

A két- és többdimenziós Fourier sor és Fourier integrál (II. rész)

Cebe László

Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola

Összefoglalás

Cikkünk első részében a szinusz függvények két- és többdimenziós változatával foglalkoztunk. Ezek alapján tárgyaltuk a két és többdimenziós periodikus függvények Fourier sorát majd a két- és többdimenziós aperiodikus függvények Fourier integrálját. A matematikának ez a kevésbé ismert része alapvető fontosságú a hullámtanban és a fizika számos egyéb területén. Cikkünk második részében röviden kitérünk a többdimenziós Dirac impulzusra és a többdimenziós mintavételező függvényre. Ezeknek különös jelentősége van az egyre jobban tért hódító digitális képfeldolgozásban.

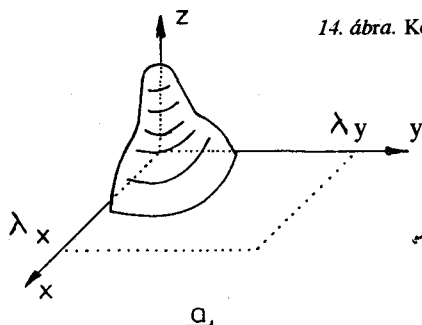
5. A kétdimenziós Fourier integrál

Egydimenziós esetben, ha a periodikusan ismétlődő jel ismétlési távolságát növeljük – határesetben a végtelenig – akkor egy egyedi, nem ismétlődő jelet kapunk. A matematikai leírásban a Fourier sor helyébe a Fourier integrál lép. Hasonló a helyzet két dimenzió esetén is. A 14. a) ábra szerinti kétdimenziós, kétszer periodikus függvényről növeljük a λ_x, λ_y ismétlési távolságot. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változnak meg a kétdimenziós Fourier sor formulái, ha $\lambda_x, \lambda_y \rightarrow \infty$.

a) A kétdimenziós amplitúdó sűrűség. λ_x és λ_y növelésével k_x és k_y egyre csökken, így a k síkon a diszkrét hullámvektorok a "b" ábra szerint egyre sűrűbben helyezkednek el és ha $\lambda_x, \lambda_y \rightarrow \infty$, akkor gyakorlatilag folytonosan követik egymást. Ekkor már nincs értelme a Fourier sor alkalmazásának és az egyes egyedi Fourier komponensekkel számolni. Ugyanis a k síkon egy kis dS felületet kiválasztva (a "b" ábrában vastagon bekeretezve), ezen belül a diszkrét k vektorok jó közelítéssel azonosak. Így célszerű a dS felületre eső komponensek összevonása. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$u = mk_x = 2\pi m/\lambda_x \quad \text{és} \quad v = nk_y = 2\pi n/\lambda_y \quad (18.a)$$

Határozzuk meg, hogy a dS felületre hány diszkrét hullámvektor esik. Mivel u, v irányban k_x, k_y távolság



14. ábra. Kétszeres periodikus függvény, ha $\lambda_x, \lambda_y \rightarrow \infty$



CEBE LÁSZLÓ

1950-ben végzett a BME villamosmérnöki karán. Az egyetem elvégzése után a BHG átviteltechnikai osztályára került, majd az 1952-ben megalakult

átviteltechnikai fejlesztési osztályra. Ezen az osztályon dolgozott a BHG-ben, majd az ágazat átrofilizálása után a Telefongyárban egészen 1987-ig nyugdíjba vonulásáig. 1978 óta a KKVMF Híradásipari Intézetének a tanára. Számos cikket publikált és a főiskola részére megírta az „Átviteltechnika” és a „PCM. Hírközlés” című jegyzeteket. Jelenleg a „Fénytvádközlés” jegyzete van nyomdában. Oktatási problémákkal, az oktatás reformjának a problémájával is foglalkozik. Jelen cikk egy tervezett nagyobb tanulmány egy fejezetének rövidített kivonata.

gonként követik egymást, egy $dS = du \cdot dv$ nagyságú felületre

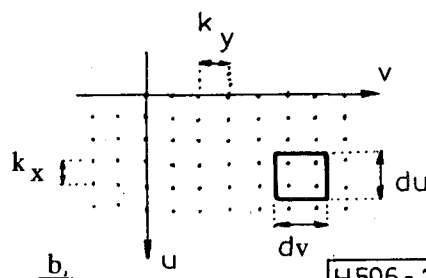
$$N = \frac{du \cdot dv}{k_x \cdot k_y} = \frac{\lambda_x \lambda_y}{4\pi^2}$$

számú hullámvektor esik. Számítsuk ki a dS felületre eső Fourier komponensek eredő amplitúdóját. Az egyszerűség kedvéért a komplex írásmóddal számolunk. A 17.d) formulából N -el való szorzással, a 18.a) helyettesítésével és λ_x és $\lambda_y \rightarrow \infty$ átmenettel kapjuk:

$$N \cdot C_{mn} = \frac{du \cdot dv}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-j(ux + vy)} dx dy.$$

Mindkét oldalt $du \cdot dv$ -vel osztva, megkapjuk az egységnyi felületre eső amplitúdók eredőjét. Ennek a $4\pi^2$ -szerezését nevezzük amplitúdó-sűrűségnek és $F(u,v)$ -val jelöljük. Tehát:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-j(ux + vy)} dx dy \quad (18.b)$$



H596-14

$F(u, v)$ a kétdimenziós $f(x, y)$ függvény Fourier transzformáltja.

b) Fordítva, $F(u, v)$ ismeretében meghatározhatjuk az $f(x, y)$ függvényt. Ehhez csupán a \bar{k} síkot kell elemi dS felületekre bontani és az összes ilyen elemi felületre eső eredő komponens összegezni. Ezenkívül mivel az amplitúdó-sűrűség számításánál önkényesen bevezettük egy $4\pi^2$ -szeres szorzót (ezt azért tettük, hogy az irodalomban szokásos jelölésmódot kapjunk), ennek kompenzálására itt be kell vezetnünk egy $4\pi^2$ -szeres osztót. Tehát mivel a k síkon az u, v pontnál egy du, dv felület eredő amplitúdója:

$$F(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv,$$

az egész \bar{k} síkra összegezve (integrálva) kapjuk:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv \quad (18.c)$$

Az egydimenziós Fourier integrálhoz hasonlóan, $f(x, y)$ és $F(u, v)$ is kölcsönösen és egyértelműen meghatározzák egymást, a 18.b,c formulák az egyik függvényt a másikba transzformálják. Ezt a kölcsönös transzformációt a Fourier integrál szokásos módján jelöljük:

$$f(x, y) \leftrightarrow F(u, v) \quad (19)$$

5. 1. A kétdimenziós Fourier integrál további alakjai

a) A kétdimenziós Fourier integrál 18.b,c komplex alakjából levezethetünk további formulákat, amelyek csak valós függvényeket tartalmaznak. A következőkben csak olyan esetekkel foglalkozunk, ahol $f(x, y)$ valós. Ilyen esetekben is általában $F(u, v)$ komplex. $F(u, v)$ valós és képzetes részének a jelölésére vezessük be:

$$F(u, v) = A(u, v) + jB(u, v) \quad (20.a)$$

A fenti formula és 18.b összehasonlításából, a valós és a képzetes részek egyenlőségéből kapjuk:

$$A(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \cos(ux+vy) dx dy \quad (20.b)$$

$$B(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \sin(ux+vy) dx dy \quad (20.c)$$

Fordítva, $A(u, v)$ és $B(u, v)$ ismeretében meghatározhatjuk $f(x, y)$ -ont, ha $F(u, v)$ 20.a szerinti alakját a 18.c formulába behelyettesítjük. Így kapjuk:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [A(u, v) \cos(ux+vy) + B(u, v) \sin(ux+vy)] du dv \quad (20.d)$$

Ha $f(x, y)$ valós függvény, akkor szükségszerű, hogy a fenti formulában a jobb oldalon a képzetes rész zérus legyen. Ebből viszont következik, hogy mivel a kétdimenziós „cos” és „sin” függvények az origóra páros illetve páratlan függvények, $A(u, v)$ az origóra páros, $B(u, v)$ pedig páratlan függvény. Az egyszerű bizonyítást az olvasóra bizzuk.

b) Az u, v változók az egydimenziós eset körfrekvenciájának, azaz ω -nak felelnek meg. Áttérhetünk itt is a frekvenciával való számításra. Az x illetve y irányú frekvenciákra vezessük be a ξ illetve η jelölést. Tehát:

$$u = 2\pi\xi \quad \text{és} \quad v = 2\pi\eta \quad (21.a)$$

Helyettesítsük be u, v fenti kifejezéseit a 18.b,c formulákba. Így megkapjuk a kétdimenziós Fourier integrál komplex alakját a ξ, η változókkal:

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (21.b)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) e^{j2\pi(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (21.c)$$

$F(\xi, \eta)$ valós és képzetes része:

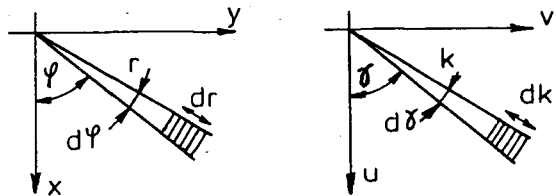
$$F(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) - jB(\xi, \eta) \quad (21.d)$$

ahol, a 20.b,c formulák alapján:

$$A(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \cos 2\pi(\xi x + \eta y) dx dy \quad (21.e)$$

$$B(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \sin 2\pi(\xi x + \eta y) dx dy \quad (21.f)$$

c) A kétdimenziós Fourier integrál polár koordináták esetén. Az x, y illetve az u, v síkon a 15. ábrának megfelelően vezessük be az $\bar{r}(r, \varphi)$ illetve a $\bar{k}(k, \gamma)$ polár koordinátákat.



H596-15

15. ábra. A polár koordináták bevezetése

Az előzőekhez képest csupán annyi a változás, hogy az integrálásnál az elemi felület a téglalap alakú dx, dy illetve du, dv helyett az ábrából kiolvashatóan a körgyűrű-szelet alakú, vonalazottan jelölt $r, d\varphi, dr$ illetve $k, d\gamma, dk$ területű elem lesz. Helyettesítsük be ezeket a felületelemeket az alapvető 18.b,c formulákba. Ezenkívül vegyük figyelembe, hogy x, y valamint u, v az \bar{r} illetve \bar{k} síkvektorok koordinátái, tehát:

$ux + vy = k \cdot r = \bar{k} \cdot \bar{r} \cdot \cos(\varphi - \gamma)$. Így kapjuk:

$$F(k, \gamma) = F(\bar{k}) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}} r d\varphi dr \quad (22.a)$$

és fordítva:

$$f(r, \varphi) = f(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(k, \gamma) e^{j\bar{k} \cdot \bar{r}} k d\gamma dk \quad (22.b)$$

5.2. A Hankel transzformáció

Gyakori eset, hogy $f(x, y)$ illetve $f(r, \varphi)$ körszimmetrikus. Ekkor szimmetria okokból $F(u, v)$ illetve $F(k, \gamma)$ is szükségszerűen körszimmetrikus. Ebben az esetben a formuláink egyszerűsödnek, mert megszűnik a φ és a γ -tól való függés. Így csak az egy változós $f(r)$ és $F(k)$ függvényekkel kell számolnunk. Tehát a 22.a formulából a spektrum-függvény:

$$F(\bar{k}) = \int_0^{\infty} f(r) \int_0^{2\pi} e^{-jkr \cos(\varphi - \gamma)} d\varphi \cdot r dr$$

De a Bessel függvények elméletéből ismeretes, hogy:

$$\int_0^{2\pi} e^{-jb \cos \alpha} d\alpha = 2\pi J_0(b)$$

ahol „b” tetszőleges konstans és J_0 a nullad rendű Bessel függvény. Tehát a fenti összefüggéssel, $b = kr$ helyettesítéssel:

$$F(k) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \cdot J_0(kr) r dr. \quad (23.a)$$

És hasonlóképpen a 22.b formulából az inverz transzformáció:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(k) J_0(kr) k dk. \quad (23.b)$$

A fenti két formulában $f(r)$ és $F(k)$ kölcsönösen és egyértelműen meghatározza egymást:

$$f(r) \leftrightarrow F(k) \quad (23.c)$$

H. Hankel (1839-1873) után ezt a transzformációt Hankel transzformációnak nevezzük. Lényegében nem más, mint a kétdimenziós Fourier integrálnak a körszimmetrikus függvényekre kapott változata.

5.3. A kétdimenziós Fourier integrállal kapcsolatos fontosabb tételek

a) A kétdimenziós Fourier integrál létezésének a feltétele.

Általában elegendő feltételnek tekinthető, ha a levezetett formuláinkban szereplő integrálok véges értéket

adnak. Ez a feltétel azonos az egydimenziós Fourier integrál Dirichlet feltételével, vagyis azzal, hogy $f(x, y)$ abszolút integrálható. Tehát:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty. \quad (24)$$

b) Az $f(x, y)$ függvény tartalmazhat szakadási helyeket (ezek az x, y síkban lévő vonalak mentén helyezkednek el). A Fourier integrál ezeken a helyeken a középértéket állítja elő.

c) Két dimenzió esetén is beszélhetünk spektrum-korlátozásról, sáv levágásról. Ha a spektrumban valamilyen éles korlátozást vezetünk be, itt is fellép a Gibbs jelenség. Az éles korlátozás azt jelenti, hogy a \bar{k} síkon egy zárt görbén belül a spektrumot változatlanul hagyjuk, kívül pedig zérusnak vesszük. A Gibbs jelenség következtében az eredeti $f(x, y)$ függvény szakadási helyein a sáv-levágott függvény meghullámosodik. A viszonyok itt sokkal bonyolultabbak, mint egy dimenzió esetén.

d) A lineáris szuperpozíció elve. Ha $f(x, y) \leftrightarrow F(u, v)$ és $g(x, y) \leftrightarrow G(u, v)$, akkor:

$$[a \cdot f(x, y) + b \cdot g(x, y)] \leftrightarrow [a \cdot F(u, v) + b \cdot G(u, v)] \quad (25)$$

ahol a, b tetszőleges konstansok.

e) Ha $f(x, y)$ két függvény szorzatából áll, ahol az egyik csak x -től, a másik csak y -től függ, azaz:

$$f(x, y) = f_a(x) \cdot f_b(y), \text{ akkor:} \quad (26.a)$$

$$F(u, v) = \bar{F}_a(u) \cdot \bar{F}_b(v). \quad (26.b)$$

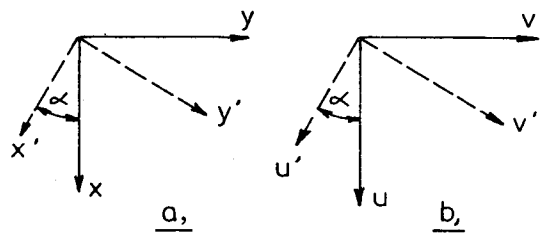
A fenti formula egyszerűen igazolható a Fourier integrál alapformuláiból.

f) Ugyancsak egyszerűen igazolható az alapformulából a tengelyek menti nyújtás illetve eltolás hatása a Fourier integrálra:

$$f(ax, by) \leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (27.a)$$

és fordítva:

$$F(cu, dv) \leftrightarrow \frac{1}{|cd|} f\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{d}\right) \quad (27.b)$$



16. ábra. A koordináta-rendszer elforgatása az x, y és az u, v síkban

$$f(x-x_0, y-y_0) \leftrightarrow F(u, v) \cdot e^{-j(u x_0 + v y_0)} \quad (27.c)$$

és fordítva:

$$F(u-u_0, v-v_0) \leftrightarrow f(x, y) \cdot e^{j(u_0 x + v_0 y)} \quad (27.d)$$

g) Az origó körüli forgatás hatása a spektrumra. Forgassuk el az $f(x, y)$ alakzatot az origó körül α szöggel. Ez az elforgatás egyenértékű azzal, mintha a 16.a ábra szerint a koordináta rendszert forgattuk volna el az ellenkező irányba α szöggel. Jelöljük az új koordinátákat x', y' -nal. Az összefüggés a régi és az új koordináták között:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \quad (28.a)$$

Határozzuk meg $f(x', y')$ spektrumát. Rövid megmondolás után belátható, hogy a spektrum függvény is lényegében változatlan marad, csupán szintén α szöggel elfordul. Tehát:

$$f(x', y') \leftrightarrow F(u', v') \quad (28.b)$$

ahol az elforgatásnak megfelelően az összefüggés az u, v és az u', v' koordináták között azonos a 28.a formulával:

$$\begin{aligned} u' &= u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ v' &= u \sin \alpha + v \cos \alpha. \end{aligned} \quad (28.c)$$

h) Modulált függvény spektruma. Modulálás alatt egy függvénynek a \cos illetve \sin függvényvel való szorzását értjük. Induljunk ki egy az alapformulából közvetlenül levezethető összefüggésből:

$$f(x, y) \cdot e^{\pm j \vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \leftrightarrow F(\vec{k} - \vec{k}_0). \quad (29.a)$$

(Ez az összefüggés a 27.d formulából is közvetlenül következik.) Ugyanis:

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = u_0 x + v_0 y \text{ és: } F(\vec{k} - \vec{k}_0) = F(u - u_0, v - v_0)$$

Felhasználva a

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{jz} + e^{-jz}) \text{ és: } \sin z = -\frac{j}{2} (e^{jz} - e^{-jz})$$

összefüggéseket, a 29.a formulából összegezéssel illetve kivonással kapjuk:

$$f(x, y) \cdot \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \leftrightarrow \frac{1}{2} [f(\vec{k} - \vec{k}_0) + F(\vec{k} + \vec{k}_0)] \quad (29.b)$$

$$f(x, y) \cdot \sin(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \leftrightarrow -\frac{j}{2} [f(\vec{k} - \vec{k}_0) + F(\vec{k} + \vec{k}_0)]. \quad (29.c)$$

Kapott formuláink teljes egyezésben vannak az egydimenziós esetben kapott formulákkal. Ott a moduláció hatására a spektrum két részre bomlik, a két rész a moduláló frekvencia, értékével jobbra és balra eltolódik. Itt a spektrum szintén két részre bomlik. \vec{k}_0 irányú és k_0 hullámszámú kétdimenziós \cos illetve \sin függ-

vénnyel szorozva $f(x, y)$ -ont a spektrum az origóhoz képest ellentétes irányban $\pm \vec{k}_0$ -al eltolódik.

i) Az alapformulából $u=v=0$ illetve $x=y=0$ helyettesítéssel közvetlenül adódik:

$$F(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A(0, 0) \quad (30.a)$$

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) du dv = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(u, v) du dv. \end{aligned} \quad (30.b)$$

Vagyis $F(0, 0)$ értéke azonos az $f(x, y)$ alatti körtartalommal. Mivel $B(u, v)$ páratlan függvény, $B(0, 0) = 0$. Hasonlóan $f(0, 0)$ számításnál csak $A(u, v)$ -ét kell figyelembe vennünk, mert $B(u, v)$ páratlan függvény, az integrálja zérust ad.

j) A kétdimenziós Fourier integrál Parseval tétele:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, y)]^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(u, v)]^2 du dv \quad (31)$$

k) A differenciált $f(x, y)$ függvény spektruma. A kétdimenziós $f(x, y)$ függvényt a többváltozós függvények differenciálási szabályai szerint differenciálhatjuk x vagy y vagy vegyesen x, y szerint. Vegyük először az „ x ” szerinti differenciálást. A 18.c alap-formula mindkét oldalát differenciálhatjuk „ x ” szerint. Mivel a jobb oldalon az integrálás u, v szerint történik, az integrálon belül differenciálhatunk. Így kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j u F(u, v) \cdot e^{j(u x + v y)} du dv.$$

A fenti formulát összehasonlítva 18.b-vel, azonnal adódik:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \leftrightarrow j u F(u, v) \quad (32.a)$$

és hasonlóan, „ y ” szerinti differenciálás esetén:

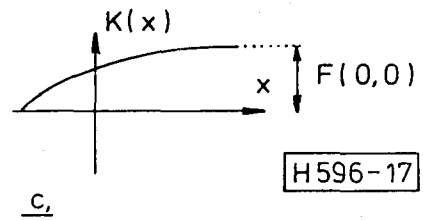
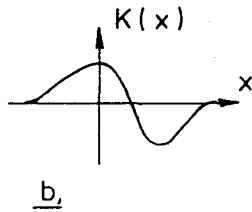
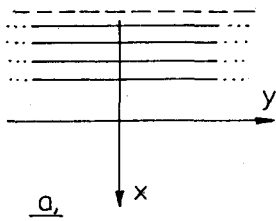
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \leftrightarrow j v F(u, v). \quad (32.b)$$

„ x ” illetve „ y ” szerinti m illetve n -szeri differenciálás után, az előző formulák többszöri alkalmazásával kapjuk:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \leftrightarrow j^{(m+n)} u^m v^n F(u, v) \quad (32.c)$$

Példa:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right] \leftrightarrow -(u^2 + v^2) F(u, v)$$



H596-17

17. ábra. Az $f(x, y)$ függvény

m) Az integrált $f(x, y)$ függvény spektruma. A differenciáláshoz hasonlóan az integrálás is történhet x vagy y szerint vagy pedig vegyesen. Mi csak az első két esettel foglalkozunk. Vegyük először az x szerinti integrálást. „ x ” szerinti integráláson az $f(x, y)$ függvénynek a $-\infty$ és az adott „ x ” pont közötti köbtartalmat értjük, tehát a 17.a ábrán a vízszintesen vonalazott rész feletti köbtartalmat. Jelöljük ezt $K(x)$ -el. Két eset lehetséges: ha $x \rightarrow \infty$, akkor $K(\infty) = 0$ („b” ábra) vagy pedig $K(\infty) \neq 0$ („c” ábra). Az i) pont szerint $K(\infty) = F(0, 0)$.

Az egydimenziós Fourier integrálnál egy $f(x)$ függvény integráljának a spektrumát $j\omega$ -val való osztással kapjuk. Ugyanezt a szabályt kell alkalmaznunk itt is, mivel $K(x)$ egy közönséges egydimenziós függvény. Tehát ha $f(x, y) \leftrightarrow F(u, v)$, akkor:

$$K(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \leftrightarrow \frac{F(u, 0)}{ju} \quad (33.a)$$

és hasonlóan, ha „ y ” szerint integrálunk:

$$K(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy \leftrightarrow \frac{F(0, v)}{jv} \quad (33.b)$$

A fenti formulák akkor érvényesek, ha az $f(x, y)$ függvény alatti össz-köbtartalom zérus („b” ábra). Ha ez nem áll fenn, akkor $K(x)$ a „c” ábra szerint egy egyenáramú tagot is tartalmaz. Az egydimenziós Fourier integrál elméletből ismeretes, hogy az egyenáramú tagnak a spektruma:

$$\frac{1}{2} F(0, 0) \cdot \delta(u) \quad \text{illetve:} \quad \frac{1}{2} F(0, 0) \cdot \delta(v)$$

ahol: $\delta(u)$ illetve $\delta(v)$ Dirac impulzust képvisel. Ilyen esetekben ezeket a tagokat kell még a 33.a,b formulák jobb oldalához hozzáadni.

6. A kétdimenziós Dirac impulzus

A 18. ábra szerint az x, y síkon vegyünk fel egy kis dS területű tartományt. A tartomány kerülete mentén emeljünk egy $1/dS$ magasságú palástot. Így egy egységnyi köbtartalmú hengert kapunk. Ha $dS \rightarrow 0$ és a dS terület kerülete mentén vett bármely két pont közötti távolság is tart a zérus felé, akkor egy végtelen kis keresztmetszetű, végtelen magas és egységnyi köbtartalmú kétdimenziós tú-impulzust kapunk. Az egydimen-

ziós analógia alapján ezt a tú-impulzust kétdimenziós Dirac impulzusnak nevezzük. Ha az impulzus az x_0, y_0 pontban van, a jelölése:

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} \infty, & \text{ha: } x = x_0 \text{ és: } y = y_0 \\ 0, & \text{ha: } x \neq x_0 \text{ és: } y \neq y_0 \end{cases} \quad (34.a)$$

és definíció szerűen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = 1. \quad (34.b)$$

Természetesen az egységnyi köbtartalom csak a „normált” Dirac impulzusra vonatkozik, tetszőleges véges K köbtartalom csupán egy K -szoros szorzást jelent.

a) A Dirac impulzus legfontosabb jellemzője a mintavételező tulajdonság. Vagyis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (35)$$

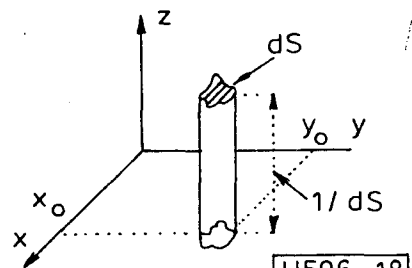
teljes analógiában az egydimenziós Dirac impulzus mintavételező tulajdonságával.

b) A spektrum. Legyen először a Dirac impulzus az origóban. Ekkor a spektrumot meghatározó 18.b formulában $f(x, y)$ helyébe kell $\delta(x, y)$ -ont írni. Mivel az integrandusz csak $x=y=0$ környezetében ad zérustól eltérő értéket, az exponenciális tag értéke egységnyi. Így azonnal kapjuk a K köbtartalmú Dirac impulzus spektrumát:

$$K \cdot \delta(x, y) \leftrightarrow K. \quad (36.a)$$

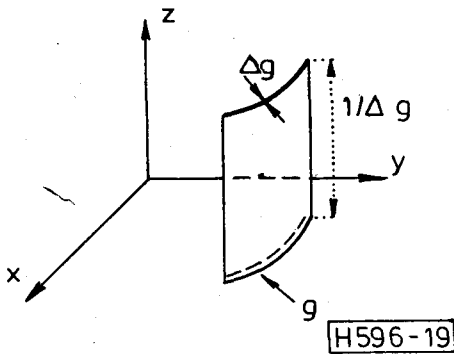
És hasonló megfontolások alapján, az x_0, y_0 pontban lévő Dirac impulzus spektruma:

$$K \cdot \delta(x - x_0, y - y_0) \leftrightarrow K \cdot e^{-j(\omega x_0 + \omega y_0)}. \quad (36.b)$$



H596-18

18. ábra. A kétdimenziós Dirac impulzus



19. ábra. A kétdimenziós Dirac vonal-impulzus

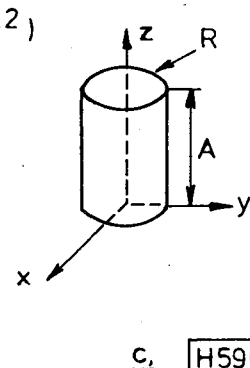
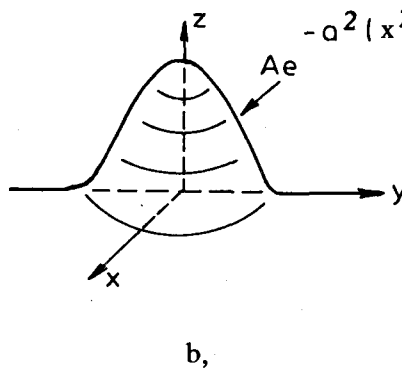
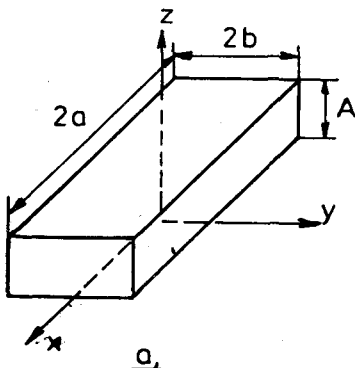
c) A kétdimenziós Dirac vonal-impulzus. Vegyünk a 19. ábra szerint az x,y síkban egy tetszőleges „g” görbét. A görbe lehet véges vagy végtelen hosszúságú, lehet nyitott vagy zárt. A görbe mentén vegyünk egy Δg szélességű csíkot és a csík mentén emeljünk mindkét oldalon 1/Δg magasságú palástot. Így egy lemezszerű testet kapunk, amelynek az egységnyi hosszra eső köbtartalma egységnyi. Ha Δg→0, akkor a kapott alakzatot – jobb elnevezés híján – Dirac vonal-impulzusnak nevezünk. Példákat vonal-impulzusokra a következő fejezetben közlünk.

A kétdimenziós Dirac szimbolika bevezetése az egydimenziós változathoz hasonlóan igen nagy segítséget nyújt kétdimenziós problémák megoldásánál. Amint látjuk, a Dirac szimbolika alkalmazása két dimenzió esetén sokkal változatosabb, mint egy dimenzió esetén.

7. Példák kétdimenziós Fourier integrál kiszámítására

1. Példa. Határozzuk meg a 20.a ábra szerinti hasáb spektrumát. A Fourier integrál 18.b alap-formulájából:

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= A \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} e^{-j(ux+vy)} dx dy = \\
 &= A \int_{-b}^{+b} \left[\int_{-a}^{+a} e^{-jux} dx \right] e^{-jvy} dy = \\
 &= 4A \frac{\sin au \cdot \sin bv}{uv} \quad (37)
 \end{aligned}$$



H596-20

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy példánkban a „spektrum” azt jelenti, hogy az F(u, v)-vel jellemzett elemi kétdimenziós szinus hullámokból előállítható a hasáb felülete mint kétdimenziós függvény (pontosabban: a hasáb felületén az x,y síkban levő lap nélküli felületet értjük).

2. Példa. Határozzuk meg a 20.b ábra szerinti

$z = Ae^{-a^2(x^2+y^2)}$ függvény spektrumát. Ez a függvény az $z = Ae^{-a^2x^2}$ alakú Gauss görbe „z” tengely körüli forgatásából származtatható. Alkalmazzuk a 18.b alap-formulát. A integrálásnál a változók szeparálhatók, tehát kapjuk:

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(x^2+y^2)} \cdot e^{-j(ux+vy)} dx dy = \\
 &= A \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2x^2+jux)} dx \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2y^2+jvy)} dy \right].
 \end{aligned}$$

Az exponenciális kitevőkben vegyük az alábbi ekvivalens formákat: $a^2x^2+jux = a^2(x+ju/2a^2)^2 + u^2/4a^2$ és hasonlóképpen, ha „x” helyett „y” szerepel. Ezután bevezetve a $\xi = x+ju/2a^2$ és $\eta = y+jv/4a^2$ jelöléseket és felhasználva az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \text{ összefüggést, kapjuk:}$$

$$F(u, v) = \frac{A\pi}{a^2} e^{-(u^2+v^2)/4a^2} \quad (38)$$

3. Példa. Határozzuk meg a 20.c ábra szerinti henger spektrumát. A 23.a formulából kapjuk:

$$F(k) = 2\pi A \int_0^R J_0(kr) r dr = \frac{2\pi A}{k^2} \int_0^{kR} J_0(u) u du. \quad (39.a)$$

Itt bevezettük az $u=kr$ helyettesítést. Használjuk fel a Bessel függvények elméletéből ismert alábbi összefüggést:

$$J_0(u) \cdot u = \frac{d}{du} u \cdot J_1(u) \text{ ahol } J_1 \text{ az elsőrendű Bessel függvény.}$$

20. ábra. Kétdimenziós alakzatok

Mivel $J_1(0)=0$, a fenti kifejezést 39.a-be helyettesítve, kapjuk:

$$F(k) = \frac{2\pi AR}{k} J_1(kr). \quad (39.b)$$

4. *Példa.* A 2. példában szereplő Gauss felület alatti köbtartalom: $K=A\pi/a^2$, a 3. példában szereplő hengerre pedig: $K=Ar^2\pi$. Ha $A \rightarrow \infty$, de közben „a” illetve „R” értékét úgy változtatjuk, hogy a köbtartalom állandóan „K” maradjon, akkor mindkét esetben egy az origóban lévő tő-impulzust kapunk. Igazoljuk, hogy mindkét esetben $F(u, v) \rightarrow K$, vagyis egy az origóban lévő Dirac impulzus spektrumát kapjuk. Tehát a két tő-impulzus, bár eltérő alakú, Dirac impulzusnak tekinthető.

5. *Példa.* Határozzuk meg a 21.a ábra szerinti vékony lemez spektrumát. Legegyszerűbben úgy jutunk célhoz, hogyha felismerjük, hogy példánk azonos a 20.a ábrában szereplő hasábbal, $d=2b=0$ átmenettel. Tehát a 37. formulából, $\sin v \approx bv$ helyettesítéssel kapjuk:

$$F(u, v) \approx 2Ad \frac{\sin au}{u}. \quad (40)$$

Ha $d \rightarrow 0$, miközben $A \rightarrow \infty$ olyan módon, hogy $Ad=K$ konstans, akkor az alakzat egy az egységnyi hosszra eső „K” köbtartalmú vonal-impulzusba megy át.

6. *Példa.* A 21.a ábra szerinti lemezt a „b” ábra szerint forgassuk el α szöggel. A spektrumot a 28.c formula alapján határozhatjuk meg. Az ott szereplő két formulából, az elsőt $\cos \alpha$, a másodikat $\sin \alpha$ -val szorozva és a két formulát összeadva, kapjuk: $u = u' \cos \alpha + v' \sin \alpha$. „u” fenti alakját 40-be behelyettesítve és a vessző jelet elhagyva (ugyanis nem a koordináta rendszert forgatuk el), kapjuk a spektrumot:

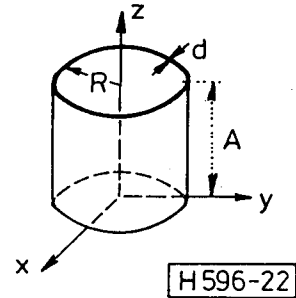
$$F(u, v) = 2Ad \frac{\sin a(u \cos \alpha + v \sin \alpha)}{u \cos \alpha + v \sin \alpha}. \quad (41)$$

7. *Példa.* Határozzuk meg a 21.a ábra szerinti lemez spektrumát, ha $a \rightarrow \infty$ („c” ábra). A spektrumot továbbra is a 40. formula adja meg, de a $\sin au/u$ függvény „a” növelésével egyre inkább egy „a” magasságú, igen keskeny, π területű Dirac impulzusba megy át („d” ábra). Tehát határesetben $F(u, v)$ egy „v” tengely menti vonal-impulzus, amelynek az egységnyi hosszra eső köb-

tartalma: $2\pi Ad$, ahol Ad a lemez egységnyi hosszára eső köbtartalom.

8. *Példa.* Határozzuk meg a 22. ábra szerinti „d” falvastagságú hengerpalást spektrumát. A 23.a formula szerint:

$$F(k) = 2\pi A \int_R^{R+d} J_0(kr) r dr. \quad (42.a)$$



22. ábra. Hengergyűrű

Ha $d \ll R$, akkor a kör alapú vonal-impulzus spektrumát a fenti formulából $d \rightarrow 0$ és $r \approx R$ helyettesítéssel kapjuk:

$$F(k) \approx 2\pi Ad R J_0(kR) \quad (42.b)$$

ahol Ad a kör mentén az egységnyi hosszra eső köbtartalom.

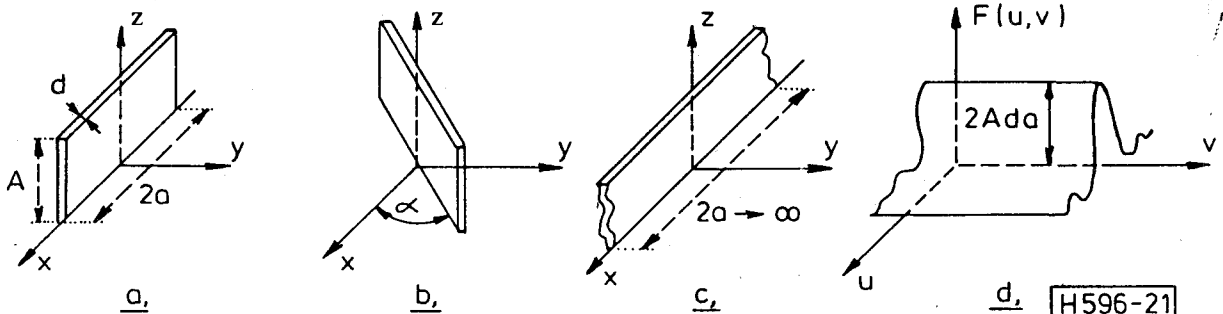
9. *Példa.* Határozzuk meg, hogy milyen kétdimenziós függvény $f(x, y) = A\delta(x-x_0)$? Mivel nem függ y -től, minden $y = \text{konstans}$ metszete egy az „y” koordinátánál emelt, az x, z síkkal párhuzamos síkban x_0 magasságban lévő, „A” területű Dirac impulzus. Tehát a függvényünk a 23.a ábra szerinti vonal-impulzus, az egységnyi hosszra eső köbtartalma „A”. Hasonlóképpen az $f(x, y) = B\delta(y-y_0)$ függvény egy erre merőleges irányú vonal-impulzus. Ezt szintén feltüntettük az ábrában.

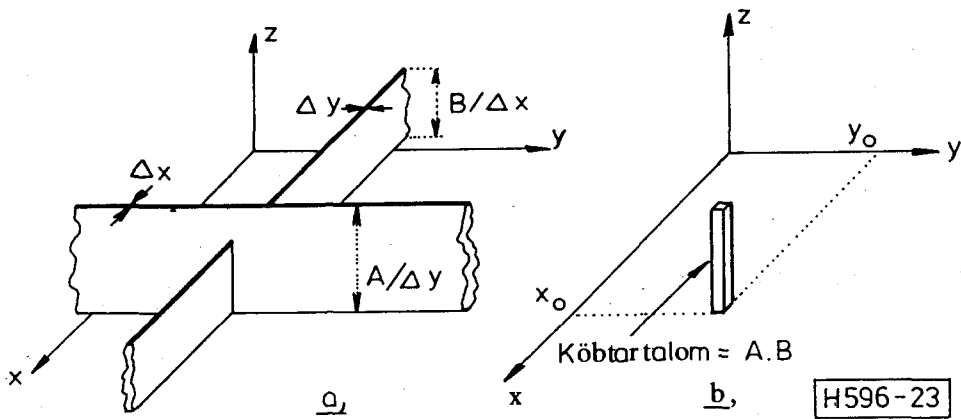
A fentiek alapján könnyen igazolható, hogy az

$$f(x, y) = A\delta(x-x_0) \cdot B\delta(y-y_0) = AB\delta(x-x_0, y-y_0) \quad (43)$$

egyenlőség. Vagyis két egydimenziós Dirac impulzus

21. ábra. Kétdimenziós lineáris vonal-impulzusok





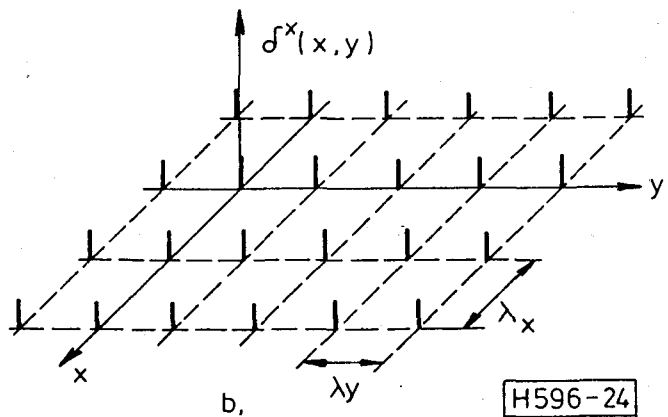
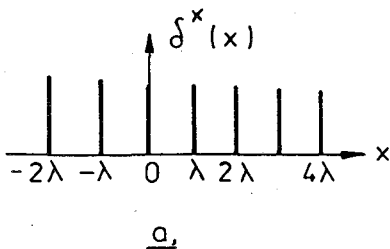
23. ábra. Kétdimenziós vonal-impulzusok

szorzata (amelyek esetünkben valójában kétdimenziós függvények) egy kétdimenziós Dirac impulzust eredményez (23.b ábra). Eredményünk helyességéről azonnal meggyőződhetünk, ha a vonal-impulzusokat első közelítésben Δx illetve Δy szélességű és $A/\Delta x$ illetve $B/\Delta y$ szélességű hasábnak tekintjük és a szorzást az x, y sík minden pontjában elvégezzük.

8. A kétdimenziós mintavételezés

Ismeretes, hogy az egydimenziós sávkorlátozott függvények egyértelműen előállíthatók a függvényből egyenlő távolságonként (időközönként) vett mintákból. Ugyanez a helyzet a kétdimenziós függvényeknél, ha az $F(u, v)$ spektrum-függvény mind az „u”, mind a „v” irányban korlátozva van. Az egydimenziós mintavételezés képezi az egydimenziós jelátvitel digitális megvalósításának az alapját. Hasonlóan egyre nagyobb szerepet kap újabban a képátvitel, amely alapvetően kétdimenziós probléma (ha a képet előzetesen nem bontjuk fel sorokra). Az ilyen típusú képátvitelnél alapvető szerepet játszik a kétdimenziós Fourier analízis, a digitális átvitelnél pedig a kétdimenziós mintavételezés.

a) A kétdimenziós mintavételező függvény. Emlékeztetőül vegyük először az egydimenziós mintavételező függvényt, amelyet a 24.a ábrán tüntetünk fel. Matematikai alakja illetve Fourier sora:



24. ábra. Az egy- és a kétdimenziós mintavételező függvény

$$\delta^x(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x-m\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} (\cos \omega_0 x + \cos 2 \omega_0 x + \cos 3 \omega_0 x + \dots) \quad \text{ahol: } \omega_0 = 2\pi/\lambda. \quad (44)$$

A kétdimenziós mintavételező függvényt a 24.b ábra tünteti fel. Itt az egységnyi köbtartalmú kétdimenziós Dirac impulzusok „x” irányban λ_x , „y” irányban λ_y távolságonként követik egymást. Ennek az alakzatnak a matematikai alakja:

$$\delta^x(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-m\lambda_x, y-n\lambda_y). \quad (45.a)$$

Kétszeresen periodikus függvényről van szó, ezért felírhatjuk a kétdimenziós Fourier sorát. Mivel a 24.b ábrában felvett koordináta rendszerben a mintavételező függvény az x, y tengelyre szimmetrikus, a Fourier sora csak „cos” tagokat tartalmazhat. Így a Fourier sor alakja a 15.c formula alapján:

$$\delta^x(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y \quad (45.b)$$

ahol: $k_x = 2\pi/\lambda_x$ és: $k_y = 2\pi/\lambda_y$. A Fourier együtthatókat a 16.a,b,c formulákból határozhatjuk meg. A formulákban célszerű az integrálási határokat $\pm \lambda_x/2$ illetve: $\pm \lambda_y/2$ -nek venni. Így egyszerű számítással adódik:

$a_{oo}=1/\lambda_x\lambda_y$, $a_{mo}=a_{on}=2/\lambda_x\lambda_y$ és: $a_{mn}=4/\lambda_x\lambda_y$. Tehát a Fourier sor:

$$\delta^x(x, y) = \frac{1}{\lambda_x\lambda_y} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\lambda_x} mx + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\lambda_y} ny + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\lambda_x} mx \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda_y} ny \right]. \quad (45.c)$$

A Fourier sor egy további alakját kapjuk, ha a fenti formulában az utolsó tagban a trigonometrikus szorzatot trigonometrikus összeggé alakítjuk át. Tehát:

$$\delta^x(x, y) = \frac{1}{\lambda_x\lambda_y} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\lambda_x} mx + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{\lambda_y} ny + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_x} mx + \cos \frac{2\pi}{\lambda_y} ny \right) \right]. \quad (45.d)$$

Megjegyezzük, hogy $\delta^x(x, y)$ -ont a 43. formula illetve a 23. ábra alapján a következő módon írhatjuk:

$$\delta^x(x, y) = \delta^x(x) \cdot \delta^x(y) \quad (45.e)$$

ahol $\delta^x(x)$ és $\delta^x(y)$ az x illetve az y tengely irányú egydimenziós mintavételező függvények illetve mint kétdimenziós függvények, a 23.a ábra értelmében az „x” és az „y” tengellyel párhuzamos vonal-impulzus sorozatok. A keresztezési pontokban egy-egy egységnyi köbtartalmú Dirac impulzust adnak az egyes szorzatok, így a 45.e formula valóban a 24.b ábra szerinti kétdimenziós mintavételező függvényt állítja elő.

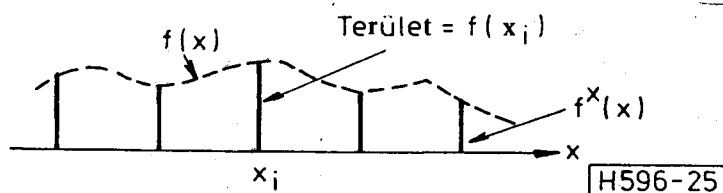
b) A mintavételezés. Egydimenziós esetben ha egy tetszőleges $f(x)$ függvényt megszorozzuk a $\delta^x(x)$ mintavételező függvényel, akkor eredőül az

$$f^x(x) = f(x) \cdot \delta^x(x) \quad (45.f)$$

mintavételezett függvényt kapjuk. Az egyes x_i mintavételezési helyeken $f^x(x)$ egy-egy $f(x_i)$ területű Dirac impulzust tartalmaz (25. ábra). Teljesen hasonlóan, ha egy tetszőleges $f(x, y)$ függvényt megszorozzuk a $\delta^x(x, y)$ mintavételező függvényel, akkor eredőül az

$$f^x(x, y) = f(x, y) \cdot \delta^x(x, y) \quad (45.g)$$

kétdimenziós mintavételezett függvényt kapjuk. Az



25. ábra. Egydimenziós mintavételezett függvény

egyes x_i, y_i mintavételezési helyeken, vagyis az $m\lambda_x, n\lambda_y$ helyeken $f^x(x, y)$ egy-egy $f(x_i, y_i)$ köbtartalmú Dirac impulzust tartalmaz.

Ismeretes, hogy egydimenziós függvényeknél, ha a spektrum korlátozott, akkor a mintákból – ha a mintavételezés sebessége kielégíti a Nyquist feltételt – egyértelműen előállítható az eredeti $f(x)$ függvény. Hasonló a helyzet a kétdimenziós függvényeknél. Ha az $f(x, y)$ függvény x és y irányban sávkorlátozott, akkor a kétdimenziós mintákból előállítható az eredeti $f(x, y)$ függvény.

9. A három és többdimenziós Fourier sor és integrál

Az előzőekben tárgyalt kétdimenziós Fourier sor és integrál értelemszerűen kiterjeszthető három és több dimenzióra. A dimenzió-szám növelésével a formulák rohamosan bonyolódnak és nehézséget okoz a geometriai értelmezés is (három független változó esetén az ábrázoláshoz már négydimenziós tér szükséges). A következőkben röviden foglalkozunk a háromdimenziós esettel, a háromnál több dimenziós esetekre pedig csak utalunk.

9.1. A háromdimenziós szinuszfüggvények

A 4. formulában magadott szinuszfüggvény a legáltalánosabb szinuszfüggvénynek tekinthető. Ugyanis az

$$f(x, y, z, \dots) = A \cos(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi) \quad (46.a)$$

szinuszfüggvény dimenzió-számát a \bar{k} és \bar{r} vektorok dimenzió-száma határozza meg. Így például $n=3$ esetén:

$$\bar{r} = \bar{e}_1 x + \bar{e}_2 y + \bar{e}_3 z$$

$$\bar{k} = \bar{e}_1 k_x + \bar{e}_2 k_y + \bar{e}_3 k_z.$$

Tehát a 46.a formula a következő alakú lesz:

$$f(x, y, z) = A \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi) = \\ = AR_e [e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi)}]. \quad (46.b)$$

A fenti formulában felírtuk a háromdimenziós szinuszfüggvény komplex alakját is. A komplex alakot röviden így is írhatjuk:

$$f(x, y, z) = A e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi)} = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi)} \quad (46.c)$$

ahol mindig csak a valós résszel számolunk.

A 46.b formulában egy összeg koszinusza szerepel. A trigonometriai alapformulákkal ezt trigonometrikus szorzatok összegévé alakíthatjuk át. Az egyszerű számításokat elvégezve, a 46.b formula az alábbi típusú szorzatok összegeként is felírható:

$$\left. \begin{array}{l} \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \\ \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z \\ \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \\ \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z \\ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos k_z z \\ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \end{array} \right\} 2^n = 8 \text{ tag} \quad (46.d)$$

Mind a 46.b formula szerinti szinusz függvényt, mind a fenti szorzat-függvényeket alapvető háromdimenziós szinusz függvényeknek kell tekintenünk. Amint látjuk, a szorzat-tagok száma a dimenzió-szám növekedésével rohamosan növekszik.

Az ábrázolási nehézségek miatt a többdimenziós szinusz függvényeket a metszeteikkel szemléltetjük (egyenes, sík, stb. mentén vett metszetekkel).

1. *Példa.* Legyen a háromdimenziós szinusz függvény egyenlete: $w = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$. Határozzuk meg, hogy milyen függvényt kapunk az $\vec{r} = \vec{a} + \vec{e}t$ egyenes mentén? Behelyettesítéssel kapjuk:

$$f(t) = A \cos[\vec{k}(\vec{a} + \vec{e}t) - \varphi] = A \cos(k_e t - \varphi_e)$$

ahol: $k_e = \vec{k} \cdot \vec{e}$ és: $\varphi_e = \vec{k} \cdot \vec{a} - \varphi$.

Tehát egy egydimenziós szinusz függvényt kaptunk.

2. *Példa.* Az előbbi példában milyen függvényt kapunk az $\vec{r} = \vec{a} + \vec{e}t + \vec{g}s$ sík mentén? Behelyettesítéssel kapjuk:

$$f(s, t) = A \cos[\vec{k}(\vec{a} + \vec{e}t + \vec{g}s) - \varphi] = A \cos(\vec{k}_e t + \vec{k}_g s - \varphi_e)$$

ahol: $k_e = \vec{k} \cdot \vec{e}$, $k_g = \vec{k} \cdot \vec{g}$ és: $\varphi_e = \vec{k} \cdot \vec{a} - \varphi$.

Tehát egy kétdimenziós szinusz függvényt kaptunk.

9.2. A három- és többdimenziós Fourier sor

Ha a háromdimenziós $f(x, y, z)$ függvény periodikus az x, y, z irányokban $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ periodus-hosszakkal, akkor felírhatjuk a Fourier sorát. A kétdimenziós Fourier sorra kapott 17.c,d formulákkal való analógia alapján azonnal írhatjuk:

$$f(x, y, z) = \sum_{m,n,p=-\infty}^{+\infty} C_{mnp} e^{-j(mk_x x + nk_y y + pk_z z)} \quad (47.a)$$

ahol:

$$C_{mnp} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y \lambda_z} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} \int_0^{\lambda_z} f(x, y, z) \cdot e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dx dy dz \quad (47.b)$$

Ezzel megkaptuk a háromdimenziós Fourier sor komplex alakját. A fenti komplex alakból áttérhetünk a Fourier sor trigonometrikus alakjára. A 15.e,f formulákhoz hasonlóan kapjuk:

$$f(x, y, z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [A_{mnp} \cos(mk_x x + nk_y y + pk_z z) +$$

$$+ B_{mnp} \sin(mk_x x + nk_y y + pk_z z)] \quad (47.c)$$

A fenti formulában a \sin és a \cos tagokat összevonva:

$$f(x, y, z) = \sum_0^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_{mnp} \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi_{mnp}) \quad (47.d)$$

Végül a 15.c formulával analóg módon, a 46.d szerinti trigonometrikus szorzatokkal:

$$f(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (a_{mnp} \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y \cdot \cos pk_z z + b_{mnp} \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y \cdot \sin pk_z z + \dots + h_{mnp} \sin mk_x x \cdot \sin nk_y y \cdot \sin pk_z z) \quad (47.e)$$

A fenti formulában szereplő nyolc tag azonos a 46.d-ben felírt nyolc alap-függvénnyel. Ezek a háromdimenziós szinusz alap-függvények is ortogonális rendszert képeznek (teljesen analóg módon az 1.d pontban tárgyalt kétdimenziós esettel). Ez lehetőséget ad az a_{mnp}, b_{mnp} stb. együtthatók meghatározására.

Az együtthatók meghatározása a 4. 1. pontban ismertetett módon történik. Ugyancsak a kétdimenziós Fourier sorral kapcsolatban a 4. 2. pontban ismertetett módon határozhatjuk meg a C_{mnp} komplex együtthatókat illetve ezekből az $A_{mnp}, B_{mnp}, D_{mnp}$ együtthatókat. Az együtthatókat itt nem írjuk fel, csupán irodalomban hivatkozunk (például az 5. irodalom).

A háromdimenziós Fourier soroknak térbeli periodikus jelenségek tárgyalásánál van nagy jelentőségük (például hullámterjedésnél, kristályszerkezetek röntgen vizsgálatánál, stb.).

A 47.a,b,...e formulák alapján azonnal felírhatjuk a háromnál több dimenziós periodikus függvények Fourier sorát, de ezek a gyakorlatban nem igen fordulnak elő.

9.3. A három- és többdimenziós Fourier integrál

A három- és többdimenziós Fourier sorok formuláiból származtatjuk $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z \dots \rightarrow \infty$ átmenettel a megfelelő Fourier integrál formuláit. De a kétdimenziós Fourier integrál komplex alakjából, a 18.b,c formulákból az analógia alapján azonnal felírhatjuk a végeredményt „n” dimenzió esetére. Így kapjuk $n=3$ esetén:

$$F(u, v, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \cdot e^{-j(ux+vy+wz)} dx dy dz \quad (48.a)$$

és fordítva:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v, w) \cdot e^{-j(ux+vy+wz)} du dv dw \quad (48.b)$$

Ha $n > 3$, akkor az exponenciális kitevők további tagokkal bővülnek, a 48.b formulában pedig a konstans szorzóban (2π) az n -ik hatványon szerepel.

A Fourier integrál jelentősége abban van, hogy tetszőleges alakú függvényt (kevés korlátozással) elemi szinusz függvények összegeként állít elő. Egydimenziós esetben az ismert szinusz függvények összegeként, többdimenziós esetben pedig az előzőekben ismertetett többdimenziós szinusz függvények összegeként. Többdimenziós esetben különösen fontos a 48.b formula, amelyben $e^{j(u_x+vy+wz)}$ egy $\hat{e}_1u+\hat{e}_2v+\hat{e}_3w$ hullámvektorú síkhullám. Tehát a 48.b Fourier integrál azt a tényt fejezi ki, hogy minden térbeli alakzat, hullám, síkhullámok, pontosabban háromdimenziós elemi szinusz hullámok összegeként állítható elő.

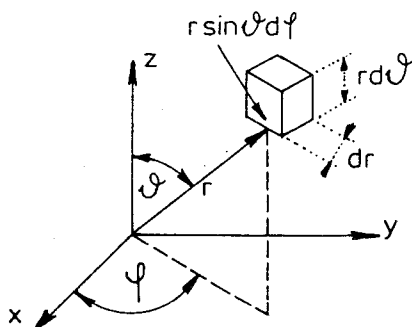
A háromdimenziós Fourier integrállal kapcsolatban is levezethetők a kétdimenziós esetben tárgyaltakkal analóg tételek, de ezeket itt helyhiány miatt mellőzzük. Csupán néhány kiegészítést teszünk.

a) Gömbszimmetrikus esetben a Fourier integrál formulái nagy mértékben egyszerűsödnek. Ilyenkor célszerű a 26. ábra szerinti gömbi koordináta rendszert választani. Itt:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad (49.a)$$

és az elemi térfogat az ábrából leolvashatóan:

$$dK = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr. \quad (49.b)$$



H596-26

26. ábra. A gömbi koordináta-rendszer

Írjuk fel ezeketán a 48.a formulát gömbi koordinátákban. A $dx dy dz$ elemi térfogat helyett a 49.b formulát írjuk, $f(x, y, z)$ helyett $f(r, \theta, \varphi)$ -it, $ux+vy+wz$ helyett $\vec{k} \cdot \vec{r}$ -et, $F(u, v, w)$ helyett pedig $F(\vec{k})$ -át. Az integrálás határait az új változóknak megfelelően vesszük fel. Így kapjuk:

$$F(\vec{k}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \theta, \varphi) e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr. \quad (50.a)$$

Gömbszimmetrikus esetben megszűnik a θ, φ -tól való függés. A φ szerinti integrálás 2π -it ad, tehát a fenti integrál az alábbi alakú lesz:

$$F(\vec{k}) = 2\pi \int_0^\infty f(r) \left[\int_0^\pi e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} r^2 \sin\theta \, d\theta \right] dr. \quad (50.b)$$

Mivel „ \vec{k} ” irány-független lett, $F(\vec{k})$ helyett $F(k)$ -át írunk. Az irány-függetlenség miatt elegendő k -át csak egyetlen irányban kiszámítani. Egyszerűen kapjuk meg k -át a „ z ” irányban. Ugyanis ha a \vec{k} vektor ebbe az irányba mutat, akkor $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos\theta$. Ezt behelyettesítve 50.b-be, a szögletes zárójelben lévő integrál egyszerűen számítható. $\eta = jkr$ új változó bevezetésével. Az egyszerű számítás eredményeképpen az integrál $2r \sin kr$ -nek adódik. Ezt behelyettesítve 50.b-be kapjuk:

$$F(k) = 4\pi \int_0^\infty f(r) r \sin kr \, dr. \quad (50.c)$$

És hasonló számításmenettel kapjuk fordítva:

$$f(r) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty F(k) k \sin kr \, dk. \quad (50.d)$$

b) A háromdimenziós Dirac impulzus csak egyetlen x_0, y_0, z_0 pontban vesz fel végtelen nagy értéket, mindenütt másutt zérus értékű. Tehát definíciószerűen:

$$\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \begin{cases} \infty, & \text{ha: } x=x_0, y=y_0, z=z_0 \\ 0, & \text{mindenütt másutt} \end{cases} \quad (51.a)$$

és:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) dx dy dz = 1. \quad (51.b)$$

A mintavételező tulajdonság:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \cdot \delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) dx dy dz = \\ = f(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (51.c)$$

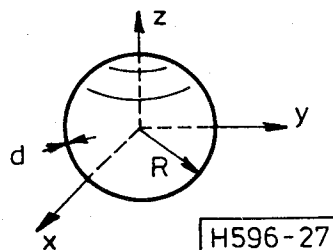
A spektrum:

$$K \cdot \delta(x, y, z) \leftrightarrow K \quad (51.d)$$

$$K \cdot \delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \leftrightarrow K \cdot e^{-j(\omega x_0 + \nu y_0 + w z_0)} \quad (51.e)$$

Formáink teljes összhangban vannak a kétdimenziós Dirac impulzus 34,35,36 formuláival.

Ha egy $f(x, y, z)$ függvény csak egy térgörbe vagy egy felület mentén vesz fel véges (vagy végtelen nagy)



H596-27

27. ábra. Vékony gömbhéj

értéket és mindenütt másutt zérus értékű, akkor vonal illetve felület-impulzusról beszélünk.

c) *Példák.*

1. *Példa.* Legyen a 27. ábra szerinti vékony gömbhéj tartományában $f(x, y, z) = A$ és mindenütt másutt zérus. Tehát:

$$f(r) = \begin{cases} A & \text{ha: } R < r < R+d \\ 0 & \text{mindenütt másutt} \end{cases}$$

Mivel példánkban gömbszimmetrikus alakzat szerepel, alkalmazhatjuk az 50.c formulát a spektrum kiszámításánál. Tehát:

$$F(k) = 4\pi \int_R^{R+d} Ar \sin kr \, dr$$

Ha $d \ll R$, akkor az integrál alatt $r \approx R$. Így kapjuk:

$$F(k) \approx 4\pi Ad \frac{\sin kR}{k} R. \quad (52)$$

Ha példánkban $d \rightarrow 0$ és $A \rightarrow \infty$, de $A \cdot d = \text{konstans}$, akkor a példánkban szereplő alakzat egy gömbfelület alapú háromdimenziós felület-impulzusba megy át és az 52. formula pontosá válik.

2. *Példa.* Legyen $f(r) = A$ ha $r < R$ és mindenütt másutt zérus. Tehát egy az „R” sugarú gömbön belül konstans értéket felvevő függvényről van szó. Határozzuk meg a spektrumát. Az 50.c formula alapján:

$$F(k) = \frac{4\pi A}{k} \int_0^R r \sin kr \, dr = \frac{4\pi A}{k^3} (\sin kR - kR \cos kR) \quad (53)$$

3. *Példa.* Határozzuk meg az $f(r) = Ae^{-a^2(x^2+y^2+z^2)} = Ae^{-a^2 r^2}$ három változós Gauss függvény spektrumát. Mivel a függvény gömbszimmetrikus, az 50.c formulával kapjuk:

$$F(k) = \frac{4\pi A}{k} \int_0^\infty r e^{-a^2 r^2} \sin kr \, dr = \frac{A\pi\sqrt{\pi}}{a^3} e^{-k^2/4a^2} \quad (54)$$

A fenti határozott integrált integráltáblázatból olvashatjuk ki, vagy pedig közvetlenül is kiszámíthatjuk, ha $\sin kr$ -et exponenciális alakban írjuk fel.

4. *Példa.* Határozzuk meg az $f(r) = A \frac{e^{-ar}}{r}$ függvény spektrumát. Szintén az 50.c formulával kapjuk:

$$F(k) = \frac{4\pi A}{k} \int_0^\infty e^{-ar} \sin kr \, dr = \frac{4\pi A}{a^2 + k^2} \quad (55)$$

5. *Példa.* Bizonyítsuk be, hogy 2. példánk, ha $R \rightarrow 0$, egy Dirac impulzusba megy át. A bizonyítás: az 53. formulában vagy az integrálban $\sin kr \approx kr$ -et írunk, vagy az

eredményben $\sin kr$ és $\cos kr$ sorainak első két tagját vesszük, eredményül kapjuk: $F(k) = 4\pi AR^3/3$, valóban független k -tól, tehát Dirac impulzusról van szó. Ebben az esetben $F(k)$ értéke azonos a köbtartalommal (a gömb köbtartalma szorozva A -val, tehát négydimenziós köbtartalomról van szó). Ha R csökkentésével A -t megfelelőképpen növeljük, akkor $A \rightarrow \infty$ -el egy ségnyi köbtartalmú Dirac impulzust kapunk, amelyre: $F(k) = 1$.

6. *Példa.* Bizonyítsuk be, hogy a 3. példában szereplő Gauss alakzat és a 4. példában szereplő exponenciális függvény a $\rightarrow \infty$ esetben szintén Dirac impulzusba megy át.

Összegzés

A Fourier analízis célja végső fokon egy függvénynek – amely lehet periodikus vagy aperiodikus – szinuszos függvényekre való felbontása. A felbontás a dimenzió számnak megfelelő dimenziójú szinuszos függvényekre történik, így egy dimenziójú függvények esetén a jól ismert szinuszos függvényekre, két és több dimenzió esetén a tárgyalat két- és többdimenziós szinuszos függvényekre. Bár a felbontás elve független a dimenzió számától, a felbontás bonyolultsága a dimenziószám növelésével rohamosan növekszik. Ennek oka, amint láttuk, hogy a hullámhossz helyébe a dimenzió számának megfelelő komponens-számú k hullámvektor lép.

Felmerül a kérdés, hogy hol van szükség a többdimenziós Fourier sorra és integrálra. Egy dimenzió esetén világos volt, hogy egy feladatban szereplő függvényeket szinuszos komponensekre bontva, és a feladatot az egyes szinuszos komponensekre megoldva – ami nyilván sokkal egyszerűbb probléma – a kívánt végeredményt ezen rész megoldások lineáris szuperpozíciójával kapjuk. Ugyanezen okból használhatjuk többdimenziós problémák megoldásánál a dimenzió számnak megfelelő dimenziójú szinuszos komponensekre való felbontást (például rezgő lemeznél kétdimenziós, rezgő testeknél, hullámterjedési problémáknál a háromdimenziós szinuszos függvényekre való felbontást).

Végül egy gyakori félreértésre kívánjuk felhívni a figyelmet. Ha $f(x, y, \dots)$ egy „n” változós függvény, mi ezt „n” dimenziós függvénynek is neveztük. Nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy az ábrázoláshoz $n+1$ dimenziós térre van szükségünk. Gondolja át az olvasó, hogy a tárgyalat két- és háromdimenziós esetekben hogyan kell értelmezni a függvényeket, az ábrázolásban a vonalakat, felületeket, köbtartalmakat. Különösen lényeges ez három dimenzió esetén, ahol a kép már nem szemléletes.

IRODALOM

- [1] R. Bracewell: The Fourier Transform and its Application, McGraw-Hill, 1965
- [2] D. C. Champeney: Fourier Transforms and their Physical Applications, Academic Press, London 1973

- [3] *J. D. Gaskill*: *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*, Wiley & Sons, New York 1978
- [4] *C. A. Coulson*: *Waves*, Oliver & Boyd, Edinburgh, London 1952
- [5] *W. Nowacki*: *Fourier Synthese von Kristallen und ihre Anwendung in der Chemie*, Verlag Birkhäuser, Basel 1952
- [6] *V. L. Sapiro*: *Fourier Series in Several Variables*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1964 Jan.
- [7] *E. M. Stein*: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971
- [8] *G. P. Tolstov*: *Rjadü Fourier*, Gosz. Izd. Tech. Teoreticeszkoj Literaturi, Moskva 1951
- [9] *A. Zygmund*: *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge 1959
- [10] *H. B. Dwight*: *Tables of Integrals*, The MacMillan Company, New York 1961