

# Impulzus-terjedés vizsgálata vákuummal kitöltött csőtápvonalon

ERHARDT ZOLTÁNNÉ DR. FERENCZ ORSOLYA

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Geofizika tanszék, Űrkutató Csoport  
spacerg@sas.elte.hu

Reviewed

## Kulcsszavak: Maxwell-egyenletek, zárt megoldások

Napjaink egyik fontos hullámterjedési kutatási területe a rövid impulzusok terjedésének vizsgálata hullámvezetőkben. Az eddig ismert megoldások mindegyike monokromatikus megközelítéseken alapul, adott frekvenciákat külön vizsgálva, illetve alapvetően monokromatikus kiindulópontokra építve fel a modellt és az elméletet (pl. permittivitás bevezetése) [1].

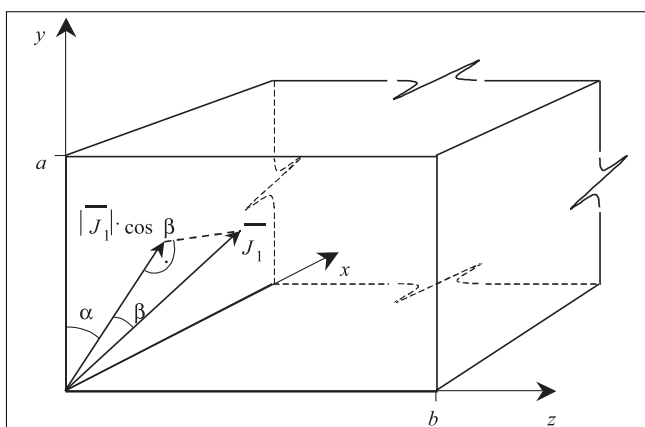
A cikkben egy teljesen új elméleti modellt és megoldási módszert mutatok be vákuummal kitöltött négy-szög keresztmetszetű csőtápvonalra, melyet tetszőleges alakú elektromágneses jellel gerjesztünk (Dirac, valódi rövid impulzus stb.) Ez a megoldási módszer nem alkalmazza a fent említett monokromatikus megfontolásokat. Elméleti alapjai tranzienst gerjesztésű síkhullámok esetén megtalálhatóak [2,3]-ban.

A cikkben bemutatandó zárt alakú megoldás monokromatikus gerjesztés esetén visszaadja a már jól ismert megoldásokat, ám azoknál jóval általánosabb leírást tesz lehetővé.

## A modell

Az új elméleti módszert az 1. ábrán látható modellen mutatom be, ahol a hullámvezető egy vákuummal kitöltött és ideális, veszteségmentes fémfallal határolt négy-szög keresztmetszetű csőtápvonal.

1. ábra Az alkalmazott modell struktúrája



Az általános irányú gerjesztő áramsűrűséget az alábbi alakban vesszük fel:

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 &= J_{1x} \cdot \vec{i} + J_{1y} \cdot \vec{j} + J_{1z} \cdot \vec{k} \\ |\vec{J}_1| &= \delta(t) \cdot \delta(x) \cdot B_1(y) \cdot B_2(z) \end{aligned} \quad (1)$$

ahol  $B_1(x)$  és  $B_2(z)$  a modellben felvett peremfeltételeket tartalmazó burkolófüggvény

$$B_1(0) = B_1(a) \equiv 0 \quad \text{és} \quad B_2(0) = B_2(b) \equiv 0 \quad (2)$$

Tehát a gerjesztő áramsűrűség

$$\vec{J}_1 = |\vec{J}_1| \sin \beta \vec{i} + |\vec{J}_1| \cos \beta \cos \alpha \vec{j} + |\vec{J}_1| \cos \beta \sin \alpha \vec{k} \quad (3)$$

A továbbiakban vezessük be az alábbi, elméleti megszorítást nem jelentő, kellően általános gerjesztési alakot:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{1x} &\equiv 0 \\ \vec{J}_1 &= \delta(t) \delta(x) B_1(y) B_2(z) \cos \alpha \vec{j} + \delta(t) \delta(x) B_1(y) B_2(z) \sin \alpha \vec{k} \\ |\vec{J}_1| &= J_1 = \delta(t) \delta(x) B_1(y) B_2(z) \end{aligned} \quad (4)$$

## A megoldási módszer

A kiindulópontként megoldandó egyenletek a Maxwell-egyenletek [4]:

$$\begin{aligned} I. \quad \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_1 + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ II. \quad \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ III. \quad \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ IV. \quad \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (5)$$

Vezessük be a retardált potenciált a szokott módon:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \vec{H} \\ \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\nabla \psi \end{aligned} \quad (6)$$

A Lorentz-feltétel érvényesíthető a szokásos alakban:

$$\left( \nabla^2 \vec{A} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (7)$$

Tehát a megoldandó egyenlet alakja az alábbi:

$$\nabla^2 A - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\bar{J}_1 \quad (8)$$

Tekintettel arra, hogy az általános alakú, hely és idő szerint tranziens gerjesztő jel határozott kezdőponttal rendelkezik mind a hely, mind az idő függvényében, valamint a vizsgált probléma lineáris, alkalmazzuk a Laplace-transzformációt a tér és az idő koordináták szerint az alábbi módon definiálva a transzformációs változókat:

$$\begin{aligned} t &\xrightarrow{L} s \\ x &\xrightarrow{L} p \\ y &\xrightarrow{L} u \\ z &\xrightarrow{L} l \end{aligned} \quad (9)$$

$$f(t, x, y, z) \xrightarrow{L} F(s, p, u, l)$$

A derivált tagok jelenléte a megoldandó differenciálegyenletekben azt eredményezi, hogy a transzformáció során a jel hely és idő szerinti (0) pontbeli kezdeti értékei tűnnek fel a transzformált egyenletekben. Általában ezek a kezdeti értékek tartalmazák a közeg energetikai állapotára vonatkozó információkat. Azonban a jelen esetben a vizsgált közeg a gerjesztés bekapcsolását megelőzően energia mentesnek tekinthető. Ennek következtében az összes kezdeti értéket 0-nak tekinthetjük a továbbiakban.

A megoldandó transzformált egyenletek tehát:

$$\begin{aligned} H_x(s, p, u, l) &= u A_z(s, p, u, l) - l A_y(s, p, u, l) \\ H_y(s, p, u, l) &= -p A_z(s, p, u, l) \\ H_z(s, p, u, l) &= p A_y(s, p, u, l) \end{aligned} \quad (10)$$

továbbá (11)

$$\begin{aligned} E_x(s, p, u, l) &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{s} [p u A_y(s, p, u, l) + p l A_z(s, p, u, l)] \\ E_y(s, p, u, l) &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{s} [u^2 A_y(s, p, u, l) + u l A_z(s, p, u, l)] - \mu_0 s A_y(s, p, u, l) \\ E_z(s, p, u, l) &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{s} [u l A_y(s, p, u, l) + l^2 A_z(s, p, u, l)] - \mu_0 s A_z(s, p, u, l) \end{aligned}$$

A gerjesztő áramsűrűség transzformált alakja (12):

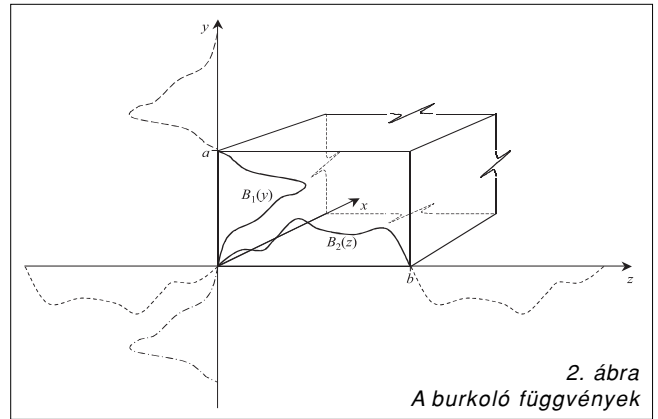
$$J_1(s, p, u, l) = \iiint_0^\infty \delta(t) \delta(x) B_1(y) B_2(z) \cdot e^{-st} \cdot e^{-px} \cdot e^{-uy} \cdot e^{-lz} dt dx dy dz = 1 \cdot 1 \cdot B_1(u) B_2(l)$$

Nagyon fontos  $B_1$  és  $B_2$  függvények megfelelő megválasztása. Ezek a burkoló függvények tartalmazzák a modell geometriai struktúrájából adódó peremfeltételeket. Ez látható a 2. ábrán.

A kielégítendő peremfeltételek az alábbiak:

$$B_1(0) = B_1(a) = B_2(0) = B_2(b) \equiv 0 \quad (13)$$

Ahogy az általában ismert [4], a  $B_1$  és  $B_2$  burkoló függvények a modell elméleti megszorítása nélkül



2. ábra  
A burkoló függvények

kiterjeszhetőek és periodikussá tehetőek, lehetővé téve ez által a Fourier-sorba fejtést:

$$B_1(y) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot e^{jm \frac{\pi}{a} y} \quad (14)$$

$$C_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a B_1(y) \cdot e^{-jm \frac{\pi}{a} y} dy$$

valamint

$$B_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot e^{jn \frac{\pi}{b} z} \quad (15)$$

$$C_n = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b B_2(z) \cdot e^{-jn \frac{\pi}{b} z} dz$$

ahol  $C_m$  és  $C_n$  Fourier-együtthatók,  $a$  és  $b$  a hullámvezető geometriai paraméterei,  $m$  és  $n$  egész számok, értékük

$$\begin{aligned} m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

(14) és (15) Laplace-transzformált alakjai:

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{C_m}{u - jm \frac{\pi}{a}} \\ B_2(l) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{l - jn \frac{\pi}{b}} \end{aligned} \quad (17)$$

(17)-et behelyettesítve a (10) és (11) egyenletekbe, azt kapjuk, hogy az elektromos és mágneses térerősség komponensek transzformált alakjainak nevezői végtelen számú pólust tartalmaznak. Első pillantásra úgy tűnhet, hogy e tagok inverz transzformációja nem lehetséges. Azonban megvizsgálva ezeket a pólusokat, nyilvánvalóvá válik, hogy az inverz transzformáció során a Fourier együtthatókból származó pólusok 0 értékű tagokat eredményeznek a számlálóban, és így kiesnek. A megmaradó, nem virtuális pólusok tehát az alábbi egyenlet megoldásai:

$$p^2 + u^2 + l^2 - \epsilon_0 \mu_0 s^2 = 0 \quad (18)$$

Elvégezve az inverz Laplace-transzformációt és alkalmazva az  $s = j\omega$  összefüggést (19), a térkomponensek helytől függő spektrális alakjára a következő adódik:

$$\begin{aligned}
 H_x(\omega, x, y, z) &= \sum_m \sum_n \frac{P_- C_m C_n}{2k_x(\omega)} \cdot e^{j[k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} - \sum_m \sum_n \frac{P_- C_m C_n}{2k_x(\omega)} \cdot e^{j[-k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} \\
 H_y(\omega, x, y, z) &= \sum_m \sum_n C_m C_n \sin \alpha \cdot e^{j[k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} + \sum_m \sum_n C_m C_n \sin \alpha \cdot e^{j[-k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} \\
 H_z(\omega, x, y, z) &= \sum_m \sum_n C_m C_n \cos \alpha \cdot e^{j[k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} + \sum_m \sum_n C_m C_n \cos \alpha \cdot e^{j[-k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]}
 \end{aligned} \tag{20}$$

és

$$\begin{aligned}
 E_x(\omega, x, y, z) &= \sum_m \sum_n \frac{-P_+ C_m C_n}{2\omega \epsilon_0} \cdot e^{j[k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} + \sum_m \sum_n \frac{P_+ C_m C_n}{(-2)\omega \epsilon_0} \cdot e^{j[-k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} \\
 E_y(\omega, x, y, z) &= \sum_m \sum_n \frac{[(-jm\pi/a)(jP_+) - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \cos \alpha] C_m C_n}{2j\epsilon_0 \omega jk_x(\omega)} \cdot e^{j[k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} + \\
 &+ \sum_m \sum_n \frac{[(-jm\pi/a)(jP_+) - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \cos \alpha] C_m C_n}{(-2)j\epsilon_0 \omega jk_x(\omega)} \cdot e^{j[-k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} \\
 E_z(\omega, x, y, z) &= \sum_m \sum_n \frac{[(-jn\pi/b)(jP_+) - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \sin \alpha] C_m C_n}{2j\epsilon_0 \omega jk_x(\omega)} \cdot e^{j[k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]} + \\
 &+ \sum_m \sum_n \frac{[(-n\pi/b)P_+ - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \sin \alpha] C_m C_n}{(-2)j\epsilon_0 \omega jk_x(\omega)} \cdot e^{j[-k_x(\omega) \cdot x \cdot M \cdot N]}
 \end{aligned} \tag{21}$$

ahol

$$P_+ = m \frac{\pi}{a} \cos \alpha + n \frac{\pi}{b} \sin \alpha \quad P_- = -m \frac{\pi}{a} \cos \alpha + n \frac{\pi}{b} \sin \alpha$$

$$M = m \frac{\pi}{a} y \quad N = n \frac{\pi}{b} z$$

$$k_x(\omega) = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 - \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Jól látható, hogy a térkomponensekben az egyik tag előre terjedő, míg a másik ezzel az iránnyal szemben haladó jel, miközben a gerjesztés a végtelen hosszú csőtápvonal  $x = 0$  pontjában lép fel.

A határhullámhossz (és a határfrekvencia) (20) és (21) alapján meghatározható

$$\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 - \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 = 0 \quad \text{és} \quad \lambda_{m,n} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}} \tag{22}$$

láthatóan visszaadva a monokromatikus esetben már ismert összefüggést.

A formális inverz Fourier-transzformációval a pontos hely-időfüggő zárt alakú megoldást kapjuk a terjedő jel elektromos és mágneses térerősség-komponenseire:

$$\begin{aligned}
 H_x(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_m \sum_n \frac{P_- C_m C_n}{k_x(\omega)} \cdot e^{jT_+} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} - \sum_m \sum_n \frac{P_- C_m C_n}{k_x(\omega)} \cdot e^{jT_-} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} \right\} d\omega \\
 H_y(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_m \sum_n C_m C_n \sin \alpha \cdot e^{jT_+} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} + \sum_m \sum_n C_m C_n \sin \alpha \cdot e^{jT_-} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} \right\} d\omega \\
 H_z(t, x, y, z) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_m \sum_n C_m C_n \cos \alpha \cdot e^{jT_+} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} + \sum_m \sum_n C_m C_n \cos \alpha \cdot e^{jT_-} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} \right\} d\omega \\
 E_x(t, x, y, z) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_m \sum_n \frac{P_+ C_m C_n}{\omega \epsilon_0} \cdot e^{jT_+} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} + \sum_m \sum_n \frac{P_+ C_m C_n}{\omega \epsilon_0} \cdot e^{jT_-} \cdot e^{jM} \cdot e^{jN} \right\} d\omega
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$E_y(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_m \sum_n \frac{[(-m\pi/a)P_+ - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \cos \alpha] C_m C_n \cdot e^{iT_+} \cdot e^{iM} \cdot e^{jN} - \sum_m \sum_n \frac{[(-m\pi/a)P_+ - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \cos \alpha] C_m C_n \cdot e^{iT_-} \cdot e^{iM} \cdot e^{jN}}{\varepsilon_0 \omega k_x(\omega)} \right\} d\omega$$

$$E_z(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_m \sum_n \frac{[(-n\pi/b)P_+ - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \sin \alpha] C_m C_n \cdot e^{iT_+} \cdot e^{iM} \cdot e^{jN} - \sum_m \sum_n \frac{[(-n\pi/b)P_+ - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \sin \alpha] C_m C_n \cdot e^{iT_-} \cdot e^{iM} \cdot e^{jN}}{\varepsilon_0 \omega k_x(\omega)} \right\} d\omega$$

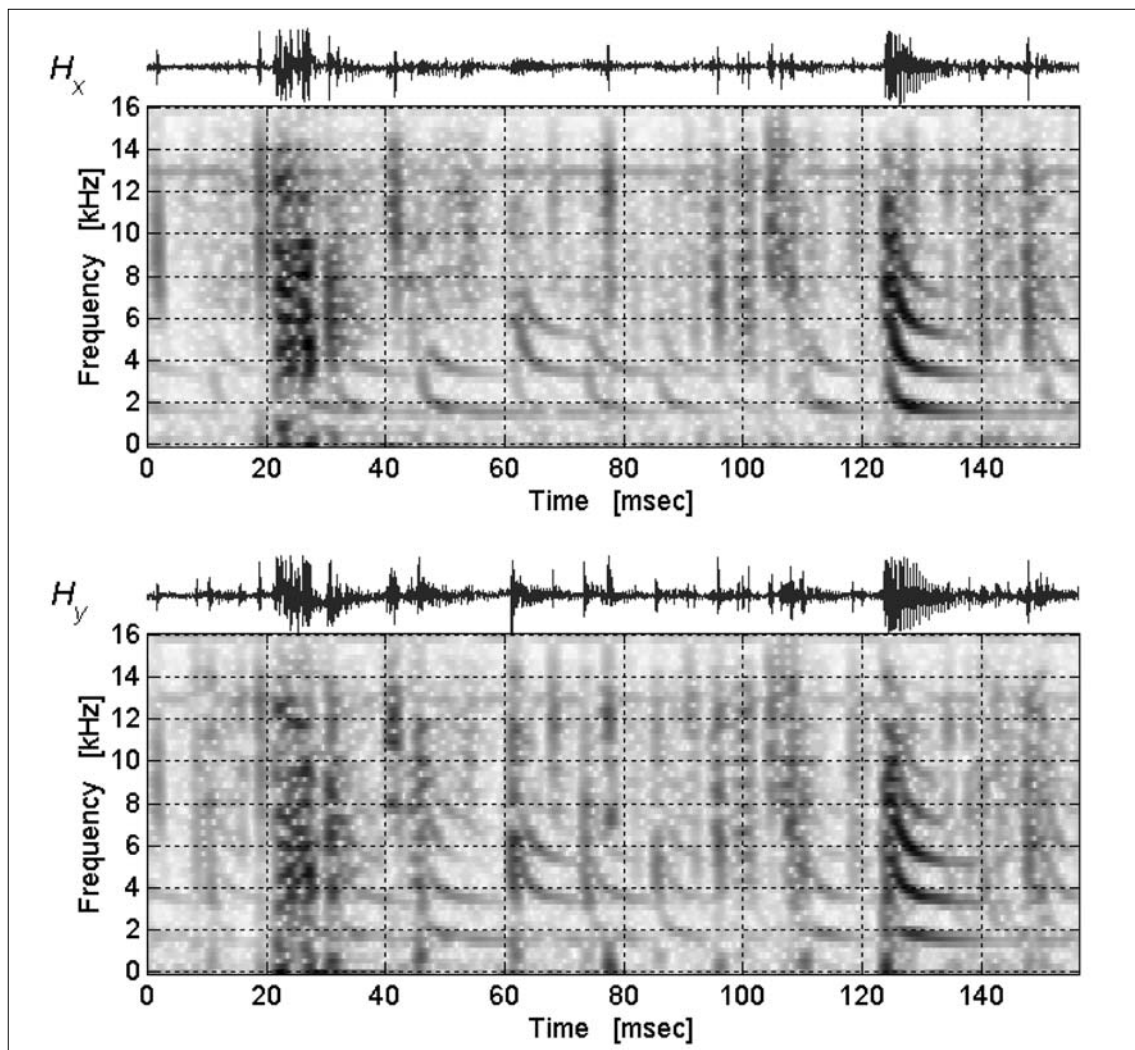
ahol:

$$T_+ = \omega t + k_x(\omega) \cdot x \quad T_- = \omega t - k_x(\omega) \cdot x$$

### Numerikus eredmények és konklúziók

A kapott zárt alakú megoldás egyik első alkalmazási példája a Föld-ionoszféra hullámvezetőben terjedő, villám által gerjesztett impulzus terjedésének vizsgálata.

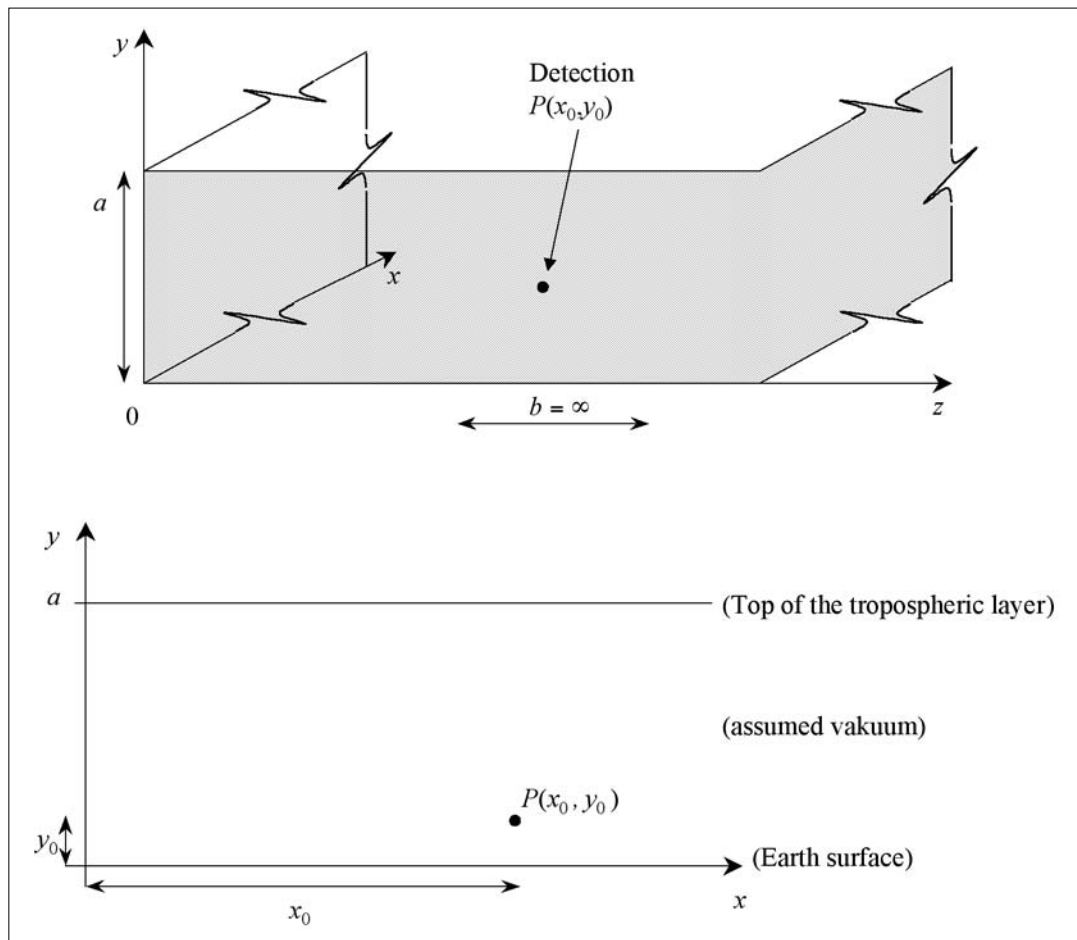
A 3. ábrán egy, a Föld-ionoszféra hullámvezetőben terjedő és a földfelszínen detektált jel két mágneses térerősség komponensének dinamikus spektruma és időfüggvénye látható.



3. ábra Mért jel két különböző mágneses térerősség-komponensének dinamikus spektruma és időfüggvénye (Marion szigetek, 2001.04.22. 02:30:07)

Számos cikk foglalkozik e jelek terjedésének vizsgálatával, és az ismert tény, hogy a dinamikus spektrum jellegét a hullámvezetőben történő vezetett terjedés okozza [5, 6, 7, 8]. A móduskép közelítő leírásai azonban eddig a vezetett hullámok monokromatikus leírására épültek.

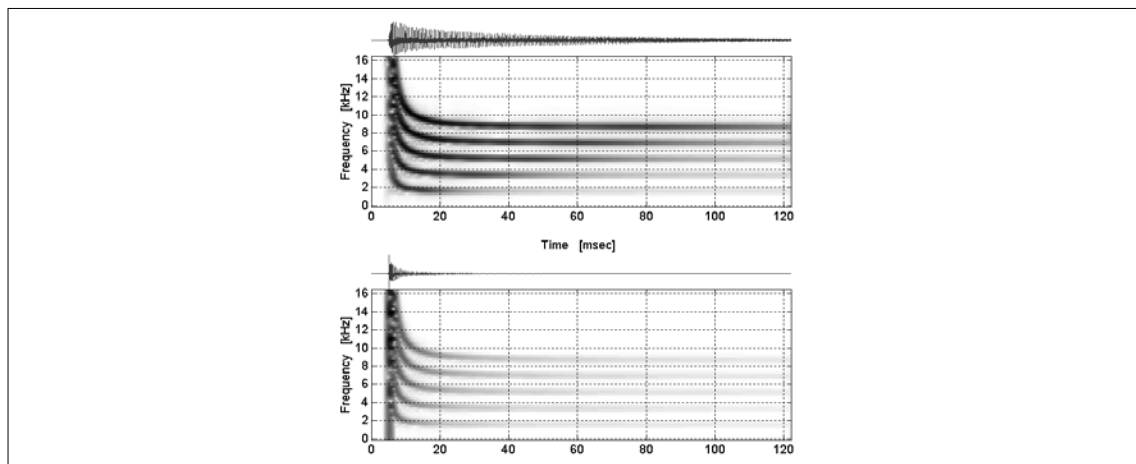
A 4. ábrán látható az alkalmazott modell, feltételezve, hogy  $b = \infty$ , azaz a jel két végtelen, tökéletesen vezető fémlap között terjed és a gerjesztés az  $x = 0$  síkon lép fel.



4. ábra  
A Föld-ionoszféra  
hullámvezető  
modellje

A modellszámításban az ionoszféra aljának magassága 85 km, a megtett terjedési út 2000 km, a mérő-antenna magassága (a detekció helye) 1000 m. A gerjesztő jel Dirac-delta, a burkoló függvények Fourier-együtthatói azonosan 1 értékkel szerepelnek,  $\alpha = 45^\circ$ , továbbá a figyelembe vett módusok száma  $m = 0, \dots, 5$  (mindezek a paraméterek rugalmasan változtathatóak).

A számított időfüggvények és dinamikus spektrumok a  $H_x$  és  $H_y$  térerősség komponensekre egy adott P pontban az 5. ábrán láthatóak.



5. ábra Dirac-delta gerjesztés esetén számított időfüggvények és dinamikus spektrumok

A 3. és az 5. ábra összehasonlítása során számos fontos hasonlóságot láthatunk. A valódi impulzus leírás pontos magyarázatot ad a mért jelenségre. A jel spektrumában látható párhuzamos ágak száma a figyelembe vett Fourier együtthatók, azaz módusok számától függ.

Az egyes ágak között látható frekvenciabeli távolság a hullámvezető geometriai méretétől, vagy más szóval a troposzféra vastagságától függ, azaz az ionoszféra aljának (a D-rétegnek) a magasságától függ. Ez a tény lehetővé teszi, hogy az ionoszféra aljának magasságát folyamatosan monitorozhassuk.

Az új, a korábbiaknál pontosabb megoldás alkalmas arra, hogy egyetlen villám által gerjesztett vezetett jel dinamikus spektrumából is meghatározhassuk a D-réteg magasságát, és nem szükséges a régebbi, monokromatikus számításokkal kapott modellekben alkalmazott kiátlagolás, amikor több (esetleg össze nem tartozó, különböző gerjesztésektől származó) spektrális jelet összeadva határozzák meg ezt a paramétert.

Az új modell és megoldás további nagyon jelentős előnye, hogy a gerjesztő villám-impulzus távolsága a detekció helyétől, a diszperzió mértékéből megbecsülhető, továbbá a terjedés iránya is egyértelműen meghatározható a  $H_x$  és  $H_y$  komponensek arányából, tekintettel arra, hogy az  $m = 0$  módus esetén  $H_x = 0$ ,  $H_y$  viszont nem. Így (amennyiben a két komponenst mérő antenna kalibrálva van), a mért adatokat különböző a szögértékekkel „elforgatva” a beérkezés iránya kiszámítható.

A megoldás teljesen analitikusan, közvetlenül a Maxwell-egyenletekből kapott, zárt alakú formula, amely nem tartalmaz monokromatikus közelítéseket, így a tranziens jelenségek, impulzusok leírására pontosabban alkalmazható, mint a korábbi megoldások. A gerjesztés alakja általános, a Dirac-deltára kapott válasz a lineáris közeg átviteli (súly-) függvényét adja meg, és így a konvolúció segítségével más gerjesztésekre adott válaszok is meghatározhatóak.

Az alkalmazott geometriai struktúra tovább fejleszhető.

Az eredmények jól numerizálhatóak, és így a mért adatok és a modellszámítás eredményei összevethetőek.

## Köszönetnyilvánítás

A kutatási eredmények létrehozásához az OTKA T034831, T037611 és F037603; a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János Kutatási Ösztöndíja; a DAK-11/02 Magyar–Dél-Afrikai Kormányközi Tudományos és Technológiai Együttműködési Program és a Magyar Űrkutatási Iroda Kutatási és Fejlesztési alapja nyújtott támogatást.

## Irodalom

- [1] Budden K.G.:  
*Radio waves in the ionosphere*;  
Cambridge University Press, London 1966.
- [2] Ferencz O.E.:  
*Electromagnetic Wave Propagation in Different Terrestrial Atmospheric Models*;  
Ph.D.Thesis, Budapest University of Technology and Economics, 1999.
- [3] Ferencz Cs., Ferencz O.E., Hamar D. and Lichtenberger J:  
*Whistler Phenomena, Short Impulse Propagation*;  
Kluwer Academic Publishers, Astrophysics and Space Science Library, Dordrecht, 2001.
- [4] Simonyi K.:  
*Foundation of Electrical Engineering*,  
Pergamon Press, New York, 1963.
- [5] Shvets A. V., M. Hayakawa:  
*Polarisation effects for tweek propagation*,  
Journal of Atmospheric and Solar-terrestrial Physics,  
Vol. 60, No. 4, pp.461–469, 1998.
- [6] Shvets A. V., Lazebny B., V., Kukushkin A., S.:  
*Synchronous measurement of atmospherics on the sea surface and underwater*,  
Journal of Atmospheric and Solar-terrestrial Physics,  
Vol. 16, No. 3, pp.221–226, 1996.
- [7] Hayakawa M., Ohta K., Baba K.:  
*Wave characteristics of tweek atmospherics deduced from the direction-finding measurement and theoretical interpretation*,  
Journal of Geophysical Research,  
Vol. 99, No. D5, pp.10,733–10,743, 1994.
- [8] Cummer S. A., Inan U. S., Bell T. F.:  
*Ionospheric D region remote sensing using VLF radio atmospherics*, Radio Science,  
Vol. 33, No. 6, pp.1781–1792, 1998.

