen ortogonális n-ed rendű latin négyzet pár. Ez utóbbi sejtést évszázadokon át Euler sejtésnek hívták és több mint 200 évig foglalkoztatta a matematikusokat a sejtés bizonyítása, vagy cáfolása.

Az Euler sejtés megcáfolása és néhány megoldatlan probléma

Már Euler tudta, hogy sejtése az *n=2* esetre igaz (a bizonyítás igen egyszerű, hiszen az 1, 2 számokból mindössze két különböző *2x2*-es latin négyzet készíthető). Az *n=6* esetre, azaz a 36 tiszt problémájára azonban a bizonyítással 1900-ig kellett várni, míg azt G. Tarry éppen a XX. század fordulóján bebizonyította. Euler általános sejtése azonban nem bizonyult igaznak. Csaknem kétszáz évvel a sejtés megfogalmazása után, 1959-ben R. C. Bose, S. S. Shrikhande és E. T. Parker bebizonyították, hogy az Euler sejtés *n≥10* esetén nem igaz, azaz minden *n=4k+2* alakú számra, ha *k* értéke legalább 2, léteznek ortogonális latin négyzetek.

A *6.ábra* szemlélteti azt a híres tizedrendű ortogonális latin négyzet párt, amelyet 1959-ben hoztak nyilvánosságra, megdöntve az Euler sejtést az *n=10* esetre.

6. ábra

0	4	1	7	2	9	8	3	6	5
8	1	5	2	7	3	9	4	0	6
9	8	2	6	3	7	4	5	1	0
5	9	8	3	0	4	7	6	2	1
7	6	9	8	4	1	5	0	3	2
6	7	0	9	8	5	2	1	4	3
3	0	7	1	9	8	6	2	5	4
1	2	3	4	5	6	0	7	8	9
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7
4	5	6	0	1	2	3	9	7	8

0	7	8	6	9	3	5	4	1	2
6	1	7	8	0	9	4	5	2	3
5	0	2	7	8	1	9	6	3	4
9	6	1	3	7	8	2	0	4	5
3	9	0	2	4	7	8	1	5	6
8	4	9	1	3	5	7	2	6	0
7	8	5	9	2	4	6	3	0	1
4	5	6	0	1	2	3	7	8	9
1	2	3	4	5	6	0	9	7	8
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7

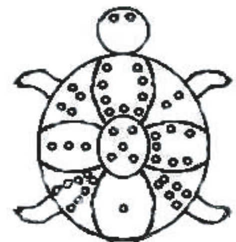
Nem sikerült azonban teljes n-ed rendű latin négyzetből álló ortogonális rendszert találni, ha $n \neq p^r$ (*n* nem prímszám hatvány). Azonban R. H. Bruck és H. J. Ryser bebizonyították a következő tételt: *n-1* darab n-ed rendű latin négyzetből álló ortogonális rendszer nem létezik, ha $n \equiv 1, 2 \mod 4$ (azaz *n* néggyel osztva 1, vagy 2 maradékot ad), hacsak nem $n=a^2+b^2$ (*n* két négyzetszám összegeként állítható elő). Itt érdemes megjegyezni, hogy *Fermat híres karácsonyi tétele*, melyet 1640. karácsonyán fogalmazott meg, így szól: *Minden n=4k+1 alakú prímszám felírható két egész szám négyzetének összegeként.* E két tétel összevetéséből tehát az következik, hogy ha *n* egy *4k+1* alakú prímszám, akkor létezik *n-1* darab (azaz *4k* darab) latin négyzetből álló (azaz teljes) ortogonális rendszer.

A latin és bűvös négyzetek kapcsolata

n-ed rendű *bűvös négyzetnek* nevezünk egy olyan négyzetes mátrixbeli elrendezést, amelyben n^2 egész szám szerepel (általában, de nem szükségszerűen 0, 1,...,n^2) és a négyzetes mátrix minden sorában, oszlopában, illetve két fő átlójában az elemek összege azonos.

Lo Shu bűvös négyzet

Talán nem véletlen, hogy a bűvös négyzet, akárcsak a számmisztika, már jóval korábban, az ókori Kínában felbukkant. A Lo Shu négyzet az ókori Kínából származó bűvös négyzet, melyet egy óriásteknős páncéljára festettek és a Feng Sui fontos részét képezi *(7. ábra)*.



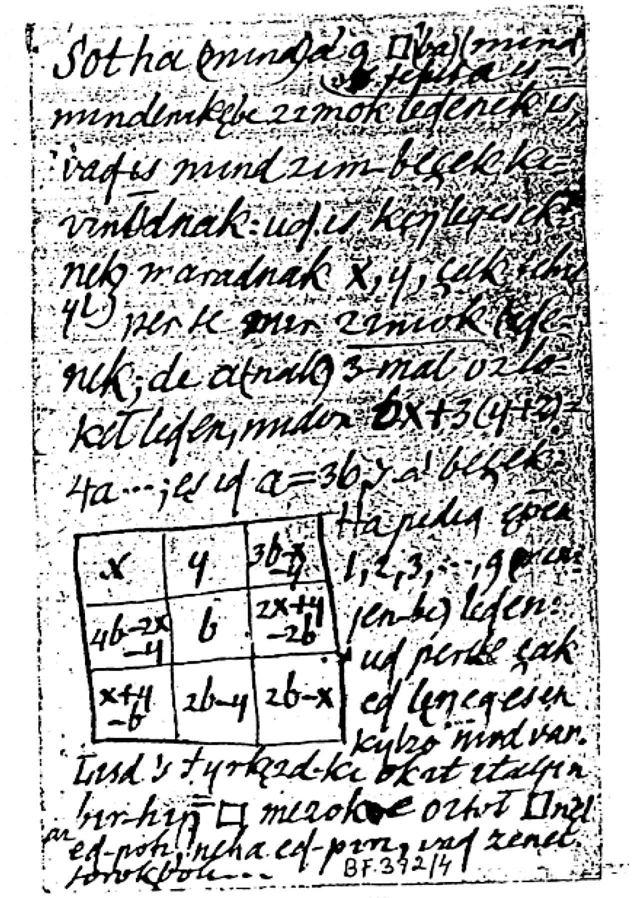
4	9	2
3	5	7
8	1	6

8. ábra
A Lo Shu bűvös négyzet ókori alakja teknősre festve és mai alakjában mátrixba rendezve

Bolyai János bűvös négyzete

Több évtizedes kutatás után 1999-ben jelent meg Kiss Elemér marosvásárhelyi matematika professzor kötete [8], melyben Bolyai Jánosról egy egészen új képet tárt elénk. Bolyai János kéziratos hagyatékának szisztematikus áttanulmányozása arra a meglepő eredményre vezetett, hogy Bolyai közismert geometriáján kívül, nagyrészt a matematika egészen más területeivel foglalkozott. Ezen eddig ismeretlen eredményei közül való, a *8. ábrán* látható kézirattöredék, amely éppen a 3x3-as bűvös négyzetek általános leírásával foglalkozik. Mivel Kiss Elemér professzor alapos kutatásai ellenére sem találta meg ezen kézirat többi oldalát, e helyen szeretném rekonstruálni annak néhány lehetséges összefüggését.

Mint látni fogjuk, a végeredmény meghökkentő összefüggést tár fel a fentiekben bemutatott Lo Shu bűvös négyzettel.



8. ábra
Bolyai János 3x3-as bűvös négyzetekről szóló kézirattöredéke

Az ábra kéziratában Bolyai *a*-val jelölte a *3x3*-as bűvös négyzet sor, oszlop és átló összegeit, a középső cella elemet *b*-vel, az első két cella elemeit pedig *x-szel* és *y*-nal jelölte.

Így a *9.ábrán* látható kitöltést kapjuk:

x	y	a-x-y
2a-2b-2x-y	b	2x+y-a-b
x+y+2b-a	a-y-b	a-x-b

9. ábra

Írjuk fel az ábra mátrixának mellékátlójára adódó egyenletet:

$$a-x-y+b+x+y+2b-a = a, \qquad (1)$$

amelyből azt kapjuk, hogy $a=3b$,

ami éppen Bolyai kéziratának közepén található összefüggés. Ha pedig a cellákba a bűvös négyzet képzési szabályai szerint az *1, 2, 3,…, 9* számtani sorozatot írjuk, akkor fennáll:

$$\frac{(1+9)9}{2} = 3a \quad \Rightarrow \quad a = 15 \quad \Rightarrow \quad b = 5 \qquad (2)$$

Ekkor a 9. ábrába helyettesítve kapjuk:

x	y	15-x-y
20-2x-y	5	2x+y-10
x+y-5	10-y	10-x

10. ábra

(2)-ből tudjuk, hogy minden sor, oszlop és átló elemeinek az összege *15*. Mivel az *5*-ös szám középen van, így minden irányban a két mellette elhelyezkedő elem a *10*-nek egy-egy partíciója. Ezek: *1+9, 2+8, 3+7, 4+6.*

Mivel a cellákban csupa különböző szám áll, így a vízszintes, a függőleges és átlós irányú szomszédok éppen a 4 db partíciót alkotják. A négyből kettő szabadon választható, a másik kettő ezekből már adódik. Az összes megoldások száma tehát:

$$\binom{4}{2} = 6 \qquad (3)$$

A megoldások a *10. ábrán* szereplő mátrix elemeire felírt összefüggésekből levezethetők.

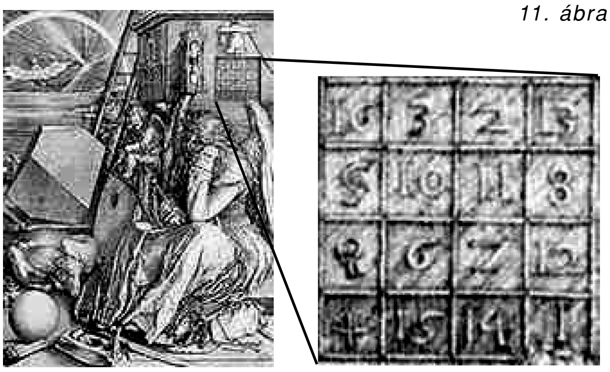
Bár nem tudjuk, hogy Bolyai a jegyzetei többi oldalán mit írhatott, de a 10. ábra rajza melletti megjegyzése pontos, miszerint ha ezt a számtani sorozatot alkalmazzuk a bűvös négyzet kitöltésére, akkor csupán egyetlen megoldás van. A hat mátrix a középső elem körüli elforgatásokkal egymásba átvihető.

A Lo Shu bűvös négyzet pontosan megegyezik a Bolyai-féle hatodik megoldással. Vajon Bolyai János tudott erről?

Albrecht Dürer bűvös négyzete

Egy-egy bűvös négyzet összeállítása a matematika történetének hajnalán még nehéz feladatnak számított, ezért nem csodálkozhatunk, hogy azoknak valamilyen mágikus erőt tulajdonítottak. Az utóbbi századokban sokat foglalkoztak a bűvös négyzetek matematikai tulajdonságaival és kutatták készítésük módszereit.

11. ábra



Albrecht Dürernek, a reneszánsz kor nagy német festőjének a figyelmét is egy „többszörösen” bűvös négyzet ragadta meg, ezt láthatjuk *Melankólia* című rézmetszetének hátterében *(11. ábra).*

Ez a bűvös négyzet már Dürer korában több mint ezeréves múltra tekinthetett vissza, valószínűleg Indiából került át Európába. A művész a sorokat kissé átrendezte, hogy az alsó sor közepére a 15 és a 14 számok kerüljenek, jelezve műve készítésének évét, 1514-et.

Dürer bűvös négyzete teljesen helytálló: mezőin az 1-től 16-ig terjedő egész számok helyezkednek el, soraiban, oszlopaiban és átlóiban a számok összege mindenütt 34, másrészt az említett dátumot adó két számon kívül több egyéb különlegessége is van. Alsó és felső sorában a számok négyzeteinek összege is egyenlő, és ugyanez áll a két szélső oszlop számaira is. A négyzetet függőleges és vízszintes középvonala négy darab *2x2*-es négyzetre vágja szét, ezek mindegyikében ugyancsak 34 a számok összege, de ugyanannyi a középen elhelyezkedő *2x2*-es négyzetben is. A négyzet négy csúcsánál levő számok összege is 34, s ugyanez áll azoknak a *3x3*-as négyzeteknek a sarokszámaira is, amelyeket az eredetiből egy szélső sor és oszlop elhagyásával nyerünk.

Bűvös négyzet konstrukciók latin négyzetekből

A játékos elme bravúros teljesítménye a sakktáblára írt *lóugrásos bűvös négyzet.* Ezen ha a huszár elindul az 1-es számot tartalmazó mezőről, bejárhatja a sakktáblát úgy, hogy mindegyik ugrása a következő számot tartalmazó mezőre vezet, ráadásul a 64. ugrás visszajuttathatja a kiindulási helyére. Bemutatunk egy ilyen sakktáblát *(12. ábra)*, melynek minden sorában és oszlopában 260 a számok összege (az átlókra ez itt nem teljesül).

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

12. ábra Lóugrásos bűvös négyzet

A bűvös négyzetek megalkotásának ezen kívül még számos módját dolgozták ki. A játékos alkalmazásokon jóval túlmutató jelentősége van azonban a bűvös négyzetek és a latin négyzetek kapcsolatának. A *13/a. ábrán* szereplő két latin négyzetről [5]-ban mutatta meg a szerző, hogy összegük egy bűvös négyzet, amit a *13/b. ábrán* mutatunk be.

E speciális eset általánosítható a következő módon:

Ha n=2k+1 alakú, akkor létezik két n-ed rendű latin négyzet (jelöljük ezeket $L(a_{ij})$ és $L(b_{ij})$-vel), melyek összege az $M(c_{ij})$ nxn-es mátrix, melynek minden sorában, oszlopában és két főátlójában az elemek összege $\frac{(n^2+1)n}{2}$ és az $M(c_{ij})$ mátrix elemei az $1,2,\ldots,n^2$ számtani sorozat elemei.

5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4
1	4	2	5	3

5	15	0	10	20
0	10	20	5	15
20	5	15	0 1	0
15	0	10	20	5
10	20	5	15	0

13/a. ábra

10	18	1	14	22
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15
17	5	13	21	9
11	24	7	20	3

13/b. ábra

Bizonyításként bemutatjuk a két latin négyzet szerkesztési elvét.

Mivel L(a_{ij}) egy latin négyzet, így definíció szerint minden sorában és oszlopában az 1,2,…,n egész számok egy-egy permutációját helyezzük el, így a sorokban, illetve oszlopokban lévő számok összege mindig

$$\frac{(1+n)n}{2} \tag{4}$$

Az világos, hogy az előállítandó bűvös négyzet összes elemeinek összege

$$\frac{(1+n^2)n^2}{2} \tag{5}$$

(5)-ből következik, hogy a bűvös négyzet sor, illetve oszlop összegei:

$$\frac{(1+n^2)n^2}{2n} = \frac{(1+n^2)n}{2} \tag{6}$$

Azaz (6)-ból (4)-et kivonva kapjuk meg az L(b_{ij}) latin négyzet sor, illetve oszlop összegeit:

$$\frac{(1+n^2)n}{2} - \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2} \tag{7}$$

Amennyiben feltételezzük, hogy L(b_{ij}) sorai és oszlopai is egy $b_1,b_2,\ldots,b_n$ számtani sorozat elemeit tartalmazzák, úgy (7) alapján felírhatjuk a sorozat összegére vonatkozóan:

$$\frac{(b_1+b_n)n}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2} \tag{8}$$

Legyen $b_1=0$, ekkor $b_n=b_1+(n-1)d=(n-1)d$, ahol d jelöli a számtani sorozat differenciáját. Ezt (8)-tel összevetve kapjuk:

$$\frac{(n-1)dn}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad d=n \tag{9}$$

Az L(b_{ij}) latin négyzet elemei tehát *0, n, 2n,…,n(n-1)* számok lesznek, ahogy ezt a *14. ábra* első latin négyzeténél láthatjuk is. Ezeket a számokat a bűvös négyzet szabályait kielégítő módon helyezzük el az L(b_{ij}) mátrixban.

Ehhez elsőként válasszuk ki az L(a_{ij}) latin négyzet egy tranzverzálisát. Az azonos tranzverzálishoz tartozó elemek azonos szürkeárnyalattal szerepelnek a fehértől a feketéig), ez a definíció szerint az L(a_{ij}) mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elemet tartalmaz, amelyek az 1,2,3,…,n számokból állnak. Ha tehát az L(b_{ij}) mátrixban ennek a tranzverzálisnak megfelelő helyek mindegyikére a 0 értéket írjuk, akkor az M(c_{ij}) mátrixban a $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ elemek értékei, rendre az *1,2,3,…,n* számok lesznek. Most keressünk az L(a_{ij}) latin négyzetben egy másik tranzverzálist és az ennek megfelelő helyekre írjuk az L(b_{ij}) mátrixban az n számot. Ekkor az M(c_{ij}) mátrixban a $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ elemek rendre az *n+1,n+2,n+3,…,2n* értékeket veszik fel. Ezt az eljárást folytatva az L(a_{ij}) latin négyzet n darab tranzverzálisával, az eredmény M(c_{ij}) mátrix pontosan a kívánt *1, 2, 3,…,n²* számsorozat értékeit fogja tartalmazni és az L(b_{ij}) mátrix is egy latin négyzet lesz. Ezzel az állításunkban megfogalmazott összes feltételt teljesítettük, amit a lenti ábrákon lépésről-lépésre követhetünk.

A konstrukcióból egyértelműen adódik, hogy L(a_{ij}) és L(b_{ij}) ortogonális párok. Itt érzékelhetjük, hogy az ortogonális párok és a tranzverzálisok között milyen szoros kapcsolat van. Továbbá feltételeztük *n* darab tranzverzális létezését. Ennek általános érvényű bizonyítása még várat magára, de megmutatjuk, hogy a fenti bűvös négyzetek konstrukciójára vonatkozó algoritmusunk nem megalapozatlan, igaz ugyanis az alábbi tétel:

Ha egy n-ed rendű latin négyzet ciklikus, akkor létezik benne n darab tranzverzális, amelyek éppen a főátlóra vonatkozó tört diagonálisok elemei (a tranzverzálisok azonos szürke árnyalattal vannak satírozva az alábbi, *15. ábrán*).

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

15. ábra

Latin négyzet játék

Végül a latin négyzetekkel való megbarátkozáshoz segítségül bemutatok egy latin négyzet társasjátékot. A játékot két játékos játsza, *A* és *B* (mindig *A* teszi meg az első lépést). A játékot egy *nxn* méretű üres táblán játsszák. Kezdéskor *A* egy *1* és *n* közötti számot a táb-

L(a_{ij})

5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4
1	4	2	5	3

L(b_{ij})

10	15	0	5	20
0	5	0	10	15
20	10	15	0	5
15	0	5	0	10
5	20	10	15	0

L(a_{ij})+L(b_{ij})

15	18	1	9	22
4	7	25	13	16
23	11	19	2	10
17	5	8	21	14
6	24	12	20	3

14. ábra

la tetszés szerinti helyére ír, majd *B* úgy ír a tábla még üres mezőire egy szintén *1* és *n* közötti számot, hogy az a latin négyzet tulajdonságának ne mondjon ellent (az ilyen lépéseket legálisnak nevezzük). Aki utoljára tud legális lépést írni a táblára, az nyer.

Egy 4x4-es táblán lehetséges játékot mutatunk be az utolsó, *16. ábrán*. A fehér mezőkre írt számok *A*, a szürke mezőkre írtak *B* lépéseit mutatják.

1	2	3	
2	3	1	
3	1	2	4
4			1

16. ábra
A latin négyzet játék egy lejátszása

Mivel *A* kezdett, így hat lépés után láthatjuk, hogy *B* nyert, mivel *A*-nak már nincs helyes lépése. Harary és Leary [6]-ban azt bizonyították be, hogy ha *n* páros, akkor *B* nyer, ha *n* páratlan, akkor *A* nyer.

Irodalom

[1] Claude-Gasper Bachet:
Problémes plaisant et detectables,1612.

[2] Berger György: Bűvös négyzetek
Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1986.

[3] J. Chernick:
Solution of the general magic square.
Amer. Math. Monthly 4(1938) 172–175.

[4] J.Dénes, A.D. Keedwell:
Latin squares and their applications.
Academic Press, New York, Akadémiai Kiadó, Bp., English Universities Press, London, 1974.

[5] A. H. Frost:
The construction of Nasik squares of any order.
Proc. London Math. Soc. 27 (1985-96) 487–518.

[6] F. Harary, T. Leary:
Latin square schievment games.
J. Recreational Math.16 (1983/84) 241–246.

[7] D.King:
Magic square puzzles.
Frederich Müller Limited, London, 1984.

[8] Kiss Elemér:
Matematikai kincsek Bolyai kéziratos hagyatékából
Akadémiai Kiadó, Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

[9] M. Ozanam:
Recreations mathematique et physiques.
Tome 1-4. Paris,Claude Joubert, 1723.

[10] Poignard:
Traité des Quarréa sublines contenent d Methodes Generales, toutes Nouvelles e faciles, pour faire les sept Quarres planetaires et tout autrea a l infine, Brüssel, 1794.

Hírek

A **„The Oracle Grid Index”** kezdeményezés keretében rendszeresen értékeli a számítóhálózatos technológiák terjedését, és a bevezetésük iránti hajlandóságot. Az Oracle Grid Index olyan nulla és tíz közti mutatószám, amely a számítóhálós megoldásokkal kapcsolatos, az európai vállalatok körében végzett felméréseken alapul.

A 2004 őszére vonatkozó európai Oracle Grid Index értéke 3,1. Ez a szám önmagában csak nagyvonalakban mutatja a számítóhálózatok terjedését az európai informatikában, az index mögött álló mutatók és adatok azonban néhány érdekes tényre és statisztikára világítanak rá. A kutatások emellet rávilágítottak a grid computing jellegű technológiák bevezetésére irányuló egyes döntések hátterére. A számítóhálózatokat nagymértékben támogató válaszadók több mint negyven százaléka úgy nyilatkozott, hogy informatikai struktúrájuk átfogó terhelése és kihasználtsága meghaladja az átlagot, ami azt sugallja, hogy a grid computing korai bevezetését ösztönzi az informatikai kapacitások kiegyensúlyozására irányuló törekvés. A válaszadók többsége (51 százalék) emellett kijelentette, hogy a számítóhálózatok fő előnye az informatikai beruházások és üzemeltetési költségek szintjének átfogó csökkentése.

A **Sun Microsystems** egyik munkatársát, Dr. Robert Drost vezető kutatót **a világ 100 legjobb fejlesztője** közé választották. Dr. Dorst az elismerést a nyomtatott áramköri lapkák közötti „proximity” kommunikációs, vagyis valós, molekuláris fizikai kapcsolat nélküli adatátvitel technológia kidolgozására irányuló kutatásaiért kapta.

A kutatási eredmények a számítógépek teljesítményének megváltozatatását ígérik. Ezzel az újítással lehetővé válna következő generációs szuperszámítógépek megépítése olyan nagy adatfeldolgozási igényű alkalmazások teljesítményének jelentős javítására, mint a távoli galaxisok feltérképezése, a fehérjék térbeli szerkezetének szimulációja, az orvosi kezelések eredményének megjóslása. A „proximity” kommunikáció folyamán egy lapkapár egymással szemben helyezkedik el, mikronokra egymástól, de nem érintkezve egymással. Ezáltal az egyik lapkán található adó áramkörök és a másikon lévő fogadó áramkörök között az adatcsere lapkán belüli sebességgel történhet.