

# Koncentrált paraméterű és mintavételezett szűrők együttes amplitúdó- és fázisapproximációja

DR. FÖLDVÁRINÉ OROSZ JULIANNA –  
DR. HENK TAMÁS – DR. SIMONYI ERNŐ  
Távközlési Kutató Intézet

## Összefoglalás

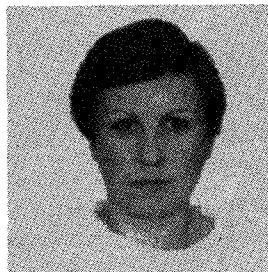
Együttes amplitúdó- és fázisapproximációs módszert mutatunk be koncentrált paraméterű és mintavételezett szűrők tervezésére. A realizációk köre az LC, CCD, aktív RC, kaszkád SC szűrőktől a digitális vagy hullámdigitális HR-szűrőig terjed. Az approximáció alapgondolata a nem minimálfázisú szűrő minimálfázisú szűrőre és mindentátesztő korrektorra történő dekompozíciója. Így az amplitúdó- és fázisapproximáció felváltva végezhető. Mindkét approximáció speciális függvények lineáris interpolációján alapul. A cikk végén néhány mintapéldát mutatunk be.

## 1. Bevezetés

A szűrőtervezés célja általában az, hogy előírt amplitúdó-követelményeket kis ingadozású fáziskarakterisztika mellett valósítunk meg. A hagyományos koncepció szerint az amplitúdó-követelményeket minimálfázisú hálózattal valósítjuk meg, a fázist pedig mindentátesztővel korrigáljuk. Jobb megoldást érhetünk el, ha a korrekter mindentátesztő tulajdonságáról lemondunk és a korrekter-hálózatot is felhasználjuk az amplitúdó-karakterisztika alakításához.

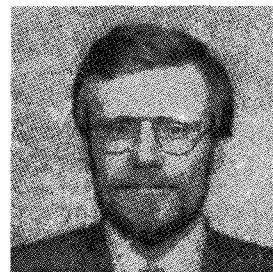
Az együttes amplitúdó- és fázisapproximációt sok speciális esetre megoldották mind koncentrált paraméterű, mind mintavételezett szűrőkre reciprok és nemreciprok megvalósításokkal [1-9]. Az együttes approximációnak az irodalomban tárgyalt speciális eseteiben az amplitúdó és a fázis közelítésére csak bizonyos típusú approximációk megengedettek, azaz az egységnyi átvitelt vagy maximálisan laponan vagy egyenletesen közelítik. Az ismert módszerek egy részében mindkét közelítés összes paraméterét együtt kell kezelni, ennek következtében az eljárás konvergenciáját nehéz kézben tartani. Más módszerekben az amplitúdót és a fázist ugyanazonokon a frekvenciapontokon kell interpolálni [5].

Ebben a cikkben olyan együttes approximációs módszert mutatunk be, amelyben mind az amplitúdó, mind a fázis maximálisan laponan és egyenletesen is közelíthető, az előírások pedig tetszőlegesen megadhatók mind aluláteresztő mind sáváteresztő szűrőkre. A módszer alapgondolata az, hogy egy nem minimálfázisú szűrőt approximálunk, amelyet két fiktív részre bontunk. A közelítés során mind az amplitúdóra és a fázisra együttesen, mind az amplitúdóra külön maximális számú szabadságfokot használunk fel. A két



DR. FÖLDVÁRINÉ  
OROSZ JULIANNA

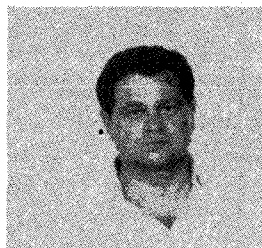
1977-ben szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetemen. Munkáját a Távközlési Kutatóintézetben kezdte, majd 1982 és 1985 között az MTA SZTAKI-ban ösztöndíjas aspiráns volt. 1985 óta ismét a TKI munkatársa. 1989-ben kandidátusi fokozatot szerzett. Az analóg és digitális jelfeldolgozás problémáival, elsősorban szűrőtervezéssel foglalkozik.



DR. HENK TAMÁS

1973-ban végzett a BME Villamosmérnöki Karán. Azóta a TKI-ban az adatátviteli modernizációs számítógéppel segített tervezésében és az INTERCSAT-berendezés kidolgozásában vett részt. Kutatási területei: lineáris és nemlineáris hálózatelmélet, adatátvitel, digitális jelfeldolgozás. 1977-től 1979-ig a Dublini Egyetemen volt ösztöndíjas szűrőtervezés témakörében. 1980-ban kapta egyetemi doktorátusát adatátvitelből, és 1985-ben elnyerte a műszaki tudományok kandidátusa fokozatot szűrőtervezés témaköréből.

1968-ban szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetemen, majd 1974-ben ugyanott doktori fokozatot. A műszaki tudomány kandidátusa fokozatot 1980-ban szerezte meg. 1968-tól a Távközlési Kutató Intézetben dolgozik, jelenleg tudományos főosztályvezetőként. Tématerülete a digitális jelfeldolgozás. 1 környve és mintegy 50 idegennyelvű publikációja jelent meg. Címzetes egyetemi docens a Budapesti Műszaki Egyetemen.



DR. SIMONYI ERNŐ

approximáció paraméterei elkülönülnek, interpolációs pontjaik pedig függetlenek egymástól. Mindez jobban megközelíthetővé teszi a stabilitás és a konvergencia kérdését. Az iteráció egyszerű és néhány lépésben konvergál.

## 2. Nem minimálfázisú hálózatok dekompozíciója

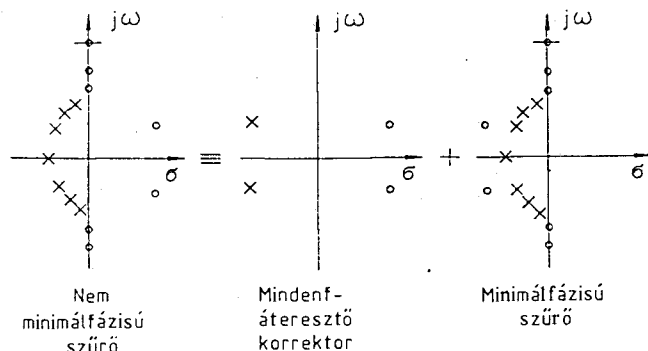
Köztudott, hogy minden nem minimálfázisú hálózat két fiktív részre bontható: egy minimálfázisú hálózatra és egy mindentáteresztő korrektorra. A nem minimálfázisú szűrő átviteli függvényének pólusai a bal félsíkon, zérusai a jobb félsíkon, a képzetes tengelyen és sávszűrő esetén az origóban fekszenek. Általános esetben a zérusok a bal félsíkra is kerülhetnek, de szelektív szűrők esetében, ha az amplitúdó közelítésére maximális számú szabadságfokot kötünk le, elegendő a fent említett esettel foglalkozni. A nem minimálfázisú hálózat egyik része, a fiktív korrektor tartalmazza a nem minimálfázisú hálózat jobb félsíkbeli zérusait és ezek tükörképeként a bal félsíkon pólusokat. A fiktív minimálfázisú hálózat tartalmazza a nem minimálfázisú hálózat pólusait, képzetes tengelyen fekvő zérusait és azokat a bal félsíkon fekvő fiktív zérusokat, amelyeket a korrektor fiktív pólusaival egybeejtünk.

Egy  $n$ -edfokú nem minimálfázisú hálózat átviteli függvénye a következőképpen írható fel:

$$H(p) = \frac{N(p)}{D_n(p)} = \frac{L_m(p)p^b M(p)}{D_n(p)}, \quad (1)$$

ahol  $L_m(p)$  képviseli a képzetes tengelyen az origón kívüli  $m$  darab átviteli zéruspárt,  $p^b$  jelenti az origóban lévő átviteli zérusokat sávszűrők esetén és  $M(p)$  képviseli a jobb félsíkon fekvő átviteli zérusokat. A  $H(p)$  átviteli függvény dekomponálásához a jobb félsíkbeli zérusok tükörképeként a bal félsíkon fiktív pólusokat és ezeket kiejtő zérusokat definiálunk. A fiktív minimálfázisú hálózat és a fiktív korrektor átviteli függvényeit a következőképpen vezethetjük be:

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{L_m(p)p^b M(p)}{D_n(p)} \cdot \frac{M(-p)}{M(-p)} = \\ &= \frac{L_m(p)p^b M(-p)}{D_n(p)} \cdot \frac{M(p)}{M(-p)} = \\ &= H_{MP}(p) \cdot H_C(p). \end{aligned} \quad (2)$$



1. ábra. Nem minimálfázisú szűrő dekompozíciója minimálfázisú hálózatra és mindentáteresztő korrektorra

$D_n(p)$ -vel közelítjük az áteresztősávi amplitúdót,  $L_m(p)$  és  $p^b$  a zárósávot alakítja ki és  $M(p)$ -vel korrigáljuk a fázist. A nevező fokszámából látszik, hogy az áteresztősávi amplitúdó-approximációhoz maximális számú szabadságfokot használunk fel.

Az 1. ábrán egy hetedfokú nem minimálfázisú szűrő dekompozíciója látható. A szűrő két zérusa a jobb félsíkon fekszik, így két fiktív része: egy másodfokú mindentáteresztő korrektor és egy hetedfokú minimálfázisú hálózat.

## 3. Az együttes approximáció algoritmus

A nem minimálfázisú szűrő dekompozíciója az együttes approximációt visszavezeti arra a problémára, hogy találjuk meg a szűrő két fiktív részét. A dekompozíciónak megfelelően az amplitúdó és a fázis approximációja elkülönül és felváltva végezhető.

Az  $n$ -edfokú nem minimálfázisú szűrő együttes approximációja öt lépésben történik.

### 1. lépés:

Az amplitúdó- és a fáziselőírásoknak megfelelően megválasztjuk a szűrő két fiktív részének fokszámát, azaz a korrekortét ( $n_C$ ) és a minimálfázisú hálózatét, amely egyenlő a nem minimálfázisú szűrő fokszámával ( $n_{MP} = n$ ). Az approximáció során maximális számú szabadságfokot használunk fel az áteresztősávi amplitúdó-közelítésre adott fokszám mellett.

### 2. lépés:

Az áteresztő- és zárósávi amplitúdó-előírásokat egy  $n_{MP}' = n_{MP} - n_C$  fokú minimálfázisú hálózattal elégítjük ki, amelynek csak képzetes zérusai vannak. Az amplitúdó közelítése során az a célunk, hogy a lehető legszélesebb áteresztősávot érjük el az adott fokszámú szűrővel. A minimálfázisú hálózat fáziskarakterisztikáját  $n_C$  fokú mindentáteresztő korrektorral korrigáljuk.

$$H_n(p) = H_{MP}(p) \cdot H_C(p) = \frac{L_m(p)p^b}{D_{MP}(p)} \cdot \frac{M(p)}{M(-p)} \quad (3)$$

### 3. lépés:

Az előző lépés minimálfázisú hálózatának fokszámát ( $n_{MP}'$ ) megnöveljük a korrektor fokszámával ( $n_C$ ), azaz a minimálfázisú hálózat fokszáma  $n_{MP} = n_{MP}' + n_C = n$  lesz.

### 4. lépés:

Az  $n_{MP}$  fokú minimálfázisú hálózat zérusait a képzetes tengelyen és a bal félsíkon írjuk elő, az előző fáziskorrekció eredményeként kapott korrektor pólusainak helyén. Az amplitúdó közelítésekor a képzetes tengelyen lévő zérusok a tengelyen vándorolnak, a bal félsíkon fekvők helye azonban kötött. Az áteresztő- és a zárósávi amplitúdó közelítését úgy végezzük, hogy az áteresztősáv a lehető legszélesebb legyen az adott fokszám mellett. Az áteresztősáv kiszélesedését már az első lépésben figyelembe vehetjük, amikor a mini-

málfázisú hálózat fokszámát megválasztjuk. A fázis-korrekciót ismét egy  $n_c$  fokú mindentátesztővel végezzük.

$$H_n(p) = H_{MP}(p) \cdot H_C(p) = \frac{L_m(p)p^b [M(-p)]_{\text{előző}}}{D_n(p)} \cdot \frac{[M(p)]_{\text{új}}}{[M(-p)]_{\text{új}}} \quad (4)$$

5. lépés:

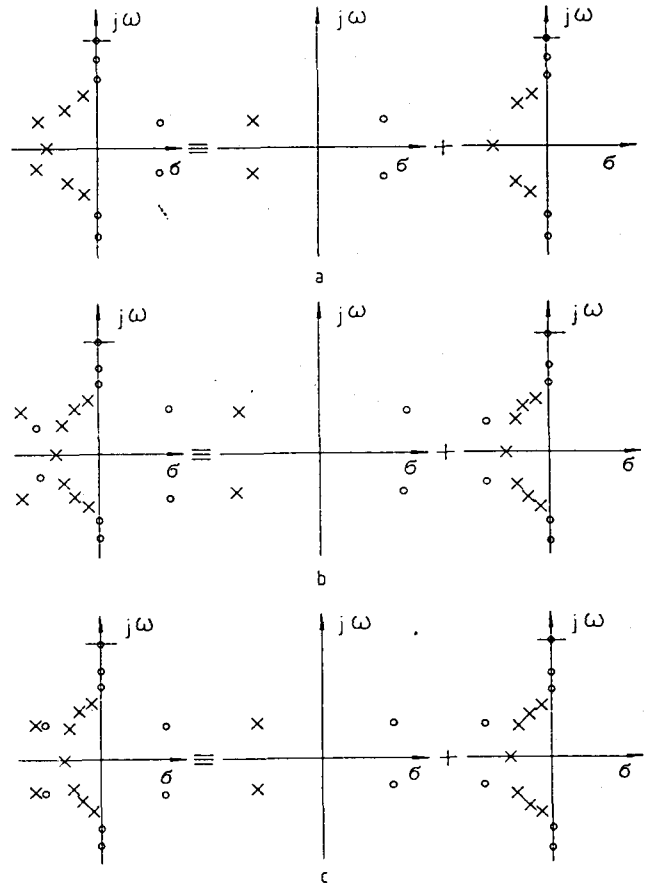
A minimálfázisú hálózat bal félsíkbeli zérusait és az új korrekter pólusait, azaz az  $[M(-p)]_{\text{előző}}$  és  $[M(-p)]_{\text{új}}$  polinomokat összehasonlítjuk. Ha egy adott hibahatáron belül nem egyeznek meg, akkor az approximációt a 4. lépéstől folytatjuk. Ha megegyeznek, akkor a minimálfázisú hálózat bal félsíkbeli zérusai és a korrekter pólusai kiejtik egymást, és a nem minimálfázisú szűrő két fiktív részét megtaláltuk.

A fenti algoritmusban mind az amplitúdó, mind a fázis közelítése tetszőleges technikával végezhető. Fontos azonban, hogy az amplitúdót úgy közelítsük, hogy a lehető legszélesebb áteresztősávot kapjuk. Az áteresztősáv kiszélesedésének eredményeként a fázis-hiba a specifikált áteresztősávban kisebb lesz, így egyszerűbb korrekterrel is kielégíthetők a fáziselőírások. Munkánkban mind az amplitúdó, mind a fázis közelítésére interpolációs technikát alkalmaztunk.

Az amplitúdó és a fázis közelítést felváltva végezzük, így paramétereik elválnak egymástól s a tervező egyszerűbb problémával kerül szembe, mint abban az esetben, amikor valamennyi paramétert együtt kell beállítani. A megoldott feladatok tapasztalatai alapján a szűrő stabilitását és az amplitúdó-karakterisztika átmeneti sávbéli monotonitását a módszer biztosítja lineáris fázis közelítése esetén, és a konvergencia-problémák is könnyebben kezelhetők, mint más együttes algoritmusokban.

A 2. ábrán egy hetedfokú nem minimálfázisú szűrő pólusait és zérusait ábrázoltuk az algoritmus második és negyedik lépésében, valamint az approximáció végén. Az első lépésben a hetedfokú nem minimálfázisú szűrőt felbontottuk egy másodfokú korrekterra és egy hetedfokú minimálfázisú hálózatra. A második lépésben (a) az amplitúdó-előírásokat egy ötödfokú minimálfázisú hálózattal, a fáziselőírásokat egy másodfokú korrekterrel elégitettük ki. A harmadik lépésben a minimálfázisú hálózat fokszámát hétre növeltük. Zérusait a képzetes tengelyen és a korrekter pólusainak helyén a bal félsíkon írtuk elő. A negyedik lépésben (b) a minimálfázisú hálózat zérusai és a korrekter pólusai nem ejtik ki egymást. Az algoritmus végén (c) a minimálfázisú hálózat zérusai és a korrekter pólusai megegyeznek egy adott hibahatáron belül.

A hagyományos módszerrel (minimálfázisú hálózat + mindentátesztő korrekter) összehasonlítva az együttes approximáció merőben más, mert az amplitúdó közelítésére használható szabadságfokok száma nagyobb, mint az azonos fokszámú hagyományos approximációban. A fázis közelítésekor az amplitúdó-karakterisztika nem változik.



H-597-2

2. ábra. Hetedfokú nem minimálfázisú hálózatnak és fiktív részének pólus-zérus elrendezése  
a - második lépés, b - negyedik lépés, c - az approximáció eredménye

Az együttes approximáció hatékonysága kétféleképpen használható ki. Egyrészt a szűrő fokszáma csökken, azaz az amplitúdó- és a fáziselőírások kisebb fokszámú szűrővel is kielégíthetők, mint a hagyományos módon. Másrészt ugyanolyan fokszámú szűrővel kisebb fázisingadozás érhető el.

#### 4. Az amplitúdó-karakterisztika approximációja

Az amplitúdó-karakterisztika approximációjának klasszikus eseteit az irodalomból jól ismerjük. A mi esetünkben az amplitúdót kötött bal félsíkbeli zérusok figyelembevételével kell közelíteni. Munkánkban ezt a problémát interpolációs módszerrel oldjuk meg [10, 11], amelyet a Remez-algoritmussal kombinálunk. Az áteresztő- és a zárósáv interpolációját külön végezzük. Az amplitúdókövetelményeket mindkét sávban tetszőleges függvényekkel írhatjuk elő. Az áteresztősávi amplitúdó-karakterisztikára magasabb deriváltakat is előírhatunk.

##### 4. 1. Az áteresztősáv interpolációja

Az amplitúdó-karakterisztikát egy  $\nu_i$  frekvenciasorozaton interpoláljuk.  $\omega_i$  ( $i=0,1,\dots,r+1$ ) jelöli azokat a

frekvenciákat, amelyeken az amplitúdót vagy deriváltjait előírtuk. Összesen  $n = r + \sum m_i$  számú követelményt írhatunk elő, ahol  $r$  az amplitúdóelőírások száma,  $m_i$  pedig az  $\omega_i$  frekvencián az előírt deriváltak száma. A  $\nu_1$  frekvenciasorozatot az  $\omega_i$  frekvenciákból képezzük.  $\nu_1$  minden frekvenciát  $(1+m_i)$ -szer tartalmaz, a frekvenciák sorrendje pedig tetszőleges. A specifikációt az  $F(p)/G(p)$  törtfüggvény hordozza, ahol  $F(p)$ -nek és  $G(p)$ -nek nincs közös zérusa,  $G(j\nu_i) \neq 0$ , és  $F(p)$  és  $G(p)$  a  $\nu_1$  sorozatnak megfelelő számú deriválttal rendelkezik, egyébként tetszőleges függvények. Az  $F(p)/G(p)$  amplitúdó-karakterisztikáját a  $H(p) = N(p)/D(p)$  átviteli függvény amplitúdó-karakterisztikája interpolálja a  $\nu_1$  frekvenciasorozatban. A továbbiakban a következő jelölést fogjuk alkalmazni:  $\tilde{A}(p) = A(p)A(-p)$   $p$ -nek bármely függvényére.

Az áteresztősáv approximációja a következő egyenlettel írható le:

$$\frac{\tilde{N}(p)}{\tilde{D}_n(p)} = \frac{\tilde{F}(p)}{\tilde{G}_p} + \frac{W_n(p)}{\tilde{D}_n(p)\tilde{G}_p} \prod_{i=1}^{n+1} (p^2 + \nu_i^2), \quad n \geq 0, \quad (5)$$

ahol  $D_n(p)$ -t keressük,  $(n+1)$  az előírások száma és  $W_n(p)$  egy páros hibafüggvény, amelynek nincsenek pólusai az előírt frekvenciákon.  $N_n(p)$  rögzített az áteresztősáv közelítése során, mert a bal félsíkbeli fiktív zérusokból és a képzetes tengelyen fekvő zérusokból áll, amelyek helyét egy másik iterációs lépésben határozzuk meg. A fenti egyenlet lineáris problémára redukálható és az általánosított Newton-interpolációs formulába írható:

$$\tilde{D}_n(p) = \prod_{m=0}^n \lambda_m \prod_{i=1}^m (p^2 + \nu_i^2). \quad (6)$$

A  $\lambda_m$  és  $W_n(p)$  sorozatokat  $n$  szerinti rekurzióval számolhatjuk [10].

$\tilde{D}_n(p)$  ismeretében Hurwitz-faktorizációval kapunk stabil  $D_n(p)$ -t [13].

#### 4.2. A zárósáv interpolációja

A zárósáv, azaz a csillapításkarakterisztika approximációja során rögzített  $D_n(p)$  és  $M(p)$  mellett az  $L_m(p)$ -t kell meghatározni úgy, hogy a  $|H(j\omega)|$  egyezzen meg az  $|F(j\omega)/G(j\omega)|$ -kel az  $\omega_i$  helyeken ( $i=1,2,\dots,m+1$ ).

A feladat az

$$L_m(p) = a_m (-1)^i \sqrt{\frac{\tilde{D}(p)\tilde{F}(p)}{\tilde{M}(p)\tilde{G}(p)(p^b)}} + Z_m(p) \prod_{i=1}^{m+1} (p^2 + \omega_i^2) \quad (7)$$

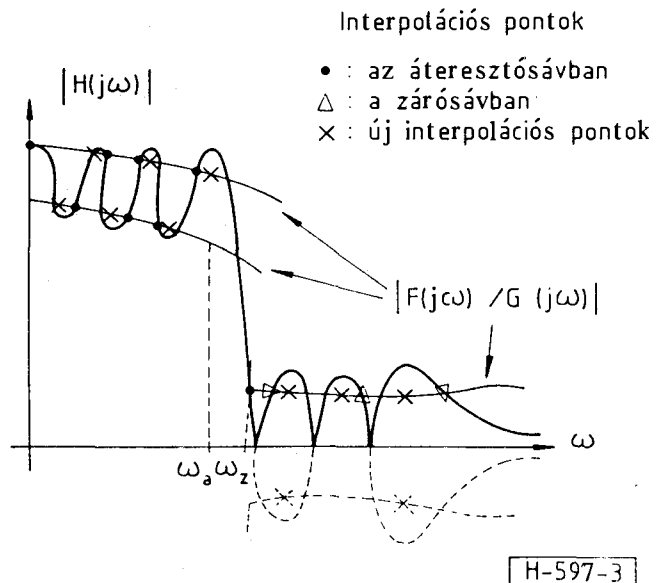
lineáris egyenlet megoldása  $L_m(p)$ -re és  $a_m$ -re, ahol  $L_m(p)$   $2m$ -edfokú, egységnyi vezető együtthatójú páros polinom,  $Z_m(p)$  tetszőleges páros hibafüggvény úgy, hogy  $1/Z_m(j\omega) \neq 0$  és  $a_m$  az amplitúdó értéke a zárósáv kezdőpontjában. A problémának ez a felírása garantálja, hogy  $L_m(p)$   $m$  különböző képzetes gyökpárból

áll. Sáváteresztő szűrő esetén a  $b$  és  $m$  paramétereket úgy kell választani, hogy a szűrő minél szimmetrikusabb legyen [14].

Az  $L_m(p)$  polinom és  $a_m$  rekurziós formulával számolható [10].

Mint hangsúlyoztuk az együttes approximáció ismertetésekor, az amplitúdó közelítése során a lehető legszélesebb áteresztősávot szeretnénk elérni. Ezért az interpoláció eredményét,  $a_m$ -t megszorozzuk  $a_{el\ddot{o}rt}/a_m$ -mel. Így a zárósáv nincs túlteljesítve és az áteresztősáv kiszélesedik, ami a fázis közelítésekor igen előnyös.

Egy  $n$ -edfokú aluláteresztő szűrő esetén  $n$  paramétert használunk az áteresztősáv közelítésére és egyet a zárósáv határára. Az interpolációs pontokat mindkét sávban a 3. ábrán tüntettük fel. Érdeemes megjegyezni, hogy az algoritmusban a véges képzetes zérusok száma tetszőleges.



3. ábra. Mindkét sávban egyenletes ingadozású szűrő interpolációs pontjai

Az amplitúdó- és csillapításkarakterisztika együttes approximációja során aluláteresztő esetben az áteresztősávban  $n$  frekvenciát osztunk ki, az  $(n+1)$ -dik a zárósáv határa. A zárósávban  $m$  szabadságfok áll rendelkezésünkre. Az  $n$  darab frekvencia maximálisan lapos amplitúdóapproximáció esetén az origó, hiszen előírjuk az amplitúdót és  $(n-1)$  deriváltját  $\omega=0$ -ban. Egyenletes ingadozású amplitúdóapproximáció esetén  $n$  darab amplitúdóértéket írunk elő az áteresztősávban, ez  $n$  darab frekvenciát jelent. Sávszűrő esetben a két zárósávot külön kezeljük. Hasonlóan járunk el, mint aluláteresztő esetben, csak az  $\omega=0$  frekvencia helyére a sávközépi frekvencia lép.

#### 4.3. Iteratív approximáció

Egyenletes approximáció esetén az áteresztő- és a zárósávot a Remez-algoritmus köti össze iteratív módon [16], az új interpolációs pontokat az előírás és  $|H(j\omega)|$

maximális eltérésének helyén választjuk. A Remez-algoritmus kezdőpontjait az úgynevezett Csebisev- és inverz Csebisev-frekvenciákon érdemes választani.

Az amplitúdó approximációjakor először az átviteli zérusokat írjuk elő. Ezek a zérusok meghatározzák a számlálót,  $N(p)$ -t, és a nevező,  $D(p)$  interpolációja következik. Ekkor a nevező ismeretében a számláló interpolációja következik, stb. Az iteratív interpolációt addig végezzük, amíg az együtthatók alig változnak.

## 5. Fázisapproximáció

Az együttes approximációs algoritmusban használt fázisapproximációs módszer tetszőleges fázis közelítésére alkalmas [18]. Legyen  $\varphi_s(\omega)$  az előírt fáziskarakterisztika,  $\varphi_H(\omega)$  a korrigálandó fáziskarakterisztika és  $2\varphi(\omega)$  a mindentáteresztő korrekter fáziskarakterisztikája. Minden fáziskarakterisztikát úgy értelmezzük, hogy az az átviteli függvény reciprokához tartozik, így a futásidő egyszerűen a fázis deriváltja. A korrekterpolinom tervezéséhez előírt fázis és futásidő

$$\varphi(\omega) = 1/2[\varphi_s(\omega) - \varphi_H(\omega)], \quad (8)$$

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}, \quad (9)$$

$$\tau(\omega) = 1/2[\tau_s(\omega) - \tau_H(\omega)],$$

$$\varphi(\omega_c) = 1/2[\varphi_s(\omega_c) - \varphi_H(\omega_c)], \quad (10)$$

ahol  $\omega_c$  az átteresztősáv sávközépi frekvenciája.  $\tau_s(\omega)$  az előírt futásidő karakterisztika,  $\tau_H(\omega)$  a korrigálandó futásidő,  $2\tau(\omega)$  pedig a korrekter futásidője. Egyszerűség kedvéért a korrekter fokszámát a továbbiakban  $n$ -nel jelöljük ( $=n_c$ ).

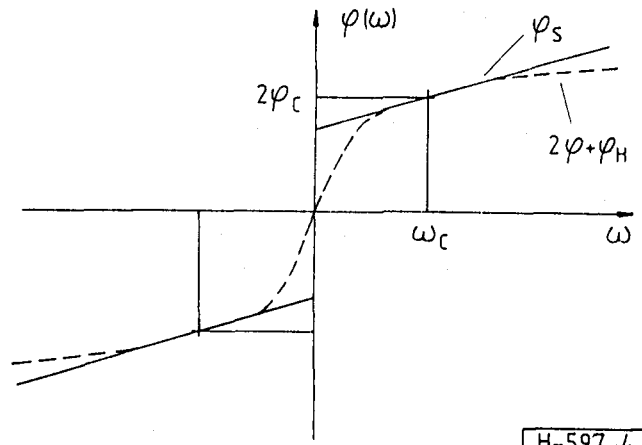
A koncentrált paraméterű szűrő tervezésekor lineáris fázis előírása esetén  $\varphi_s(\omega)$ -t a következőképpen írjuk elő:

$$\varphi_s(\omega) = 2\{(\varphi_c - \omega_c T)\text{sign}\omega + \omega T\}, \quad (11)$$

$$\tau_s(\omega) = 2T, \quad \varphi_s(\omega_c) = 2\varphi_c, \quad (12)$$

ahol  $\varphi_c$  a sávközépi fázistolás és  $T$  a késleltetés. Sávátteresztő szűrőkre  $\varphi_c$  és  $T$  szabad paraméterek, míg szélessávú sávszűrőkre  $\varphi_c \approx \omega_c T$ , aluláteresztőkre pedig  $\varphi_c = 0$ ,  $\omega_c = 0$ . A 4. ábrán az előírt lineáris fáziskarakterisztikát [17] és egy azt közelítő fáziskarakterisztikát rajzoltunk fel.

Mintavételezett szűrő esetén a fázisapproximációra két lehetőség kínálkozik. Egyrészt közvetlenül a  $z$ -tartományban is elvégezhetjük, ahol  $z = \exp(j\Omega T_s)$  és  $T_s$  a mintavételi periódusidő. Másrészt az előírásokat a bilineáris transzformációval az  $\omega$  referenciakérfrekvencia-tartományba transzformálhatjuk és a közelítést ott elvégezve az eredményeket bilineáris transzformációval



4. ábra. Előírt lineáris és azt közelítő fáziskarakterisztika

visszatranszformáljuk. A bilineáris transzformáció szerint

$$p = \frac{z-1}{z+1}, \quad \omega = \text{tg} \frac{\omega T_s}{2}, \quad (13)$$

az előírt fázis- és futásidő-karakterisztika ( $\varphi_s'(\Omega)$  és  $\tau_s'(\Omega)$ ) a referenciakérfrekvencia-tartományban

$$\varphi_s(\omega) = \varphi_s' \left( \frac{2}{T_s} \arctg \omega \right), \quad (14)$$

$$\tau_s(\omega) = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1}{1+\omega^2} \tau_s' \left( \frac{2}{T_s} \arctg \omega \right). \quad (15)$$

A  $\varphi_s'(\Omega)$  és  $\tau_s'(\Omega)$  jelöléseket úgy választottuk, hogy a referencia-tartományban megegyezzenek a koncentrált paraméterű eset jelöléseivel, hogy mindkét esetben azonos jelölésekkel dolgozhassunk.

Ha mintavételezett esetben lineáris fázist írunk elő, akkor

$$\varphi_c(\omega) = 2\left\{(\varphi_c - \frac{2T}{T_s} \arctg \omega_c)\text{sign}\omega + \frac{2T}{T_s} \arctg \omega\right\}, \quad (16)$$

$$\tau_c(\omega) = 2 \frac{2T}{T_s} \frac{1}{1+\omega^2}, \quad \varphi_c(\omega_c) = 2\varphi_c, \quad (17)$$

ahol  $\omega_c = \text{tg}(\Omega_c T_s/2)$ . Szélessávú sávszűrőre  $\varphi_c \approx 2T/T_s \arctg \omega_c$  és aluláteresztőre  $\varphi_c = 0$ ,  $\omega_c = 0$ .

A fázisapproximációt ebben a munkában aluláteresztő és sávátteresztő szűrőkre maximálisan lapos és egyenletes ingadozású esetre tárgyaljuk. Ezeket a problémákat korábban speciális esetekre oldották meg [18].

Adott  $\varphi_H(\omega)$  és  $T_s$  mellett a mintavételezett esetben  $T$  értékének növelésével  $\varphi(\omega)$  mind közelebb kerül a lineáris fáziskarakterisztikához, amely biztosan stabil a koncentrált paraméterű aluláteresztő esetben és  $\varphi_c$  és  $T$  megfelelő választásával stabil a koncentrált paraméterű sávszűrő esetén [20, 23], míg a mintavételezett

aluláteresztő esetben akkor stabil, ha  $2T/T_s \geq n-1$ , ahol  $n$  a korrektor fokszáma [19]. Ez azt jelenti, hogy adott  $n$ -re a stabilitás  $T$  elegendően nagy értékre történő választásával biztosítható.

A fentiekben vázolt problémát, az előírt fázis közelítését interpolációs technikával oldjuk meg [10,11]. Az előírt fázist közelítő  $n$ -edfokú  $P_n(p)$  polinomot rekurziós formulával határozhatjuk meg:

$$P_0(p) = 1, \quad P_1(p) = \alpha_0 + p, \quad (18)$$

$$P_{n+1}(p) = \alpha_n P_n(p) + (p^2 + \nu_n^2) P_{n-1}(p) \quad n \geq 1, \quad (19)$$

ahol  $1/\alpha_n \neq 0$ ,  $0 \leq n-1$ , és az  $\alpha_n$  sorozatot rekurzióval határozzuk meg az előírásokból,  $\nu_n$  pedig az előírt frekvenciapontokat jelenti [18]. Egy-egy  $\alpha_n$  sorozathoz egy-egy előírás tartozik, azaz az előírástól függően más-más tulajdonságú  $\alpha_n$  sorozatot kapunk, amelyek a közelítés paramétereinek függvényei.

Fáziskorrekciónál általában az előírható fázisfeltételek száma megegyezik a korrekció fokszámával. Elfajuló esetben azonban további feltételek adódnak, ezeket a szabad paraméterekkel kell megkeresnünk.

Maximálisan lapos közelítés esetén az a feladat, hogy olyan  $P_n(p)$  polinomot képezzünk, amelynek fázisértékeit és a fázis deriváltjait aluláteresztő szűrő esetén az origóban, sávszűrő esetén a sávközépi frekvencián írjuk elő [20, 21]. A közelítés szabad paramétereit aluláteresztőre a  $T$  késleltetés, sávszűrőre a  $T$  késleltetés és a  $\varphi_c$  sávközépi fázistolás. Ezeket a paramétereket kell úgy megválasztani, hogy elfajuló, stabil megoldásra jussunk. Azt a pontot, ahol az elfajulás bekövetkezik, kritikus pontnak nevezzük. A kritikus pontot az  $\alpha_n(T, \varphi_c)$  sorozat vizsgálatával keressük meg. A kritikus pont definícióját és a megkeresésére szolgáló algoritmust a [11, 25] irodalmak tartalmazzák. Kritikus pont mindig található és ez a megoldás egyben stabil is. A kritikus pontban az előírt fázist közelítő  $P_n(p)$  polinom felveszi a  $P_{n+1}(p)$  polinom tulajdonságait, ugyanis  $P_{n+1}(p)$  degenerálttá válik és  $(n+1)$ -edfokú közelítést valósít meg [22].

Egyenletes közelítés esetén olyan  $P_n(p)$  polinomot kell találni, amelynek fázisértékeit és a fázis deriváltjait adott frekvenciákon előírtuk, az origóban pedig zérus a fázisa. A közelítés szabad paramétereit úgy kell megválasztanunk, hogy stabil és egyenletes ingadozású fáziskarakterisztikát kapjunk. Az egyenletes közelítés paramétereit: a  $T$  késleltetés, az előírt frekvenciapontok és sávszűrő esetén a  $\varphi_c$  sávközépi fázistolás. A maximálisan lapos közelítéshez hasonlóan a közelítés rendje egyenletes esetben is növelhető, ugyanis  $n$ -edfokú közelítés esetén azon pontok száma, amelyekben pontosan kielégítjük az előírásokat, nagyobb vagy egyenlő, mint  $(n+1)$ . Az egyenletes közelítés lényeges része a paraméterek kezdőértékének megválasztása. A frekvenciapontokat a sávszélek felé sűrűsödő módon kell választani, a sávközépi fázistolást pedig a  $0-\pi$  tartományban úgy, hogy a közelítés minél szimmetriku-

sabb legyen a sávközépi frekvenciára. A késleltetés kezdőértékét az együttes approximációs algoritmus második lépésében úgy választjuk meg, hogy elvégezzük az előírt fázis maximálisan lapos közelítését és az abból adódó optimális késleltetés lesz az egyenletes közelítés kezdőértéke. Az együttes approximációs algoritmus negyedik lépésében a késleltetés kezdőértéke az előző korrekció eredményeként kapott késleltetés értéke. Az egyenletes közelítés algoritmus a [11, 25] irodalmakban található.

## 6. Stabilitás és konvergencia

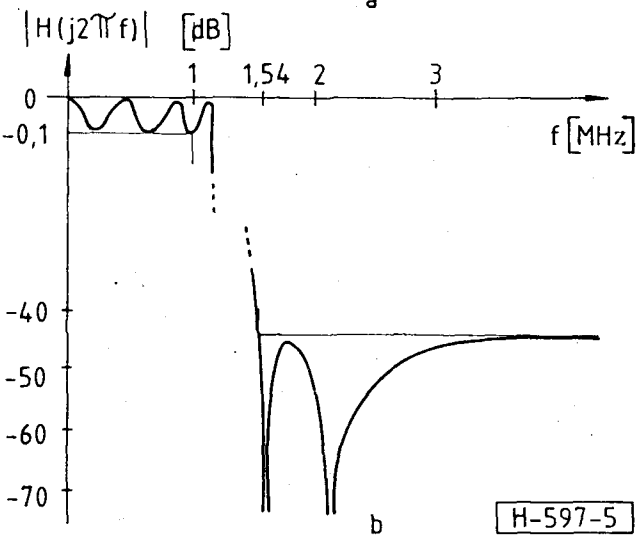
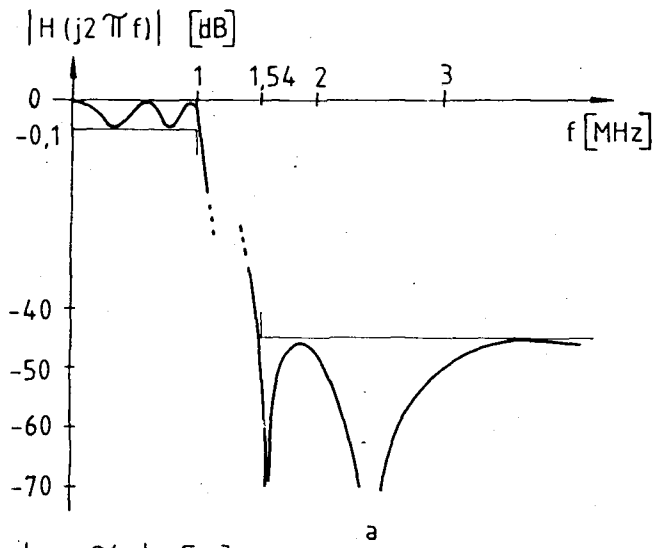
A koncentrált paraméterű és mintavételezett szűrők általunk javasolt együttes amplitúdó- és fázisapproximációja mindig stabil megoldásra vezet, amely monoton az átmeneti sávban, ha fázisa lineáris az áteresztősávban. Mivel a maximális számú szabadságfokot kötjük le a amplitúdó közelítésére az áteresztősávban, a szűrő két fiktív részre bontható. A két rész stabilitása garantálható. A minimálfázisú rész stabil, mert az amplitúdó közelítésének eredményeként kapott  $H(p)H(-p)$  polinomból a  $H(p)$  polinomot Hurwitz-faktorizációval határozzuk meg [13]. A korrektor stabilitását a fázisapproximációs algoritmus paramétereinek megfelelő választásával garantáljuk.

Az approximáció központi kérdése az algoritmus konvergenciája. Ez igen bonyolult kérdés. Köztudott, hogy a Remez-algoritmus konvergenciáját sem sikerült racionális törtfüggvényekre bizonyítani, pedig ez az algoritmus egyszerű amplitúdó-approximációt old meg. Tudjuk azt is, hogy az algoritmus konvergál, ha jó kezdőértékből indítjuk. Mindkét sávban egyenletes közelítésű szűrő esetén a Remez-algoritmus az együttes közelítés részét képezi. Minezek ismeretében az algoritmus konvergenciáját példákön vizsgáltuk. Különböző előírású szűrőket tervezve azt tapasztaltuk, hogy a megoldás mindig konvergens volt és a megoldást néhány lépésen belül megtaláltuk.

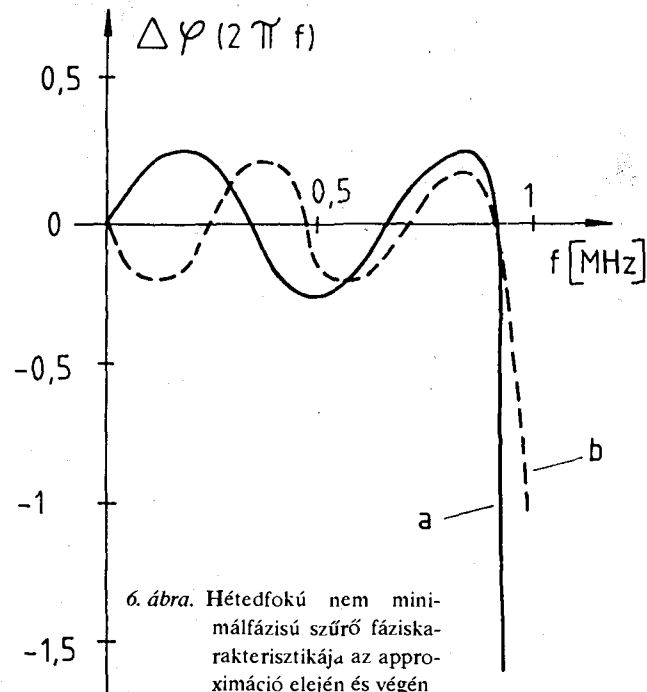
## 7. Alkalmazások

### 7.1. Hetedfokú aluláteresztő tervezése hagyományos koncepció szerint és együttes approximációval

Egy hetedfokú nem minimálfázisú aluláteresztő szűrőt approximálunk. A fáziskorrekciónál másodfokú fiktív korrektorral végezzük. Az amplitúdó-előírásokat az 5. ábrán adtuk meg. Az a) ábrán az algoritmus második lépésének amplitúdóközelítése, azaz a hagyományos koncepció szerinti amplitúdó-approximáció eredménye látható, a b) ábrán pedig az eredményül kapott szűrő amplitúdó-karakterisztikája. Az áteresztősáv kiszélesedése szembeutó. A 6. ábrán az első (a) és az utolsó (b) korrekció fázishibáját adtuk meg,  $\{\Delta\varphi(\omega) = \varphi_s(\omega) - (\varphi_H(\omega) + 2\varphi(\omega))\}$ . A fázist egyenletesen

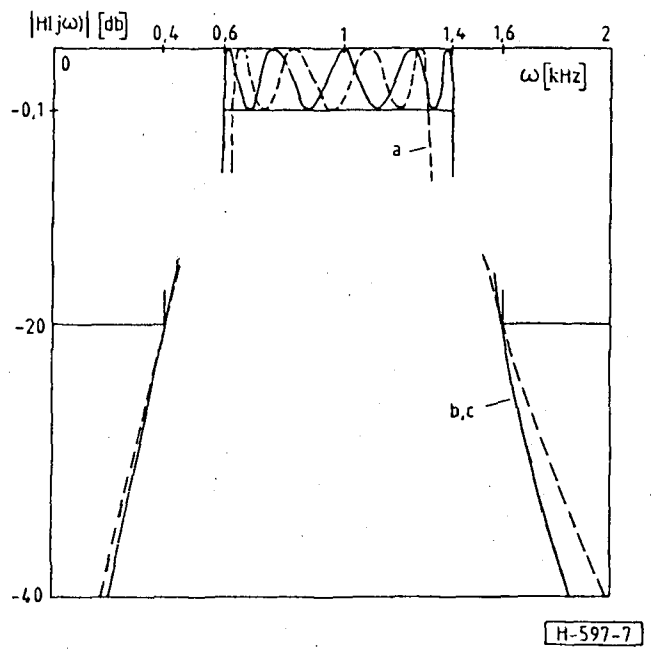


5. ábra. Hetedfokú nem minimálfázisú szűrő amplitúdó-karakterisztikája az approximáció elején és végén

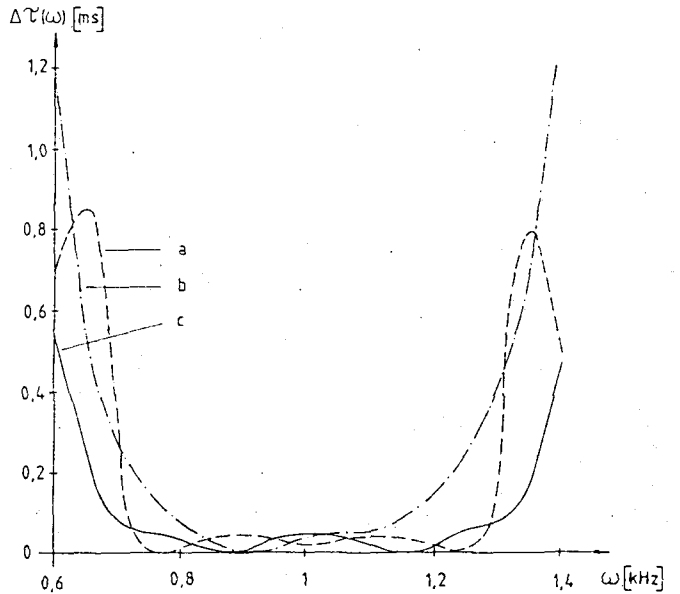


6. ábra. Hetedfokú nem minimálfázisú szűrő fáziskarakterisztikája az approximáció elején és végén

H-597-6

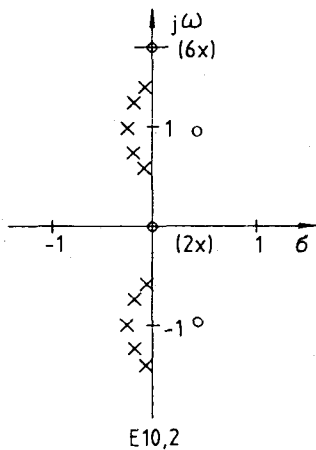
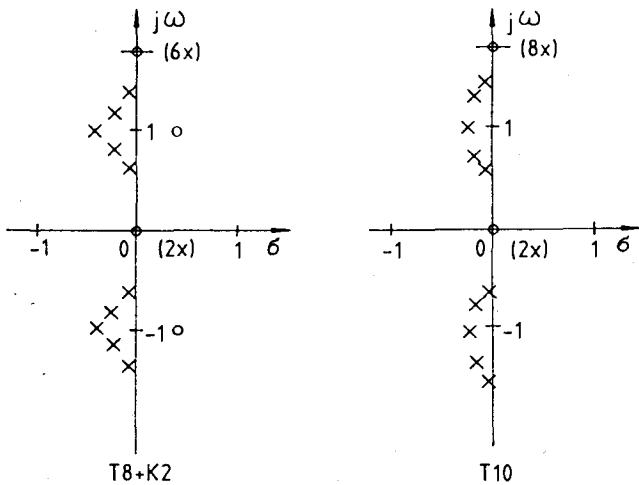


7. ábra. Tizedfokú sávszűrők amplitúdó-karakterisztikája  
*a* - nyolcadfokú minimálfázisú hálózat + másodfokú korrektor,  
*b* - tizedfokú minimálfázisú hálózat,  
*c* - tizedfokú nem minimálfázisú hálózat, az együttes approximáció eredménye



8. ábra. Tizedfokú sávszűrők futásidő-karakterisztikája  
*a* - nyolcadfokú minimálfázisú hálózat + másodfokú korrektor  
*b* - tizedfokú minimálfázisú hálózat,  
*c* - tizedfokú nem minimálfázisú hálózat, az együttes approximáció eredménye

közelítettük. A példa az együttes approximáció egyik előnyére világít rá, ugyanis ugyanolyan fokszámú szűrővel jobb fázishiba-karakterisztikát, azaz a sávszélen kisebb ingadozást kaptunk.

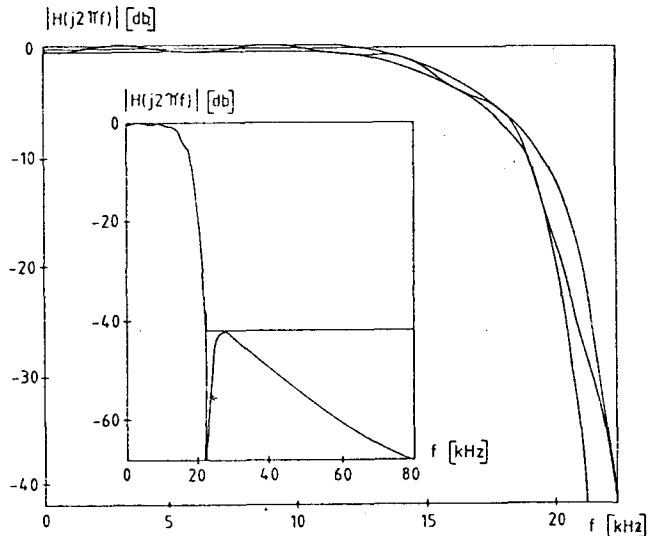


H-597-9

9. ábra. Tizedfokú sávszűrők pólus-zérus elrendezése  
 a - nyolcadfokú minimálfázisú hálózat + másodfokú korrektor  
 b - tizedfokú minimálfázisú hálózat  
 c - tizedfokú nem minimálfázisú hálózat, az együttes approximáció eredménye

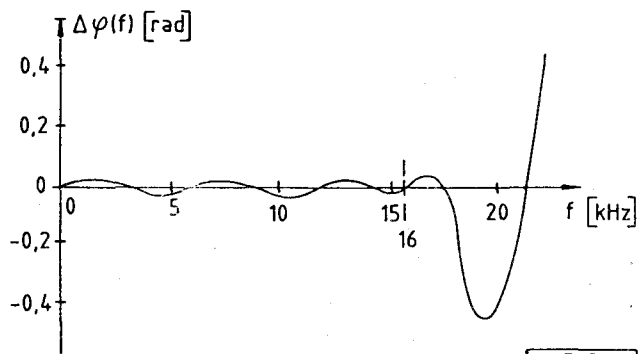
### 7. 2. Szélessávú sávszűrő tervezése

Második példaként három különböző tizedfokú sávszűrőt hasonlítunk össze: egy nyolcadfokú minimálfázisú hálózatot másodfokú korrekterrel kiegészítve, egy tizedfokú minimálfázisú hálózatot és egy együttes approximációval tervezett tizedfokú nem minimálfázisú hálózatot, amely másodfokú korrekciót valósít meg. Mindhárom esetben úgy választottuk meg az origóban fekvő zérusok számát, hogy a legszimmetrikusabb megoldást kapjuk [14]. A 7. ábrán az amplitúdó-karakteristikákat, a 8. ábrán a futásidő-karakteristikákat, a 9. ábrán pedig a szűrők pólusait és zérusait ábrázoltuk. Az a) és c) esetben a késleltetés 2msec, a sávközepi fázistolás 1.42rad volt. Az a) esetben az amplitúdó-követelményeket sértettük meg, a b) esetben pedig a futásidő ingadozása igen nagy. A tizedfokú nem minimálfázisú hálózat (c eset) teljesíti az amplitúdó-követelményeket és futásidő-ingadozása a sávszélek felé haladva jobb, mint a másik két esetben.



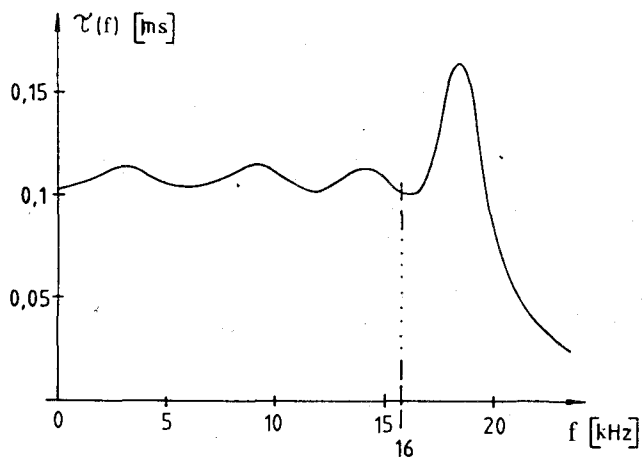
H-597-10

10. ábra. Nyolcadfokú nem minimálfázisú demodulátorszűrő amplitúdó-karakteristikája



H-597-11

11. ábra. Nyolcadfokú nem minimálfázisú demodulátorszűrő fázis-karakteristikája



H-597-12

12. ábra. Nyolcadfokú nem minimálfázisú demodulátorszűrő futásidő-karakteristikája



### 7.3. Adatátviteli szűrő tervezése

A harmadik példa azt mutatja be, hogyan csökkenthető a szűrő fokszáma, ha az előírásokat a fenti módszerrel tervezett nem minimálfázisú szűrővel elégítjük ki. A koncentrált paraméterű aluláteresztő adatátviteli szűrő amplitúdó-karakterisztikája az egész frekvenciatengelyen előírt, még az átmeneti sávban is. Az áteresztősávi amplitúdó-ingadozás 0.5dB, a zárósávi csillapítás 42dB volt. A zárósáv határa 22.5kHz. A szűrőt először hagyományos módon terveztük meg: egy hatodfokú minimálfázisú hálózattal elégítettük ki az amplitúdó-előírásokat, egy zéruspárt írtunk elő a képzetes tengelyen, és harmadfokú korrekttorral korrigáltuk a fázist. Ily módon 7 fokos fázisingadozást és 13 $\mu$ s futásidő-ingadozást értünk el az adatátviteli Nyquist-frekvenciájáig (16kHz) 100 $\mu$ s késleltetés beállításával. Az együttes módszerrel approximálva a követelményeket egy nyolcadfokú szűrővel elégítettük ki, amelynek három zérusa a jobb félsíkon, egy zéruspárja pedig a képzetes tengelyen helyezkedik el (10. ábra). A késleltetés 108 $\mu$ s, a maximális fázisingadozás a Nyquist-frekvencia alatt 4 fok (0.07 rad), a futásidő-ingadozás pedig 15 $\mu$ s volt (11. és 12. ábra)

1. táblázat

	Hagyományos közelítés	Együttes approximáció
Késleltetés	100 $\mu$ s	108 $\mu$ s
Fázisingadozás	7 fok	4 fok
Futásidő-ingadozás	13 $\mu$ s	15 $\mu$ s

### Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak dr. Radványi Andrásnak (MTA SZTAKI) a témában adott tanácsaiért és Csikós Zsuzsának a rajzok elkészítéséért.

### IRODALOM

[1] S. O. Scanlan, H. Baher: 'Filters with Maximally-Flat Amplitude and Controlled Delay Responses', IEEE Cas-23, May 1976, pp. 270-278.  
 [2] P. Jarry, Y. Garrault, M. Clapeau: 'Generalized Linear Phase Polynomials - Application in Filter Synthesis', Int. J. CTA, Vol. 4, October 1976, pp. 381-389.  
 [3] J. D. Rhodes: Theory of Electrical Filters, Wiley and Sons, London, 1976.  
 [4] H. Baher: Synthesis of Electrical Networks, Wiley and Sons, Chichester, 1984.  
 [5] J. D. Rodes, I. H. Zabalawi: 'Selective Linear Phase Filters Possessing a Pair of j-Axis Transmission Zeros', Int. J. CTA, Vol. 10, July 1982, pp. 251-263.

[6] C. J. Wellekens, A. N. Godard: 'Simultaneous Fiat Approximations of the Ideal Low-Pass Attenuation and Delay for Recursive Digital, Distributed and Lumped Filters', IEEE CAS-24, May 1977, pp. 221-230.  
 [7] M. F. Fahmy: 'The Use of Padé Approximants in the Derivation of Distributed Low-Pass Filters with Simultaneous Fiat Amplitude and Delay Characteristics', Int. J. CTA, Vol. 8, July 1980, pp. 197-204.  
 [8] P. Thajchayapong, P. Karnchanawadee, F. Cheevasuvit: 'A Recursive Digital Filter with Simultaneous Maximally-Flat Magnitude and Group Delay at an Arbitrarily Specified Frequency', Proc IEEE 67, May 1979, pp. 871-873.  
 [9] J. H. Zabalawi: 'Design of Flat-Group Delay IIR Filters with Prescribed Amplitude Characteristics, Proc. ISCAS' 88, Espo, Finland, pp. 2493-2496.  
 [10] Henk T.: 'Szűrőapproximáció interpolációs eljárásokkal', Kandidátusi értekezés, Budapest, 1984.  
 [11] Földváriné Orosz J.: 'Nemreciprok és polifázisú szűrők approximációja interpolációs eljárásokkal', Kandidátusi értekezés, Budapest, 1989.  
 [12] A. Ralston: A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, Inc., 1965.  
 [13] R. Unbehauen: 'Ein Verfahren zur Hurwitz-Faktorisierung eines Polynoms', Archiv für Elektronische Übertragungstechnik, Band 13, Heft 2, 1959, pp. 58-62.  
 [14] A. Baranyi: 'Sávszűrők disszipatív csillapítása', TKI Közlemények, XV, 1970. 1. szám, 9-36. o.  
 [15] F. Leeb, T. Henk: Simultaneous Amplitude and Phase Approximation for Digital FIR-Filters, Proc. ISCAS, 1988, Espo, Finland, pp. 61-64.  
 [16] G. C. Temes, J. A. Bingham: 'Iterative Chebyshev Approximation Technique for Network Synthesis', IEEE CT-14, March 1967, pp. 31-37.  
 [17] A. Fettweis: 'On the Significance of Group Delay in Communication Engineering', Archiv für Elektronische Übertragungstechnik, Band 31, Heft 9, 1977, pp. 342-348.  
 [18] T. Henk: 'The Generation of Arbitrary-Phase Polynomials by Recurrence Formulae', Int. J. CTA, October 1981, pp. 461-478.  
 [19] T. A. Abele: 'Transmission Line Filters Approximating a Constant Group Delay in a Maximally-Flat Sense', IEEE CT-14, September 1967, pp. 298-306.  
 [20] T. Henk: 'New Algorithm for Maximally-Flat Band-Pass Delay Approximations', Proc. ISCAS' 82, pp. 1123-1126.  
 [21] T. Henk: 'New Algorithm for Maximally-Flat Low-Pass Delay Approximations', Proc. ECCTD' 85, pp. 658-661.  
 [22] B. D. Rakovich, D. M. Rabrenovich: 'Method of Synthesis of Phase-Correcting Networks', Proc. IEE 115, January 1968, pp. 57-67.  
 [23] T. Henk: 'New Criteria for the Hurwitz Test of Polynomials', Proc. ECCTD' 81, pp. 449-452.  
 [24] J. Földvári-Orosz, T. Henk, E. Simonyi: 'Simultaneous Amplitude and Phase Approximation of Lumped and IIR Filters', Proc. of the ISCAS' 88, Espo, Finland, pp. 2501-2504.  
 [25] J. Földvári-Orosz, T. Henk, E. Simonyi: 'Simultaneous Amplitude and Phase Approximation of Lumped and IIR Filters', Int. J. CTA, megjelenés alatt.