Diszkrét idejű hálózatok számítógépes analízise II.

SOMOGYI GÁBOR

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk ismerteti az először Sannuti és Puri által publikált determinánskifejtő algoritmust, amely diszkrét idejű hálózatok félszimbólikus analízisének hatékony eszköze. A szerző megmutatja, hogy az algoritmus nem csupán a rendszeregyenlet előállítására alkalmas, de szisztematikus módszer adható a hálózatok állapotegyenleteinek felírására is. A cikk a szerző által e lap f. évi 3. számában megjelentetett cikk folytatása is egyben, így részben támaszkodik az ott levezetett eredményekre. Az ott ismertetett ANDI (ANother DIscrete Network Analyser) program a cikk megjelenése óta jelentősen bővült, többek között a jelen számban publikált eredmények felhasználásával, mely bővítésekről e cikk is számot ad.

SOMOGYI GÁBOR

Villamosmérnöki oklevelét 1989-ben szerezte meg a Budapesti Műszaki Egyetemen. Ugyanez évben tudományos diákköri tevékenységéért elnyerte az MTA "Pro scientia" aranyérmét és az MHB "A magyar műszaki haladásért" pályázatának díját. Jelenleg az MTA ösztöndíjasa. Szakterülete hálózatok számítógépes analízise.

Bevezetés

Az ANDI program első változata 1989 februárjában került alkalmazásra az oktatásban, (a Budapesti Műszaki Egyetemen az Elméleti Villamosságtan tárgy keretében) és azóta sok igény merült fel a program továbbfejlesztésére. A megadható hálózatok méretének növelésén és apró technikai változásokon túl a következőkre volt igény:

- szükségessé vált hálózatok grafikus megadásának biztosítása, a hálózatok kapcsolási rajz alapján történő analízise;
- hálózatok összefűzésének, részhálózatok megadásának lehetősége, melynek segítségével alapkapcsolások sora építőelemként tárolható és felhasználható összetettebb hálózatok építőelemeiként;
- a hálózat időtartományi szimulációja mellett a működés alaposabb vizsgálatához a bemeneti és kimeneti jelek Diszkrét Fourier Transzformáltjának (DFT) megjelenítése volt szükséges, amelyhez egy FFT eljárás beépítése kellett;
- végül szükség volt a vizsgált hálózatok állapotegyenleteinek előállítására. (melyek pl. alkalmasak a hálózat numerikus stabilitásának vizsgálatára is [3].)

A cikk ez utóbbi probléma megoldását, az állapotegyenletek előállítására alkalmazott módszert ismerteti.

Az átviteli függvény előállítása

Az ANDI program a diszkrét idejű hálózatok félszimbólikus, Z tartományi, csomóponti analízis segítségével állítja elő a hálózat W (z) átviteli függvényét. Az analízis utolsó lépése során válik szükségessé a $\underline{\underline{K}}$ csomóponti mátrix determinánsának kiszámítása. Az [1]-ben részletesen levezetett algebrai formulák alapján az alábbi eljárás adható $\underline{\underline{K}}$ felépítésére.

Feltételezzük, hogy adott a hálózat csomóponti leírása, amely rögzíti az elemek elrendezését (a hálózat topológiáját) és megadja a szorzók paramétereit. E leírás alapján állítjuk elő $\underline{\underline{K}}$ mátrixot, először létrehozva egy megfelelő méretű zérus mátrixot, majd e mátrix egyes elemeit lépésről-lépésre módosítjuk $\Delta K_{i,j}$ értékekkel, a $K_{i,j} := K_{i,j} + \Delta K_{i,j}$ kifejezés szerint.

$\underline{\underline{K}}$ felépítésének lépései

1. Hozzuk létre a $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{0}}$ mátrixot, melynek mérete legyen (N=1)x(N+1), ahol N a hálózat csomópontjainak száma.
2. $\Delta K_{i,j} := 1 \qquad i = 1,2,\ldots(N+1)$
3. $\Delta K_{j,i} := -m_k$ minden olyan (i,j) számpárra, ahol a hálózati i-ik és j-ik csomópontja közt szorzó elem van. A szorzó paramétereit m_k jelöli.
4. $\Delta K_{j,i} := z^{-1}$ minden olyan (i,j) számpárra, ahol a hálózat i-ik és j-ik csomópontja közt késleltető elem van. Itt z^{-1} jelöli a késleltetésnek megfelelő szimbólumot Z tartományban.
5. $\Delta K_{i,N+1} := -1$, ahol i a hálózat bemeneti csomópontja
6. $\Delta K_{N+1,i} := -W^{-1}$, ahol j a hálózat kimeneti csomópontja. Itt a W szimbólum a hálózat átviteli függvényét jelöli.

Ahhoz, hogy az [1]-ben leírtaknak megfelelően meg lehessen oldani az így felépített, speciális (z^{-1} és W^{-1}) szimbólumokat tartalmazó $\underline{\underline{K}}$ mátrix esetén a

$$\det(\underline{\underline{K}}) = 0 \tag{1}$$

egyenletet, speciális determináns kifejtő algoritmus szükséges.

Beérkezett: 1990. III. 8. (*)

A Sannuti - Puri algoritmus

A Sannuti - Puri algoritmus (továbbiakban S-P algoritmus) nem $\underline{\underline{K}}$ mátrix adatain dolgozik, hanem egy olyan $\underline{\underline{R}}$ mátrixból határozza meg $\underline{\underline{K}}$ determinánsát, amely $\underline{\underline{R}}$ mátrix leírja $\underline{\underline{K}}$ struktúráját. $\underline{\underline{R}}$ csupán azt az információt tárolja $\underline{\underline{K}}$-ról, hogy $\underline{\underline{K}}$ mely eleme tartalmaz 0 értéket és mely eleme nem. Az S-P algoritmus általában akkor hatékony, ha $\underline{\underline{K}}$ sparse (ritkás) mátrix, amely hálózatanalízis problémáknál csaknem mindig fönnáll. Az S-P algoritmus három fő lépésre bontható:

1. $\underline{\underline{R}}$ felépítése
2. $\underline{\underline{K}}$ determinánsának előállítása szorzat összegek formájában
3. A szorzat csoportok összegzése előjelük megállapítása után.

Az algoritmus működésének demonstrálásához az 1. ábra hálózatának analízisét mutatjuk be. A hálózathoz előállított K mátrix (N=3):

$$\underline{\underline{K}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -z^{-1} & -1 \\ -m_1 & 1 & -m_2 & 0 \\ 0 & -z^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -W^{-1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -z^{-1} & -1 \\ -0,1 & 1 & -0,3 & 0 \\ 0 & -z^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -W^{-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$\underline{\underline{R}}$ felépítési szabálya: $\underline{\underline{R}}$ j-ik oszlopa tartalmazza rendre a $\underline{\underline{K}}$ j-ik oszlopa nem zérus elemeinek i indexét:

$$\underline{\underline{R}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$\underline{\underline{K}}$ determinánsának szorzat összegeit úgy állítjuk elő, hogy megkeressük az összes lehetséges utat $\underline{\underline{R}}$ bal oldali oszlopától jobb oldali oszlopáig úgy, hogy oszlopról-oszlopra csak olyan helyre léphetünk $\underline{\underline{R}}$-ben, amelyen még fel nem használt 0-tól különböző szám áll. Minthogy $\underline{\underline{R}}$-ben 1-től (N+1)-ig fordulnak elő természetes számok, így (N+1) elemű számsorozatokat kapunk, melyek keverve tartalmazzák az 1..(N+1) számokat (az 1..(N+1) számok egy permutációját).

A példából adódó sorozatok:

$$\begin{array}{lcccc} S_1: & 1 & 2 & 3 & 4 \\ S_2: & 1 & 3 & 2 & 4 \\ S_3: & 2 & 3 & 1 & 4 \\ S_4: & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

E sorozatok $\underline{\underline{K}}$ elemeinek egy-egy szorzatát azonosítják. Például egy sorozat 2. elemeként álló 3. érték azonosítja $K_{3,2}$ elemet, így például S_3 jelentése:

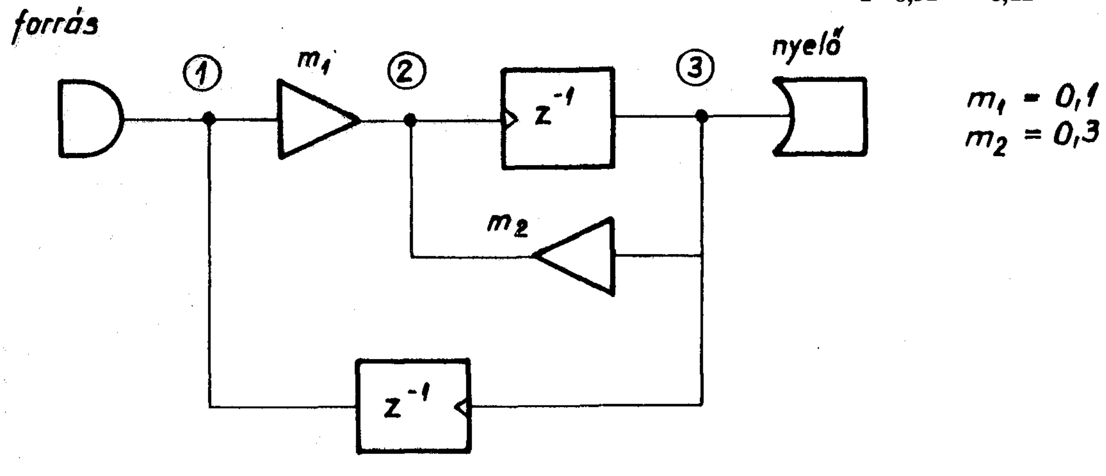
$$K_{2,1}\cdot K_{3,2}\cdot K_{1,3}\cdot K_{4,4}=(-0,1)\cdot(-z^{-1})\cdot(-z^{-1})\cdot 1$$

A szorzat csoportok összegezése előtt egy-egy előjelet rendelünk egy-egy S_i sorozathoz: egy sorozat előjele pozitív, ha elemeinek sorbarendezéséhez páros számú felcserélési lépés szükséges (ahol egy felcserélési lépés két szomszédos elem felcserélését jelenti). Ha e lépések száma páratlan, a sorozathoz negatív előjelet rendelünk. (Más megfoglamazásban: ha az adott permutáció inverziószáma páros, az előjel legyen pozitív, egyébként negatív. Az inverziószám megállapításáról [4]-ben részletes leírás található). Végeredményként az alábbi összeget kapjuk, mely (1) szerint zérus:

$$\det(\underline{\underline{K}})=+S_1-S_2+S_3-S_4=1-(-z^{-1})(-0,3)+$$
$$+(-0,1)(-z^{-1})(-z^{-1})-(-0,1)(-z^{-1})(-W^{-1})(-1)=$$
$$=1-0,3z^{-1}-0,1\cdot z^{-2}-0,1\cdot z^{-1}\cdot W^{-1}=0 \qquad (4)$$

Amiből az átviteli függvény adódik:

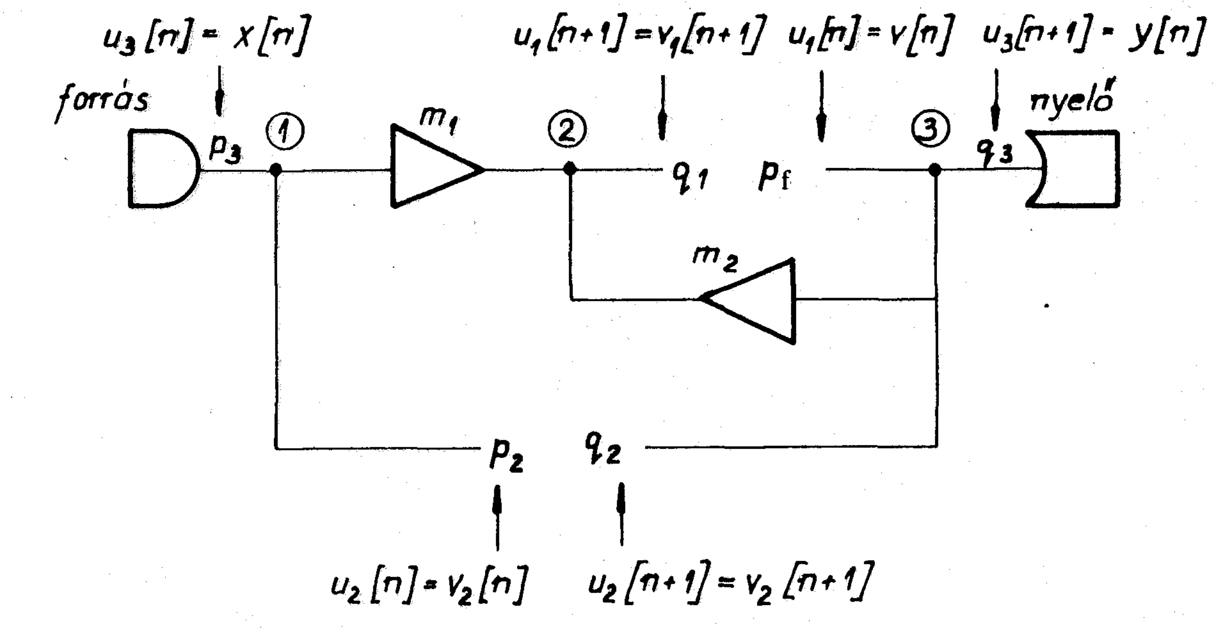
$$W=\frac{0,1\cdot z^{-1}}{1-0,3z^{-1}-0,1z^{-2}} \qquad (5)$$



$$W(z)=\frac{m_1 z^{-1}}{1-m_2 z^{-1}-m_1 z^{-2}}=\frac{0,1 z^{-1}}{1-0,3z^{-1}-0,1z^{-2}}$$

H591-1

1. ábra. Diszkrét idejű mintahálózat és átviteli függvénye



$$\begin{pmatrix} u_1[n+1] \\ u_2[n+1] \\ u_3[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 & m_1 & m_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \\ u_3[n] \end{pmatrix}$$

2. ábra. Diszkrét idejű hálózat felbontása az állapotegyenletek felírásához

H591-2

Az állapotegyenletek előállítása

Az ANDI program továbbfejlesztésénél rendelkezésre állt a fent ismertetett algoritmus, így a program továbbfejlesztésénél fontos cél volt, hogy - amennyiben ez lehetséges - ugyanezt az algoritmust alkalmazzuk az állapotegyenletek előállítására.

Egy diszkrét hálózatban az állapotegyeneletek felírhatók úgy, hogy a hálózat késleltető elemeinek kimeneti jeleit ($\underline{v}[n]$jelek) tekintjük állapotváltozóknak. Ekkor a keresett állapotegyenletek (időtartományban)

$$\begin{aligned} \underline{v}[n+1] &= \underline{\underline{A}}\, \underline{v}[n] + \underline{B}\, x[n] \\ y[n] &= \underline{C}^T \underline{v}[n] + D\, x[n] \end{aligned} \qquad (5)$$

A fenti egyenletrendszer összevont alakba is írható.

$$\begin{matrix} \underline{v}[n+1] \\ y[n] \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{\underline{A}} & \underline{B} \\ \underline{C}^T & D \end{matrix} \quad \begin{matrix} \underline{v}[n] \\ x[n] \end{matrix} \qquad (7)$$

Ezzel a bemeneti és kimenti jeleket (x[n] és y[n]) bevontuk az állapotváltozók közé. Jelölje a továbbiakban (7) jobb oldalának konstans mátrixát $\underline{\underline{S}}$, a jelenbeli állapotvektort $\underline{u}[n]$, a "jövőbenit" $\underline{u}[n+1]$.

Ezzel az állapotegyenlet:

$$\underline{u}[n+1] = \underline{\underline{S}}\, \underline{u}[n] \qquad (8)$$

Értelmezzük $\underline{\underline{S}}$ egy elemét, S_{ij}-t. Az S_{ij} elem megmutatja, hogy az állapotvektor i-ik elemének következő értéke ($u_i[n+1]$) hogyan függ az állapotvektor j-ik elemének jelenlegi ($u_j[n]$) értékétől.

Ehhez az értelmezéshez fizikai interpretáció is rendelhető. Jelölje p_i az $u_i[n]$ megfigyelési helyét (az i-ik késleltető elem kimenetét vagy a bemeneti csomópontot és jelölje q_j az $u_j[n+1]$ megfigyelési helyét (a j-ik késleltető elem bemenetét vagy a kimeneti csomópontot.) Emeljük most ki az összes késleltető elemet a hálózatból, de tartsuk meg a hálózat minden csomópontját (az esetleg magányosan maradó csomópontokat is). Az így kapott hálózat segítségével S_{ij} úgy értelmezhető, mint p_i és q_j csomópontok közti átvitel, p_i-től q_j felé haladó irányban (*lásd példaképp a 2. ábrát*). Ennek az értelmezésnek az alapján állítja elő az ANDI program az állapotegyenletet, azaz az $\underline{\underline{S}}$ mátrix elemeit, a következőképp:

- feljegyzi az összes p_i és q_j csomópontokat;
- törli a hálózat leírásából a késleltetőket, valamint a ki- és bemeneti pontokat;
- minden lehetséges (p_i, q_j) párra végrehajtja az S-P algoritmust, azzal a feltételezéssel, hogy a hálózat

bemenete p_i kimenete pedig a q_j csomópontban van.

Az S-P eljárás miden futtatása így egy-egy S_{ij} értéket állít elő.

A realizálhatóság ellenőrzése

Az állapotegyenletek ilyen módon történő előállítása több előnnyel bír:

- programozástechnikai nyereség, hogy az ANDI gerincét alkotó eljárások lényeges módosítás nélkül alkalmazhatók az állapotegyenletek előállítására;
- az S-P algoritmus többszöri futtatások során $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{R}}$ mátrixok csaknem azonosak, csak két-két elemük változik. Ezt kihasználva jelentős időmegtakarítás érhető el;
- az állapotegyenéletek előállítása közben felismerhetővé válnak a nem realizálható, késleltetés nélküli hurkot tartalmazó hálózatok (melyek előállhatnak bizonyos tervezési eljárások eredményeként).

Ez utóbbi tulajdonság a következőképp igazolható: egy késleltetés nélküli hurkot tartalmazó hálózatból elhagyva a késleltető elemeket, a nem realizálható hurok megmarad. Ezután bármely két, a hurokhoz szorzó elemmel csatlakozó, vagy hurokban résztvevő (p_i, q_j) csomópontok közti átviel generálásakor az S-P algoritmus által előállított átvitel 1-től különböző nevezőt fog tartalmazni. (Ez azonban már a szorzat csoportok előállítása közben ellenőrizhető.) Ugyanakkor késleltetés nélküli hurkot nem tartalmazó hálózatokra minden S_{ij} nevezője egységnyi marad. Ezzel pedig a késleltetés nélküli hurkok detektálhatók.

Összegzés

A cikben ismertetésre került S-P algoritmus az ANDI futtatásai során hatékony eszköznek bizonyult mind az átviteli függvény, mind pedig az állapotegyenletrendszer előállításnál, így az ANDI 1990. februárjától új funkcióval kibővítve került alkalmazásra a BME-en, az oktatásban.

IRODALOM

[1] *Somogyi Gábor:* Diszkrét idejű hálózatok számítógépes analízise Híradástechnika 1990.3. szám

[2] *Sannuti P.-Puri N.N.:* Symbolic Network Analysis. An algebraic formulation. IEEE Trans. on Circ. and Syst. 1980. aug.

[3] *Vitályos András:* Diszkrét hálózatok stabilitása Magyar elektronika 1988. április, 58-61. oldal

[4] *Knuth D.E.:* A számítógépprogramozás művészete 3. kötet (Keresés és rendezés) 25-33. oldal Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1988.

Azon irodalmakat, amelyekre jelen cikk nem, de e cikk első része hivatkozik, [1] irodalomjegyzéke tartalmazza.