

A két- és többdimenziós Fourier sor és Fourier integrál (I. rész)

CEBE LÁSZLÓ

Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola

Összefoglalás

Cikkünk első részében a szinusz függvények két- és többdimenziós változatával foglalkozunk. Ezek alapján tárgyaljuk a két- és többdimenziós periodikus függvények Fourier sorát majd a két- és többdimenziós aperiodikus függvények Fourier integrálját. A matematikának ez a kevésbé ismert része alapvető fontosságú a hullámtanban és a fizika számos egyéb területén. Cikkünk második részében röviden kitérünk a többdimenziós Dirac impulzusra és a többdimenziós mintavételező függvényre. Ezeknek különös jelentősége van az egyre jobban tért hódító digitális képfeldolgozásban.

Bevezető

A fizikai problémák nagy része egydimenziós jellegű, csak egy független változó van, ami rendszerint az idő vagy a távolság. De sok fizikai probléma eleve többdimenziós tárgyalásmódot kíván. Ilyenek például egyes optikai jelenségek, a folyadékok és gázok áramlása, a hőterjedés, az elektromágneses hullámok terjedése, stb. Mindezeknek a problémáknak a tárgyalása szükségessé teszi a Fourier analízis több dimenzióra való kiterjesztését.

Amint az egydimenziós Fourier analízis alapja az egyszerű elemi szinusz függvényekre való felbontás, úgy a többdimenziós Fourier analízis alapja a többdimenziós szinusz függvényekre való felbontás.

1. A kétdimenziós szinusz függvény

Az egydimenziós szinusz függvény, ha a független változó idő illetve távolság dimenziójú:

$$f(t) = A \cos(\omega t - \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right) \quad (1.a)$$

illetve:

$$f(x) = A \cos(\omega_x x - \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \varphi\right) \quad (1.b)$$

ahol: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ [rad/s] illetve: $\omega_x = \frac{2\pi}{\lambda}$ a körfrekvencia,

T [s] és λ [m] pedig egyetlen periódus ideje illetve hossza. Az ω_x jelölés helyett gyakran „ k ” vagy „ k_x ” jelölést használnak. Így:

$$f(x) = A \cos(kx - \varphi) = A \cos(k_x x - \varphi) \quad (1.c)$$



CEBE LÁSZLÓ

1950-ben végzett a BME villamosmérnöki karán. Az egyetem elvégzése után a BHG átviteltechnikai osztályára került, majd az 1952-ben megalakult

átviteltechnikai fejlesztési osztályra. Ezen az osztályon dolgozott a BHG-ben, majd az ágazat átiprofilitózása után a Telefongyárban egészen 1987-ig nyugdíjba vonulásáig. 1978 óta a KKVMF Híradásipari intézetének a tanára. Számos cikket publikált és a főiskola részére megírta az „Átviteltechnika” és a „PCM Hírközlés” című jegyzeteket. Jelenleg a „Fényátvitel” jegyzete van nyomdában. Oktatási problémákkal, az oktatás reformjával a problémáival is foglalkozik. Jelen cikk egy tervezett nagyobb tanulmány egy fejezetének rövidített kivonata.

k -át hullámszámnak nevezzük, megadja az egységnyi hosszra eső periódusok számának a 2π -szeresét. (Az egységnyi hosszra eső periódusok számát is hullámszámnak nevezzük és a fizika számos területén gyakran használják a $k = 1/\lambda$ jelölést. Ezért az irodalom olvasásánál mindig célszerű tisztázni, hogy mit jelöl a szerző k -val).

Értelmezzük illetve terjesszük ki a szinusz függvényt kétdimenzióra. Kézenfekvőnek látszik a második „ y ” dimenziót az alábbi módon bevezetni:

$$z = f(x, y) = A \cos(k_x x + k_y y - \varphi). \quad (2)$$

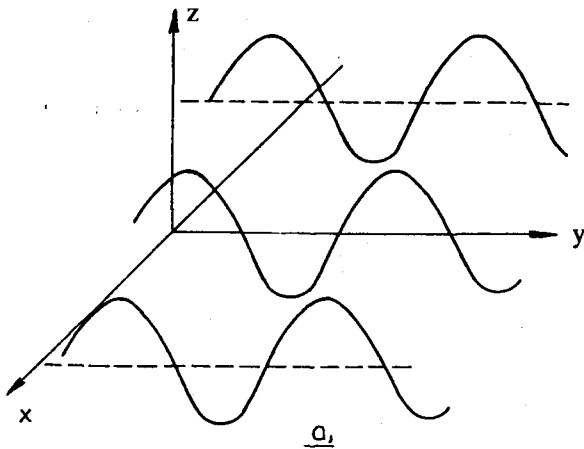
Két változós függvényről lévén szó, $f(x, y)$ egy felületet ír le. A felület geometriai ábrázolása nehézségeket okoz, ezért a felületeket metszetekkel vagy színtvonalakkal szoktuk szemléltetni. Például ha $x = x_1$ konstans, akkor az egyes metszetek:

$$[f(x, y)]_{x=x_1} = A \cos(k_y y - \varphi_1), \quad \text{ahol: } \varphi_1 = k_x x_1 - \varphi$$

Tehát minden metszet „ A ” amplitúdójú és $\lambda_y = 2\pi/k_y$ hullámhosszúságú egydimenziós szinusz függvény. Néhány ilyen metszetet az 1.a. ábra tüntet fel. Teljesen hasonlóan az $y = y_1$ konstanshoz tartozó metszetek „ A ” amplitúdójú, $\lambda_x = 2\pi/k_x$ hullámhosszúságú szinusz függvények. Mindkét esetben a szinusz függvények fázisa x_1 illetve y_1 vei lineárisan változik.

A színtvonalakat, vagyis a $z = \text{konstans}$ hoz tartozó vonalakat a 2. formulából

$$k_x x + k_y y - \varphi = C \text{ konstans}$$



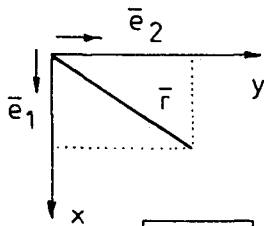
1. ábra: $Az = A \cos(K_x X + K_y Y - \varphi)$ függvény

egyenlőségből kapjuk. A fenti egyenlőség az x, y síkon párhuzamos egyeneseknek felel meg. A „b” ábrában feltüntettük, hogy a 2. formula szerinti kétdimenziós szinusz függvénynek az x, y síkon milyen egyenesek mentén van minimuma, maximuma és zérus helye.

$$C = (2r+1)\frac{\pi}{2}, r=0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ esetén: } z=0$$

$$C = 2r\pi \quad r=0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ esetén: } z = +A(\text{maximum})$$

$$C = (2r+1)\pi \quad r=0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ esetén: } z = -A(\text{minimum})$$

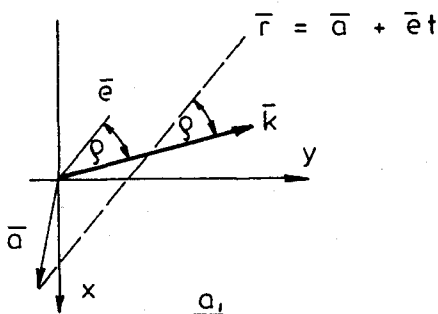


H596-2

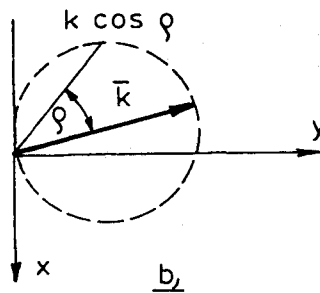
2. ábra: Koordinátarendszer.

a) A hullámvektor. Két- és többdimenziós problémáknál célszerű vektorokkal számolni. Az x, y síkban az egyes pontokhoz tartozó vektorok, a 2. ábra jelöléseivel:

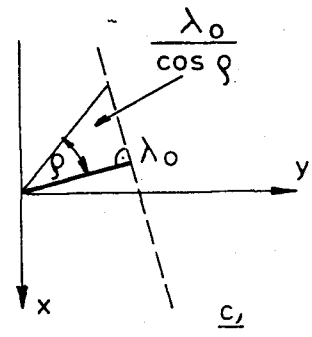
$$\vec{r} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y$$



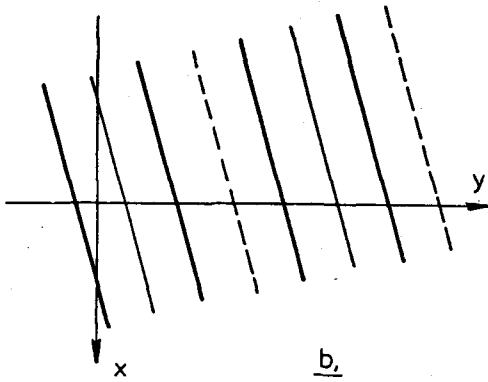
a1



b1



H596-3



— \vec{b}_1 Zérus helyek
 ——— Maximum "
 - - - Minimum "

H596-1

ahol \vec{e}_1 és \vec{e}_2 az x, y irányú egységvektorok. (Nem a szokásos i, j, k jelölést használjuk, mert a hullámszámot is „k”-val jelöljük).

Vezessük be a \vec{k} hullámvektort:

$$\vec{k} = \vec{e}_1 k_x + \vec{e}_2 k_y \quad (3)$$

A hullámvektor abszolút értéke:

$$|\vec{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

A \vec{k} és az \vec{r} vektorok skaláris szorzata:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y$$

A kétdimenziós szinusz függvény 2. formula szerinti kifejezésében éppen a fenti skalár szorzat áll. Tehát írhatjuk:

$$z = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) \quad (4.a)$$

A hullámteremben általában a fenti tömör írásmódot használjuk. A fenti formulával könnyen választ kapunk arra, hogy milyen alakú lesz „z” egy az x, y síkban lévő egyenes mentén. Legyen az egyenes egyenlete az x, y síkban:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{e}t$$

3. ábra: A hullámhossz és a hullámhossz változása ζ függvényében

ahol \bar{a} az egyenes egy pontja és \bar{e} az egyenes irányába mutató egységvektor, „t” pedig a paraméter. A 3.a ábrában tüntetjük fel az x,y síkot az egyenessel és a \bar{k} vektorral. Helyettesítsük be az egyenes egyenletét 4-be:

$$[f(x,y)]_e = f(t) = A \cos[\bar{k}(\bar{a} + \bar{e}t) - \varphi] = \\ = A \cos(\bar{k} \cdot \bar{e}t + \bar{k} \cdot \bar{a} - \varphi) = A \cos(k_e t - \varphi_e).$$

Azt a fontos eredményt kaptuk, hogy bármely irányú egyenes mentén $f(z)$ metszete egy „A” amplitúdójú szinusz függvény, amelynek a hullámszáma:

$$k_e = \bar{k} \cdot \bar{e} = k \cos \sigma$$

ahol: σ a \bar{k} és az \bar{e} vektor közötti szög és a hullámhossz:

$$\lambda_e = \frac{2\pi}{k_e} = \frac{2\pi}{k \cos \sigma} = \frac{\lambda_0}{\cos \sigma}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$$

ahol λ_0 a \bar{k} irányba eső hullámhossz és a kezdő fázis az a vektor végpontjától számítva:

$$\varphi_e = \bar{k} \cdot \bar{a} - \varphi$$

k_e és λ_e formulái megfelelnek a 3.b,c ábrák szerkesztéseinek. A „b” ábrában a \bar{k} vektorra mint átmérőre egy kört rajzoltunk. Húzzunk az origóból \bar{k} -hoz képest σ szög alatt egy egyenest. Az origó és a kör metszéspontja közötti távolság megadja k_e -ét, vagyis a hullámszámot az illető irányban. Hasonlóképpen a „c” ábra szerkesztése alapján kapjuk meg a hullámhosszat az illető irányban. Látszik, hogy \bar{k} valóban vektor, mert egy adott irányban k_e -ét a \bar{k} vektornak az ebbe az irányba eső komponense adja. Ezzel szemben λ nem vektor. Javasoljuk az olvasónak, hogy k_e és λ_e szerkesztését 1.b ábrában is végezze el. A kétdimenziós szinusz hullámot jól szemlélteti a vízben a hajót követő „V” hullám egyik szára, ha azt egy adott pillanatban megdermedve képzeljük. A hullámhossz a \bar{k} irányban a legkisebb, λ_0 értékű.

b) *A komplex írásmód.* Az egydimenziós szinusz függvényekhez hasonlóan a kétdimenziós szinusz függvényeket is felírhatjuk komplex alakban:

$$\cos(k_x x + k_y y - \varphi) = \operatorname{Re}[e^{j(k_x x + k_y y - \varphi)}] = \operatorname{Re}[e^{j(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi)}] \quad (4.b)$$

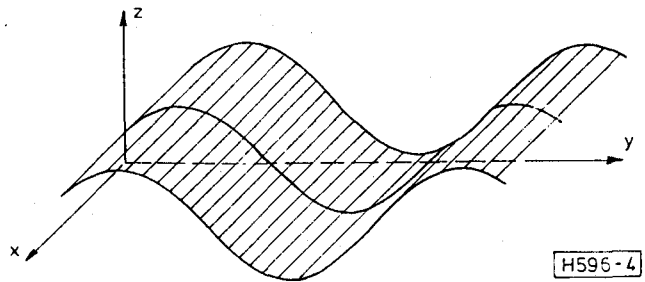
vagy pedig csak röviden $e^{j(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi)}$ -it írjuk, ahol mindig csak a valós részt vesszük számításba.

Itt jegyezzük meg, hogy a

$z = A \cos(k_x x - \varphi)$ illetve: $z = A \cos(k_y y - \varphi)$ függvények szintén két változós függvények, csupán k_y illetve k_x zérus értékű. A 4. ábra tünteti fel a második esetet.

A másik megjegyzésünk az, hogy bár k vektor mennyiség, ez nem jelenti azt, hogy k_1 és egy k_2 hullámvektorú hullámot összegezve, eredőül egy $k = k_1 + k_2$ hullámvektorú hullámot kapunk. Ugyanis:

$$\cos k_x x + \cos k_y y \neq \cos(k_x x + k_y y)$$



H596-4

4. ábra: $A z = A \cos(k_y y - \varphi)$ függvény

A vektoriális felbontás egy adott hullám különböző irányú metszeteire vonatkozik.

c) *A kétdimenziós szinusz-szorzat függvények.* Alkalmazzuk a 2. formulára az alábbi trigonometrikus képleteket:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (5.a)$$

Rövid számolás után kapjuk:

$$\begin{aligned} \cos(k_x x + k_y y - \varphi) &= \cos \varphi \cdot \cos k_x x \cdot \cos k_y y - \\ &\quad - \cos \varphi \cdot \sin k_x x \cdot \sin k_y y + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \end{aligned} \quad (5.b)$$

Amint látjuk, a $\cos(k_x x + k_y y - \varphi)$ függvény felbontható négy szorzat-függvényre. A továbbiakban az

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &= \cos k_x x \cdot \cos k_y y && (f_{22}(x, y) \text{ típus}) \\ s_2(x, y) &= \sin k_x x \cdot \sin k_y y && (f_{11}(x, y) \text{ típus}) \\ s_3(x, y) &= \sin k_x x \cdot \cos k_y y && (f_{12}(x, y) \text{ típus}) \\ s_4(x, y) &= \cos k_x x \cdot \sin k_y y && (f_{21}(x, y) \text{ típus}) \end{aligned} \quad (5.c)$$

függvényeket szintén alapvető kétdimenziós szinusz függvényeknek tekintjük. Elfajuló esetben, ha $k_x = 0$ vagy $k_y = 0$ vagy $k_x = k_y = 0$ akkor a

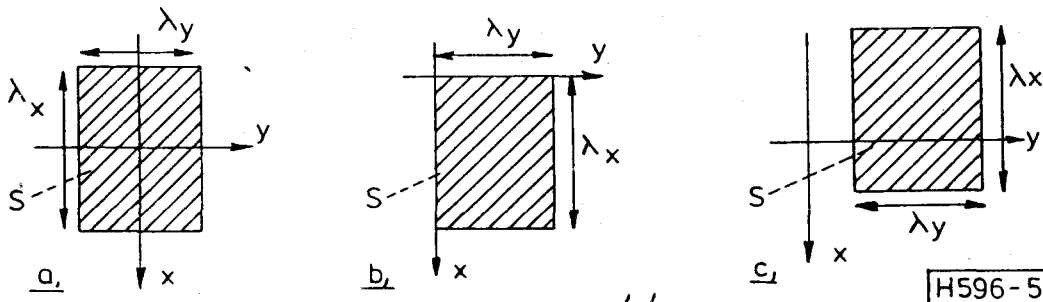
$$\cos k_x x, \cos k_y y, \sin k_x x, \sin k_y y, \text{ és „1”} \quad (5.d)$$

függvényeket kapjuk. Ügyeljünk arra, hogy ezek is kétdimenziós függvények, csupán az egyik változótól függetlenek. A $z = 1$ függvény pedig egy a $z = 1$ magasságban lévő síkot jelent.

Javasoljuk az olvasónak, hogy próbálja meg ábrázolni az 5.c formulák valamelyik $s(x, y)$ függvényét. Ezek a függvények minden $x = x_1$ vagy $y = y_1$ metszet mentén szinusz alakúak. De bármilyen más, az x,y síkban lévő egyenes mentén vett metszet nem szinusz alakú és esetleg nem is periodikus! Ez könnyen igazolható, ha bármelyik $s(x, y)$ függvényben például „y” helyébe az egyenes egyenletét, $y = ax + b$ helyettesítjük.

d) *Az ortogonalitás.* Defináljuk először az ortogonitás fogalmát. A kétdimenziós $s_1(x, y), s_2(x, y), s_3(x, y) \dots$ függvénytartomány ortogonális rendszert képez az x,y sík egy S tartományában, ha erre a tartományra:

$$\iint_S s_i(x, y) \cdot s_k(x, y) \, dx dy \begin{cases} = 0, & \text{ha } i \neq k \\ \neq 0, & \text{ha } i = k \end{cases} \quad (6.a)$$



5. ábra: Ortogonalitási tartományok

Könnyen igazolható, hogy az 5.c függvények ortogonális rendszert képeznek az x, y sík bármely téglalap alakú tartományában, amelynek a hossza az „ x ” illetve az „ y ” irányban $\lambda_x = 2\pi/k_x$ illetve $\lambda_y = 2\pi/k_y$. Az 5. ábrán három ilyen tartományt tüntetünk fel. Egy ilyen tartományra érvényesek az alábbi összefüggések (a tartomány határait az egyszerűség kedvéért a „b” ábrának megfelelően vettük fel):

Ha $k_x \neq 0$ és $k_y \neq 0$:

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} s_i(x, y) \cdot s_j(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ \frac{\lambda_x \lambda_y}{4}, & \text{ha } i = j \end{cases} \quad (6.b)$$

Elfajuló esetben, ha $k_x = 0$ vagy $k_y = 0$:

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} \cos^2 k_x x dx dy = \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} \sin^2 k_x x dx dy = \frac{\lambda_x \lambda_y}{2} \quad (6.c)$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha k_x helyett k_y szerepel.

Ha $k_x = k_y = 0$:

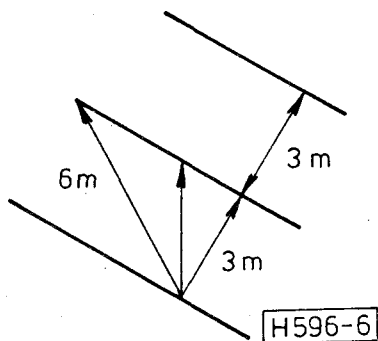
$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} dx dy = \lambda_x \lambda_y \quad (6.d)$$

Megjegyezzük, hogy az ortogonalitás akkor is fennáll, ha k_x és k_y helyett $m \cdot k_x$ és $n \cdot k_y$ szerepel és m, n egész számok.

e) Példák

1. példa. Egy hajó által keltett hullámok 3 méterenként követik egymást. Mi a hullámhossz a hullámok haladási irányához képest 30° , 60° és 90° alatt?

$\lambda_{30} = 3.46\text{m}$, $\lambda_{60} = 6\text{m}$, $\lambda_{90} = \infty$.



6. ábra: Hajó által keltett hullám

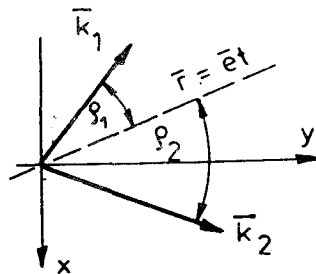
2. példa. Legyen két kétdimenziós szinuszfüggvény összege az alábbi formula szerinti:

$$f(x, y) = A \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + B \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi).$$

A k_1 és k_2 hullámvektorokat a 7. ábra tünteti fel. Határozzuk meg, hogy mi lesz $f(x, y)$ metszete az ábrán feltüntetett $\vec{r} = \vec{e}t$ egyenes mentén? Az egyenes és a \vec{k}_1, \vec{k}_2 vektorokkal zárt szög ζ_1 és ζ_2 . A metszet egyenlete:

$$[f(x, y)]_e = A \cos(t \cdot k_1 \cos \zeta_1) + B \cos(t \cdot k_2 \cos \zeta_2 - \varphi). \quad (7)$$

Itt: $|\vec{k}_1| = k_1$ és $|\vec{k}_2| = k_2$



H 596-7

7. ábra: Két szinuszhullám összege

Tehát két különböző hullámhosszúságú (frekvenciájú) szinuszjel összegét kaptuk.

3. példa. Határozzuk meg, hogy előző példánk esetén milyen irányokban kapunk tiszta szinuszjelet? Mivel előző példánk eredménye két szinuszjel összege volt, tiszta szinuszjelet csak akkor kapunk, ha mindkét jel hullámhossza azonos vagy pedig ha az egyik összetevő zérus vagy konstans. Tehát a 7. formulából, ha: $k_1 \cos \zeta_1 = k_2 \cos \zeta_2$ vagy ha $\zeta_1 = 90^\circ$ vagy: $\zeta_2 = 90^\circ$. Ez utóbbi esetekben a metszetek egyenlete:

$$f(t) = A + B \cos(t \cdot k_2 \cos \zeta_2) \text{ illetve}$$

$$f(t) = A \cos(t \cdot k_1 \cos \zeta_1) + B \cos \varphi$$

Példáinkból jól látszik, hogy bár \vec{k} vektor mennyiség, ez nem jelenti azt, hogy ezek a vektorok vektoriálisan összeadhatók. Hamis eredményt kaptunk volna, ha előbb \vec{k}_1 és \vec{k}_2 -t összeadjuk és utána az eredő \vec{k} -val jellemzett hullám metszeteit keressük.

f) Szimmetria tulajdonságok. A matematikai, fizikai problémák megoldása lényegesen egyszerűbbé válik, ha a jelenségeket leíró függvények valamilyen szimmetriát mutatnak. Vagy ha a leíró függvény nem szimmetrikus, sokszor előnyös, ha a probléma megoldását

a függvény szimmetrikus komponensekre való bontásával kezdjük. A szimmetria tulajdonságok ismerete különösen fontos a Fourier analízis tárgyalásánál. Egydimenziós függvényeknél jól ismert egy tetszőleges $f(x)$ függvénynek a páros és páratlan szimmetriát mutató részekre való felbontása:

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, ahol:

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{a páratlan rész}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{a páros rész} \quad (8)$$

Tehát a felbontás pontról pontra történik, mindig a szimmetrikusan elhelyezkedő, $\pm x$ -nél levő függvény értékekből.

Kézenfekvő a gondolat, hogy a kétváltozós $f(x, y)$ függvényeknél is hasonló felbontást alkalmazhatunk.

f.1) Az origóra való szimmetrikus felbontás. A 8. formulához hasonlóan írhatjuk:

$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, ahol:

$$f_1(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-x, -y)}{2} \quad \text{az origóra páratlan rész} \quad (9)$$

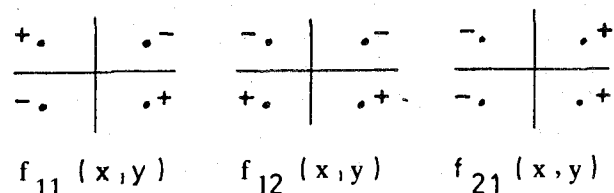
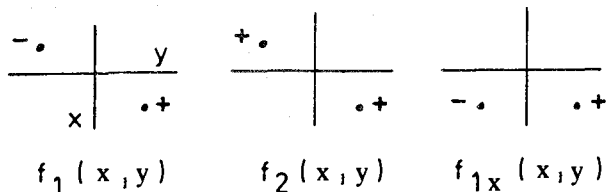
$$f_2(x, y) = \frac{f(x, y) + f(-x, -y)}{2} \quad \text{az origóra páros rész}$$

Kétváltozós függvények esetén azonban további szimmetriák is lehetségesek.

f.2) Az „x” tengelyre szimmetrikus felbontás. Az $f(x, y)$ függvényt felbonthatjuk az „x” tengelyre páros illetve páratlan szimmetriát mutató részre. Így:

$f(x, y) = f_{1x}(x, y) + f_{2x}(x, y)$, ahol:

$$f_{1x}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, -y)}{2} \quad \text{az „x” tengelyre páratlan rész} \quad (10)$$



$$f_{2x}(x, y) = \frac{f(x, y) + f(x, -y)}{2} \quad \text{az „x” tengelyre páros rész}$$

Hasonlóan bonthatjuk fel az $f(x, y)$ függvényt az „y” tengelyre vonatkoztatott páros és páratlan részre.

f.3) A legáltalánosabb felbontást akkor kapjuk, ha a 10-ben szereplő két függvényt újból felbontjuk az „y” tengelyre vonatkoztatva páros illetve páratlan részre. Így kapjuk:

$$f_{11}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-x, y) - f(x, -y) + f(-x, -y)}{4}$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-x, y) + f(x, -y) - f(-x, -y)}{4} \quad (11)$$

$$f_{21}(x, y) = \frac{f(x, y) + f(-x, y) - f(x, -y) - f(-x, -y)}{4}$$

$$f_{22}(x, y) = \frac{f(x, y) + f(-x, y) + f(x, -y) + f(-x, -y)}{4}$$

A fenti négy függvény összege természetesen megadja az eredeti $f(x, y)$ függvényt:

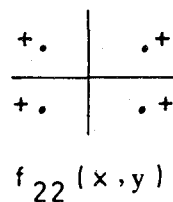
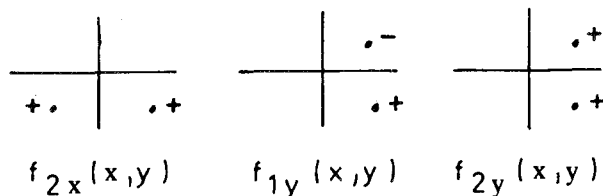
$$f(x, y) = f_{11}(x, y) + f_{12}(x, y) + f_{21}(x, y) + f_{22}(x, y) \quad (12)$$

és természetesen fennáll:

$$f_1(x, y) = f_{12}(x, y) + f_{21}(x, y) \quad \text{és} \quad f_2(x, y) = f_{11}(x, y) + f_{22}(x, y)$$

A kétváltozós függvények felbontásának a mechanizmusát összefoglalóan szemlélteti a 8. ábra. A felbontásnál kaptuk a 9,10,11 függvényeket, amelyek mind valamilyen szimmetriát mutatnak. Az ábrákon ezt a szimmetriát úgy érzékeltetjük, hogy az x, y síkon felvesszünk egy pontot (például a pozitív x, y negyedben) és feltüntetjük a szimmetrikusan elhelyezkedő pontot

8. ábra: Kétdimenziós függvény szimmetriái



H596-8

(pontokat). A pontok helyén a függvény értéke azonos, legfeljebb az előjele különbözhet. Az előjelet az egyes pontokban egymáshoz viszonyítva a pontok mellé írt előjellel tüntetjük fel. Megjegyezzük, hogy az egyes függvényeknél az „1” illetve „2” index a páratlan illetve páros szimmetriára utal.

Példa. Határozzuk meg, hogy az 5.c formulában az egyes függvények milyen szimmetriát mutatnak, melyik függvénycsoportba tartoznak. Az 5.c formulái mellett zárójelben tüntettük fel a megoldást. Javasoljuk az olvasónak, hogy grafikusán is próbálja felrajzolni ezeket a függvényeket és az ábrán próbálja szemléltetni a szimmetria tulajdonságokat. Ezek a függvények alapvető fontosságúak a Fourier analízisben és a hullámtanban.

2. A három- és többdimenziós szinusz függvény

A 4. formulában leírt $w = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$ szinusz függvény tetszőleges dimenziójú lehet, a dimenzió számot \vec{k} és \vec{r} dimenziója határozza meg. Így például három dimenzió esetén:

$$\vec{r} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y + \vec{e}_3 z \quad \text{és:} \quad \vec{k} = \vec{e}_1 k_x + \vec{e}_2 k_y + \vec{e}_3 k_z$$

Behelyettesítés után kapjuk:

$$w = f(x, y, z) = A \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi) = A \operatorname{Re}[e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi)}] \quad (13.a)$$

Mindjárt felírtuk a háromdimenziós szinusz függvény komplex alakját is. A komplex alakot röviden így is írjuk:

$$w = f(x, y, z) = A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)} = A e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi)} \quad (13.b)$$

ahol mindig csak a valós résszel számolunk.

A 13.a formulában egy összeg koszinusza szerepel. Az 1.c pontban ismertetett módon az 5.a trigonometriai összefüggésekkel a háromdimenziós szinusz függvényt is felírhatjuk szinusz-szorzat függvények összegként. A trigonometriai műveleteket elvégezve, az alábbi típusú szorzatokat kapjuk:

$$\left. \begin{array}{l} \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \\ \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z \\ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \end{array} \right\} 2^3 = 8 \text{ tag} \quad (13.c)$$

Mind a 13.a formula szerinti szinusz függvényt, mind a fenti szorzatokat alapvető háromdimenziós szinusz függvényeknek kell tekintenünk.

Nagyobb dimenzió-szám esetén a viszonyok rohamosan bonyolódnak. „n” dimenzió esetén az egyes szorzatokban a tényezők száma „n”, a tagok száma pedig 2^n .

Három illetve többdimenzió esetén az ábrázolás már nem lehetséges, mert négy- illetve többdimenziós térre volna szükség. Az ilyen függvényeket legfeljebb a metszeteikkel szemléltethetjük.

Példa. Határozzuk meg, hogy a 13.a formula milyen függvényt ad az $\vec{r} = \vec{a} + \vec{e}t$ egyenes mentén? Behelyettesítés után kapjuk:

$$f(t) = A \cos[\vec{k}(\vec{a} + \vec{e}t) - \varphi] = A \cos(k_e t - \varphi_e) \\ \text{ahol: } k_e = \vec{k} \cdot \vec{e} \quad \text{és: } \varphi_e = \vec{k} \cdot \vec{a} - \varphi$$

Példa. Határozzuk meg, hogy milyen függvényt ad a 13.a formula az $\vec{r} = \vec{a} + \vec{e}s + \vec{g}t$ sík mentén? Behelyettesítés után kapjuk:

$$f(s, t) = A \cos[\vec{k}(\vec{a} + \vec{e}s + \vec{g}t) - \varphi] = A \cos(k_e s + k_g t - \varphi_e) \\ \text{ahol: } k_e = \vec{k} \cdot \vec{e}, \quad k_g = \vec{k} \cdot \vec{g} \quad \text{és: } \varphi_e = \vec{k} \cdot \vec{a} - \varphi$$

Tehát egy kétdimenziós szinusz függvényt kaptunk.

Természetesen többdimenzió esetén is minden hullámszámhoz egy hullámhossz tartozik. Itt is például:

$$k_x = 2\pi/\lambda_x, \quad k_y = 2\pi/\lambda_y, \quad k_z = 2\pi/\lambda_z, \text{ stb.}$$

Háromnál nagyobb dimenzió szám igen ritkán fordul elő. $n > 3$ esetén is a 13.a formulából indulunk ki. T és \vec{k} helyébe a megfelelő dimenziójú vektort helyettesítve, a tárgyalásmód teljesen analóg a háromdimenzióval ismertetettel.

A többdimenziós szinusz függvények ismeretében megkezdhetjük a többdimenziós periodikus függvények Fourier sorának a tárgyalását.

3. Egyszeresen periodikus kétdimenziós függvény Fourier sora

Legyen a kétdimenziós $z = f(x, y)$ függvény a $-\infty < x < +\infty$ és a $0 < y < \lambda_y$ tartományban tetszőleges alakú és ez az alakzat ismétlődjön az „y” tengely irányában λ_y távolságonként. Az ilyen függvényt egyszerűen periodikusnak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az $f(x, y)$ függvénynek bármely $x = x_i$ konstanshoz tartozó metszete egy periodikus egydimenziós függvény, λ_y periódus hosszal, amelynek felírhatjuk a Fourier sorát. Az egydimenziós Fourier sor ismert alakja:

$$f(y) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 y + a_2 \cos 2\omega_0 y + \dots + b_1 \sin \omega_0 y + \dots$$

Esetünkben ω_0 helyébe $k_y = 2\pi/\lambda_y$ -ont kell írunk. Ezenkívül a_i, b_i adott x_i esetén konstans, de minden x_i -hez más és más értékű. Tehát a_i, b_i helyébe $a_i(x), b_i(x)$ -et kell írunk. Tehát a Fourier sor:

$$f(x, y) = a_0(x) + a_1(x) \cos k_y y + a_2(x) \cos 2k_y y + a_3(x) \cos 3k_y y + \dots + b_1(x) \sin k_y y + b_2(x) \sin 2k_y y + \dots \quad (14.a)$$

Ezzel megkaptuk az egyszerűen periodikus kétdimenziós függvény Fourier sorát, amely természetesen előállítja magát az eredeti $f(x, y)$ függvényt is. A Fourier

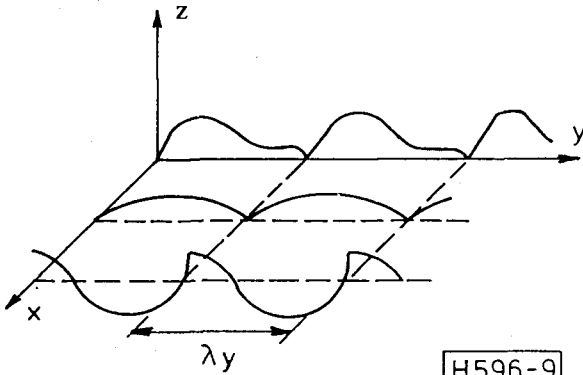
együtthatókat az egydimenziós Fourier sor formuláiból kapjuk:

$$a_0(x) = \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} f(x, y) dy$$

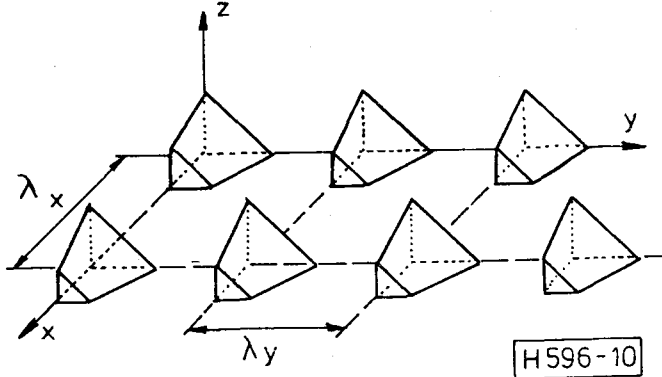
$$a_n(x) = \frac{2}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} f(x, y) \cos nk_y dy \quad (14.b)$$

$$b_n(x) = \frac{2}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} f(x, y) \sin nk_y dy$$

Ha az $f(x, y)$ függvény az „ x ” tengely irányában periodikus, akkor a fenti formulákban „ x ” és „ y ” helyet cserél.



9. ábra: Egyszeresen periodikus kétdimenziós függvény



10. ábra: Kétszeresen periodikus kétdimenziós függvény

4. Kétszeresen periodikus kétdimenziós függvény Fourier sora

Legyen az $f(x, y)$ függvény $0 < x < \lambda_x$ és $0 < y < \lambda_y$ tartományban tetszőleges alakú és ez az alakzat ismétlődően periodikusan az „ x ” és az „ y ” irányban. Egy példát a 10. ábra tüntet fel. Határozzuk meg egy ilyen periodikus függvény Fourier sorát. Ebben az esetben is minden további nélkül használhatjuk a 14.a, b formulákat. De további lépést jelent ha felismerjük, hogy az $a_n(x)$, $b_n(x)$ Fourier együtthatók periodikusan ismétlődnek az „ x ” tengely mentén, tehát ezeknek is felírhatjuk a Fourier sorát. Mivel a periodikus hossz az „ x ” ten-

gely mentén λ_x és mivel $\lambda_x = 2\pi/k_x$, a két Fourier sor lesz:

$$a_i(x) = a_{0i} + a_{1i} \cos k_x x + a_{2i} \cos 2k_x x + a_{3i} \cos 3k_x x + \dots + b_{1i} \sin k_x x + b_{2i} \sin 2k_x x + b_{3i} \sin 3k_x x + \dots$$

ahol: $i = 0, 1, 2, \dots$

$$b_i(x) = c_{0i} + c_{1i} \cos k_x x + c_{2i} \cos 2k_x x + c_{3i} \cos 3k_x x + \dots + d_{1i} \sin k_x x + d_{2i} \sin 2k_x x + d_{3i} \sin 3k_x x + \dots$$

ahol: $i = 1, 2, 3, \dots$ (15.a)

Helyettesítsük be a $a_i(x)$, $b_i(x)$ fenti Fourier sorát a 14.a formulába:

$$f(x, y) = a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mk_x x + b_{m0} \sin mk_x x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos nk_y y + c_{0n} \sin nk_y y) + \sum_{m=1n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y + b_{mn} \sin mk_x x \cdot \cos nk_y y + c_{mn} \cos mk_x x \cdot \sin nk_y y + d_{mn} \sin mk_x x \cdot \sin nk_y y) \quad (15.b)$$

A fenti formulában az első két összegezés az elfajuló csak k_x illetve k_y -ont tartalmazó tagokból áll. Ezeket is bevonhatjuk a kétszeresen összegező részbe a határok megváltoztatásával.

Így kapjuk:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y + b_{mn} \sin mk_x x \cdot \cos nk_y y + c_{mn} \cos mk_x x \cdot \sin nk_y y + d_{mn} \sin mk_x x \cdot \sin nk_y y) \quad (15.c)$$

$f(x, y)$, egy újabb alakját kapjuk, ha a fenti formulában a trigonometrikus szorzatokat trigonometrikus összegekre alakítjuk át. Például:

$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, stb. Helyettesítéssel az összevonások után kapjuk:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_{mn} - d_{mn}}{2} \cos(mk_x x + nk_y y) + \frac{b_{mn} - c_{mn}}{2} \sin(mk_x x - nk_y y) + \frac{b_{mn} + c_{mn}}{2} \sin(mk_x x + nk_y y) + \frac{a_{mn} + d_{mn}}{2} \cos(mk_x x - nk_y y) \right] \quad (15.d)$$

A fenti formulát egyszerűbben írhatjuk fel, ha bevezetjük „ n ” negatív értékeit és a második összegezést a $-\infty < n < +\infty$ tartományban végezzük. Így kapjuk:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_{mn} \cos(mk_x x + nk_y y) + B_{mn} \sin(mk_x x + nk_y y)]. \quad (15.e)$$

A szögletes zárójelben lévő két tag összevonható, tehát:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_{mn} \cos(mk_x x + nk_y y - \varphi) \quad (15.f)$$

ahol:

$$D_{mn} = \sqrt{A_{mn}^2 + B_{mn}^2} \quad \text{és} \quad \text{tg } \varphi = -\frac{B}{A}$$

Az összefüggés az A_{mn} , B_{mn} , D_{mn} és az a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} és d_{mn} együtthatók között a 15.d és az 15.e,f formulák összehasonlításából azonnal adódik.

A 15c és a 15d,e,f formulák a kétszer periodikus kétdimenziós függvények Fourier sorának két különböző alakját adják meg. A formulákból azt a fontos megállapítást tehetjük, hogy egy kétszer periodikus kétdimenziós $f(x, y)$ függvény kétdimenziós szinusz függvényekből összetettnek tekinthető. A 15.c formula az 5.c formula szerinti, a 15.d,e,f formula pedig a 2. formula szerinti alapvető kétdimenziós szinusz függvényekből állítja elő $f(x, y)$ -ont.

4. 1. A Fourier együtthatók meghatározása

Az a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , d_{mn} együtthatók egyszerűen meghatározhatók a kétdimenziós szinusz függvények ortogonális tulajdonságai alapján. Az egydimenziós Fourier sor együtthatóinak a meghatározásánál használt módszerhez hasonlóan, itt is a 15.b formula mindkét oldalát rendre megszorozzuk 1, $\cos mk_x x$, $\sin mk_x x$, ... $\sin mk_x x \cdot \sin nk_y y$ -al és mindkét oldalt integráljuk az 5. ábrán megadott ortogonális tartományok valamelyikében. A jobb oldalon az integrálás után csak egyetlen tag ad zérustól eltérő eredményt, amit a 6.b,c,d formulák megfelelőjéből számíthatunk. Így az integrálási tartománynak például az 5.b ábra szerinti tartományt véve kapjuk:

a) a_{00} meghatározása. Integráljuk a 15.b formula mindkét oldalát az ortogonális tartományban. Kapjuk:

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) dx dy = a_{00} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} dx dy = a_{00} \lambda_x \lambda_y$$

Eredményünket a 6.d formula alapján kaptuk. A többi tag integrálása zérust ad. Mindkét oldalt $\lambda_x \lambda_y$ -al osztva, kapjuk:

$$a_{00} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) dx dy \quad (16.a)$$

vagyis a_{00} megadja a felület átlagos magasságát.

b) $A \frac{\cos}{\sin} mk_x x$ és $a \frac{\cos}{\sin} nk_y y$ tagok együtthatóinak, vagyis

is a_{m0} , b_{m0} , a_{0n} és c_{0n} értékeit hasonlóan határozhatjuk meg. A 15.b formula mindkét oldalát a megfelelő cos illetve sin függvényvel megszorozzuk és mindkét oldalt az ortogonális tartományban integráljuk. Így a 6.c formula felhasználásával kapjuk, például a_{m0} esetén:

$$a_{m0} = \frac{2}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cos mk_x x dx dy \quad (16.b)$$

és hasonlóan számítjuk b_{m0} , a_{0n} és c_{0n} értékeit. A b_{0n} és c_{m0} , d_{0n} , d_{n0} együtthatók értéke zérus.

c) $A \frac{\cos}{\sin} mk_x x \cdot \frac{\cos}{\sin} nk_y y$ tagok együtthatóit, vagyis

a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} és d_{mn} értékeit, ha $m \neq 0$ és $n \neq 0$, a 15.b formula mindkét oldalát a megfelelő szinusz szorzattal szorozva, az ortogonális tartományban integrálva, a 6.b formula felhasználásával kapjuk. Tehát:

$$a_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y dx dy \quad (16.c)$$

$$b_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \sin mk_x x \cdot \cos nk_y y dx dy \quad (16.d)$$

$$c_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \cos mk_x x \cdot \sin nk_y y dx dy \quad (16.e)$$

$$d_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \sin mk_x x \cdot \sin nk_y y dx dy \quad (16.f)$$

4. 2. A kétdimenziós Fourier sor komplex alakja

Előző eredményeinket sokkal egyszerűbben és tömörebben – bár kevésbé szemléletesen – megkaphatjuk, ha a komplex írásmódot használjuk. A következőkben ezt ismertjük röviden.

Írjuk fel először az egyszer periodikus kétdimenziós $f(x, y)$ függvény Fourier sorát. Ha a periodicitás „y” tengely irányú, akkor a 14.a formula komplex alakja így írható:

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(x) e^{jnk_y y} \quad (17.a)$$

A fenti formula az egydimenziós Fourier sor komplex alakja. Kétszeresen periodikus kétdimenziós függvény esetén $C_n(x)$ is periodikus az „x” tengely mentén. A Fourier sora:

$$C_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{mn} e^{jm k_x x} \quad (17.b)$$

Helyettesítsük be $C_n(x)$ fenti alakját 17.a-ba. Kapjuk:

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} e^{j(mk_x x + nk_y y)} \quad (17.c)$$

Ezzel megkaptuk a 15.b,c,d,e,f formulákban szereplő Fourier sorok komplex alakját.

Számítsuk ki C_{mn} együtthatókat. $e^{-j(mk_x x + nk_y y)}$ -al szorozzuk meg a fenti formula mindkét oldalát és integráljuk mindkét oldalt az ortogonalitási tartományban. (A szimmetria kedvéért az ortogonalitási tartományt az 5.a ábra szerint vettük.) A jobb oldalon csak a C_{mn} -et tartalmazó tag ad zérustól eltérő eredményt, $C_{mn} \cdot \lambda_x \lambda_y$ -ont. (Itt m, n adott érték. A futó indexeket is m, n -el jelöltük, de ez nem okozhat félreértést.) Azt, hogy a többi tag zérust ad, könnyen igazolhatjuk, ha az egyes tagokban az exponenciális alakról áttérünk a trigonometrikus alakra és a valós és a képzetes részeket külön-külön integráljuk. Mindkét rész zérust ad. Tehát:

$$C_{mn} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{-\lambda_x/2}^{+\lambda_x/2} \int_{-\lambda_y/2}^{+\lambda_y/2} f(x,y) e^{-j(mk_x x + nk_y y)} dx dy \quad (17.d)$$

ahol $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A fenti formulából szükségszerűen következik, hogy

$$C_{-m, -n} = C_{mn}^* \quad (17.e)$$

Ugyanis a 17.d formulában m és n előjelét megváltoztatva, csak a képzetes előjele változik meg, tehát a konjugált értéket kapjuk.

C_{mn} általában komplex szám, legyen a következő alakú:

$$C_{mn} = \frac{A_{mn} - j B_{mn}}{2} \text{ és így: } C_{-m, -n} = \frac{A_{mn} + j B_{mn}}{2} \quad (17.f)$$

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $C_{m,-n}$ és $C_{-m,n}$ egymás konjugáltjai.

Bizonyítsuk be, hogy a kétdimenziós Fourier sor a 17.c formula szerinti komplex alakja valóban azonos az előzőleg levezetett formulákkal. A 17.c formula jobb oldalán vonjuk össze a $C_{m,-n}$ és $C_{-m,n}$ tagokat, „ n ”-ben tartjuk meg a $-m < n < +\infty$ -ig tartó összegezést. Ekkor az összevonásnál ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a C_{mn} és $C_{-m,-n}$ tagokat vonjuk össze. Az összevonás elvégzését az olvasóra bízunk (az exponenciális tagot először trigonometrikus alakra kell hozni, a szorzást elvégezni majd a tagokat összevonni). Felhasználva az $e^{jz} + e^{-jz} = 2 \cos z$ és: $e^{jz} - e^{-jz} = j 2 \sin z$ összefüggéseket kapjuk:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_{mn} \cos(mk_x x + nk_y y) + B_{mn} \sin(mk_x x + nk_y y)] \quad (17.g)$$

Valóban megkaptuk a 15.e formulát, amely ekvivalens a többi levezetett formulával.

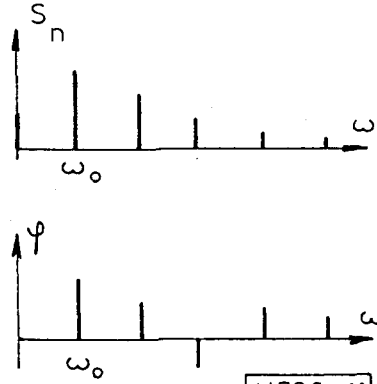
4.3. A kétdimenziós vonalas spektrum

Egydimenziós periodikus függvények esetén a spektrumot két féle módon ábrázolhatjuk: vagy megadjuk a „cos” és a „sin” összetevők amplitúdóját, vagy pedig

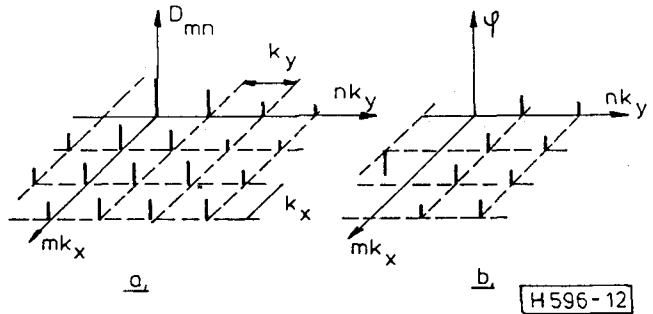
megadjuk az egyes komponensek amplitúdóját és fázisát. Emlékeztetőül a 11. ábrában tüntetünk fel egy ilyen spektrumot, ahol az egyes komponensek amplitúdóját és fázisát adjuk meg. A függőleges vonalak magassága arányos az amplitúdóval illetve a fázisszöggel. Megemlítjük még, a vízszintes tengelyt skálázhatjuk ω vagy „ f ”-ben.

A spektrumban szereplő diszkrét frekvenciák csakis ω_0 illetve f_0 -nak egész számú többszörösei lehetnek.

Ezenkívül a spektrumban számolhatunk csak pozitív vagy pozitív és negatív frekvenciákkal. (11. ábra)

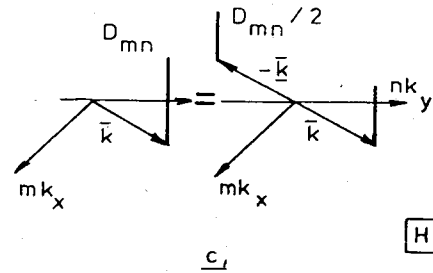
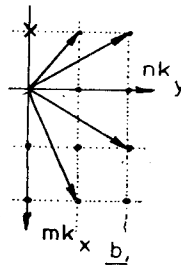
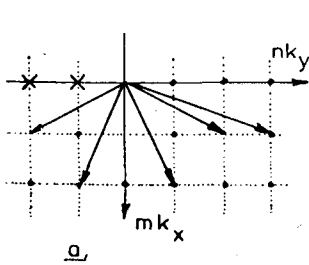


11. ábra: Egydimenziós vonalas spektrum



12. ábra: A kétdimenziós vonalas spektrum

Kétdimenziós esetben \bar{k} -nak a hullámvektor felel meg. Mivel \bar{k} kétdimenziós, az ábrázolásához egy síkra van szükség. \bar{k} két komponense k_x és k_y . A kétdimenziós Fourier sor diszkrét frekvenciáinak a driszkkrét hullámvektorok felelnek meg, a k síkon mk_x és nk_y komponensekkel. Tehát minden komponens a \bar{k} síkon egy-egy pontnak felel meg. Ezek a pontok a \bar{k} síkon egy szabályos hálót képeznek. A 12.a,b ábrák tüntetik fel a \bar{k} síkot. A spektrumot ezek után úgy ábrázoljuk, hogy a háló minden pontjában egy függőleges egyenest húzunk, amelynek a hossza azonos az illető hullámvektorhoz tartozó kétdimenziós szinus hullám amplitúdójával („a” ábra). A „b” ábrában pedig az egyes hálópontokban az illető hullám fázisszögével arányos függőleges egyenest húzunk. Ez a spektrum ábrázolás megfelel az A.15.f formula szerinti Fourier sornak. A spektrum ábrázolásának egy másik lehetséges módja,



H 596 - 13

13. ábra: a \bar{k} sík

ha a két k sík hálópontjaiban a 15.e formulában szereplő A_{mn} és B_{mn} értékeivel arányos hosszúságú egyeneseket húzunk függőleges irányban.

A figyelmesebb olvasónak valószínűleg feltűnt, hogy bár az „ x ” és az „ y ” irányú periodicitás teljesen egyrangú, a hozzájuk kapcsolódó „ m ” és „ n ” indexek nem egyformán szerepelnek a formuláinkban. Ennek csupán formai okai vannak. Ugyanis a kiindulásnál, a 14.a formulában először egy „ y ” irányú egyszeresen periodikus függvényből indultunk ki. Ha fordítva, az „ x ” tengely irányú periodicitásból indultunk volna ki, akkor a formuláinkban m és n szerepet cserélné. A végeredményen természetesen semmit sem változtat.

A \bar{k} sík világos képet ad a Fourier felbontás lényegéről. Vegyük például a 13.a ábra szerinti \bar{k} síkot. Az mk_x , nk_y -nal jellemzett pontok mind az egyes Fourier komponensek hullámvektorát adják meg, tehát jelzik, hogy milyen irányú kétdimenziós szinus hullámokból tevődik össze az $f(x, y)$ függvény. Az egyes vektorok hossza arányos az illető hullám frekvenciájával.

Az ábrából az is látszik, hogy az összes lehetséges \bar{k} vektor egy félsíkon helyezkedik el (ez megfelel annak, hogy egydimenziós esetben csak pozitív frekvenciákkal számolunk, amire a frekvencia tengelyen elegendő a pozitív fél-tengely). Ezért van az, hogy levezetett Fourier sorainkban a kettős, m és n szerinti összegzésnél az egyik összegezés 0 és ∞ , a másik pedig $-\infty$ és $+\infty$ között történik. Számítási módszerünkben az „ y ” tengely

alatti félsíkra volt szükség. Mint említettük, levezetésünkben az „ x ” tengely irányú periodicitásból is indulhattunk volna, akkor a \bar{k} vektorok a „ b ” ábra szerinti félsíkon helyezkednének el. A komplex számításmódnál szimmetria okokból a teljes \bar{k} síkot igénybe vesszük. Ez analógja annak, amikor egydimenziós esetben pozitív és negatív frekvenciákkal számolunk. A „ c ” ábra tünteti fel, hogy kétdimenziós esetben ez megfelel annak, hogy egy hullámvektort két ellenkező irányú hullámvektor eredőjének tekintünk, amelynek fele akkora az amplitúdója. Mindenesetre akkor az ellenkező irányú hullámvektorhoz tartozó amplitúdót kell ellenkező előjellel venni, vagy pedig a fázisát 180° -al eltoltatni.

Itt szeretnénk egy zavaró körülményre rámutatni. Ha csak a fél k síkkal számolunk, akkor is a síkot határoló egyenes mentén ellenkező irányú hullámvektorok lépnek fel. Például a „ a ” ábrában az „ y ” tengely mentén, $m=0$ esetén. Az x -el jelölt pontokban az amplitúdót zérusnak kell vennünk, ha el akarjuk kerülni, hogy mindenütt csak egy irányú hullámvektorokkal számolunk, kivéve az „ y ” tengelyt. Ez a tény a Fourier együtthatók számításánál is nehézséget okoz (ezért nem bonyolódunk bele a 15.e,f formuláknál az A_{mn} , B_{mn} , D_{mn} együtthatók kiszámításába). Ilyen feladatoknál mindig célszerű felrajzolni a \bar{k} síkot és azon is követni a számítások menetét.