Nullátor norátor páros kvázireguláris hálózatok

Dr. PÁVÓ IMRE
MTA Automataelméleti Tanszéki Kutató Csoport, Szeged

ÖSSZEFOGLALÁS

Lineáris hálózatok nullátor norátor páros modellezésénél előfordul, hogy a szerkesztett modell megoldható ugyan, de nem egyértelműen. Ilyen modellek analízisére az irodalomban eddig ismertetett eljárások nem alkalmazhatóak.
E cikkben definiáljuk a kvázireguláris, hálózatot, mint a nullátor norátor páros modellek között a leggyakrabban előforduló nem egyértelműen megoldható hálózatot. A kvázireguláris hálózat legfontosabb tulajdonságainak megvizsgálása után a hálózat megoldását visszavezetjük reguláris hálózat megoldására, amelyek már az irodalomban leírt módszerekkel megoldhatók. Példákon mutatjuk meg, hogyan lehet egy modellről eldönteni a kvázireguláritást, majd egy számítógépes eljárást javasolunk e tulajdonság kimutatására. Végül utalunk a kvázireguláris hálózatok általánosíthatóságára.

Dr. PÁVÓ IMRE

matematika-fizika szakos tanári oklevelét 1955-ben a Szegedi Tudományegyetemen, villamosmérnöki oklevelét 1967-ben a Budapesti Műszaki Egyetemen szerezte. 1968-ban a JATE-n egyetemi doktori címet, 1973-ban pedig a műszaki tudomány kandidátusa fokozatot nyerte el. Kandidátusi disszertációjának témája lineáris hálózatok tervezése topológia formulákkal. Az MTA Automataelméleti Tanszéki Kutató Csoport tudományos főmunkatársa, ahol alkalmazott gráfelméleti módszerek kutatásával foglalkozik, különös tekintettel absztrakt lineáris rendszerek számítógépen implementálható tervezésére. A JATE címzetes egyetemi docense, oktatómunkát az egyetemen biológus, programozó matematikus és fizikus képzésben fejt ki.

Bevezetés

Lineáris hálózatok számítógépes tervezéséhez a nullátorok és a norátorok használata számos előnnyel jár. Nullátorok és norátorok bevezetésével csatolt kétkaput (vezérelt generátorokat, ideális transzformátort, negatív impedancia konvertert, girátort, műveleti erősítőt stb.) tartalmazó hálózatot olyan hálózattá lehet átalakítani, amelynek építőkészlete az eredetinél lényegesen kevesebb elemszámú, azaz forrásgenerátorokon kívül csak RLC elemeket és nullátor norátor párokat tartalmaz, a csatolások paramétereit az RLC elemek paraméterei tartalmazzák, ugyanakkor a kapott hálózatmodell gráfja mindig összefüggő. Az ilyen hálózatmodell numerikus analízise kidolgozott, lefolytatásához egyszerű számítógépes programok szerkeszthetőek. Lehetséges nullátor norátor páros hálózatmodellből az eredeti hálózat egyértelmű megoldhatóságának eldöntése. Végül nullátor norátor páros hálózat szintézis probléma megoldására is felhasználható (pl. realizálás ideális tranzisztorral).

Nullátor norátor páros hálózatmodell általában úgy készül, hogy az eredeti hálózatban szereplő csatolt kétkapu hálózatrészeket azok nullátor norátor páros modelljére cseréljük fel. Kétkapu hálózat nullátor norátor páros modellje ([1], [3], [6]) általában többféleképpen előállítható, adott esetben eldönthető, hogy a feladat szempontjából a modellkészlet melyik modelljét vegyük figyelembe. Az így kapott hálózatmodell analízise az irodalomból ismert módszerek valamelyikével lefolytatható ([6], [4], [5]). Az analízis lefolytathatóságának feltétele, hogy legyen a modell gráfjának olyan kifeszítő fája, amely a modell elemeinek alkalmas osztályozását lehetővé teszi ([7]).

Tekintsünk egy egyértelműen megoldható lineáris hálózatot. Nyilván a hálózat nullátor norátor páros modellje nem lehet ellentmondásos. Ha a hálózatmodell egyértelműen megoldható, akkor szükségképpen létezik magja ([9]), ennek következménye, hogy létezik a hálózatgráfnak az analízis lefolytatásához alkalmas kifeszítő fája.

Előfordulhat azonban, hogy egyértelműen megoldható hálózat modellje nem egyértelműen megoldható nullátor norátor páros hálózat. Példaként tekintsük az 1. ábrán látható hálózatot, amely egy U forrásfeszültség generátorral meghajtott nem átmenő földes áttételű feszültségvezérelt feszültséggenerátor. Jóllehet az eredeti hálózat egyértelműen megoldható, a modell egyik norátorának feszültsége határozatlan. Ugyanakkor azonban egy másik norátor elem feszültségétől eltekintve a modell minden elemének feszültsége és árama egyértelmű és független a határozatlan norátorfeszültségtől. A modell pontosan visszaadja az eredeti hálózatot, mert bármely bemenet és kimenet pont potenciálja egymástól független, és a modell karakterisztikája megegyezik az eredeti hálózat karakterisztikájával. Így a modell az analízis számára felhasználható. Az irodalomból ismert módszerek azonban most nem alkalmazhatóak, mert nincs a hálózatgráfnak az analízis számára alkalmas kifeszítő fája. Hasonlóan nem egyértelműen megoldható hálózatmodellre vezetnek az irodalomban szereplő összes nem átmenő földes kétkapu hálózatmodellek.

E dolgozatban olyan nem egyértelműen megoldható nullátor norátor páros hálózatokkal foglalkozunk,

Beérkezett. 1989. VII. 5.(H)

amelyek egyértelműen megoldható hálózatok modellezésénél előfordulnak. Vizsgáljuk azoknak a nullátor norátor páros hálózatoknak osztályát, amelyekbe ezek a hálózatok tartoznak. Megadjuk a nem egyértelmű megoldhatóság szükséges és elégséges feltételeit, majd megmutatjuk, hogy az ilyen hálózatmodellek analízise miként vezethető vissza az irodalomban kidolgozott analízis eljárásokra. Ezzel lényegében a nullátor norátor páros modellen keresztül történő hálózatanalízis eljárást tesszük teljessé.

Kvázireguláris hálózatok és néhány tulajdonságuk

Egyértelműen megoldható, RLC elemeket, nullátor norátor párokat és független generátorokat tartalmazó hálózatokat *regulárisnak* nevezzük.
Akkor mondjuk, hogy a hálózat *kvázireguláris*, ha nem reguláris, de pusztán egy norátorelemének vagy feszültségét vagy áramát tetszőlegesen rögzítve reguláris hálózatot nyerünk.
1. Tulajdonság. Kvázireguláris hálózatnak vagy pontosan egy norátorvágata, vagy pontosan egy norátorköre létezik.
2. Tulajdonság. Kvázireguláris hálózatnak vagy pontosan egy nullátorvágata, vagy pontosan egy nullátorköre létezik.
Megjegyzés. Kvázireguláris hálózatok négy osztályba sorolhatók:
(a) Nullátorvágatot és norátorvágatot tartalmazók
(vágat /vágat típusú)
(b) Nullátorkört és norátorkört tartalmazók
(kör/kör típusú)
(c) Nullátorvágatot és norátorkört tartalmazók
(vágat/kör típusú)
(d) Nullátorkört és norátorvágatot tartalmazók
(kör / vágat típusú).

A nullátorvágat(kör) és a norátorvágat(kör) elemeinek száma nem feltétlenül egyezik meg.

A kvázireguláris hálózat definíciójában szereplő, rögzített feszültségű norátorelem a norátorvágat bármely eleme lehet, és csak ilyen elem lehet (erre utal a definíció "pusztán" szava). Hasonlóképpen a norátorkör bármely elemének árama rögzíthető.

Az elmondottak illusztrálására az 1. ábra egy vágat-/vágat, a 2. ábra egy kör/kör típusú kvázireguláris hálózatot szemléltet. A 3. ábra pedig olyan vágat/kör típusú kvázireguláris hálózatot mutat, amelyben a vágat és a kör elemeinek száma különbözik. A kvázireguláris tulajdonság kimutatására később még visszatérünk.

Kvázireguláris hálózatok számítása

1. Tétel. Kvázireguláris hálózat norátorvágat, illetve norátorkör elemétől eltekintve bármely elemének feszültsége és árama egyértelmű és független a rögzített norátorfeszültségtől, illetve norátoráramtól.

Megjegyzés. E tétel a kvázireguláris hálózatoknak azt az alapvető tulajdonságát mutatja, amely lehetővé teszi az ilyen hálózatok modellezésre történő jogos felhasználhatóságát. Nevezetesen ebből a tételből következik, hogy pl. nem átmenő földes kétkapu hálózatmodellje teljesíti a kétkapu hálózatot definiáló karakterisztikákat, hacsak a bemeneti és kimeneti jellemzők nem vonatkoznak norátorvágat, illetve norátorkör elemekre. A tétel bizonyításából az is következik, hogy norátorkör elemeinek feszültsége, illetve norátorvágat elemeinek árama ugyancsak egyértelműen meghatározott.

Kézenfekvő az a gondolat, hogy kvázireguláris hálózatok számításához a rögzített norátorfeszültség vagy a rögzített norátoráram legyen zérus. Így lehetséges az egyértelmű feszültségek és áramok célszerű (azaz számítástechnikailag egyszerűbb) meghatározása.

Kvázireguláris hálózat egyszerűsítése

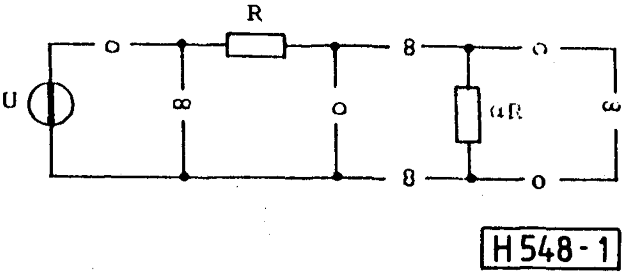
Kvázireguláris hálózat *kitüntetett nullátor norátor párján* olyan nullátor norátor párt értünk, amelynek nullátora nullátorvágatnak, illetve nullátorkörnek, norátora pedig norátorvágatnak illetve norátorkörnek eleme. Kitüntetett nullátor norátor pár *eliminálása* olyan eljárás, amelynek során a kitüntetett pár nullátor és norátorelemét extrém kétpólussal, nevezetesen vágatelemet rövidzárral, körelemet szakadással helyettesítünk. Az eliminálás során a hálózat nullátor norátor párjainak száma eggyel csökken. Az eliminálással nyert hálózatot a *kvázireguláris hálózat redukált*jának nevezzük.

2. Tétel. Kvázireguláris hálózat bármely redukáltja reguláris.
Következmény. Kvázireguláris hálózat megoldása helyett elegendő annak redukált hálózatát megoldani. Ez pedig az irodalomból ismert bármely módszerrel tehető.
Az a körülmény, hogy egy kvázireguláris hálózat rendelkezik az 1. és a 2. Tulajdonsággal, annak kapcsolási rajzáról kikövetkeztethető. De ha egy hálózat rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, még nem okvetlenül kvázireguláris. A kváziregularitáshoz egyéb feltételeknek is kell teljesülni.

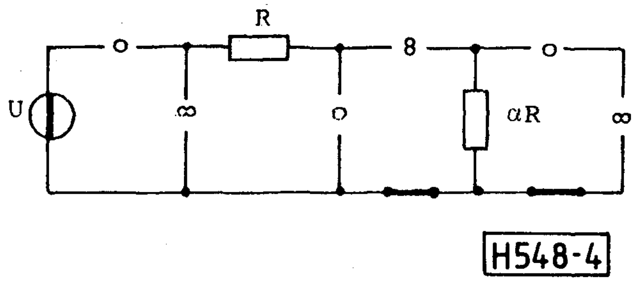
Vágat-körpáros hálózatok

Nullátor norátor páros hálózatot akkor mondunk *vágat-körpáros hálózat*nak, ha vagy pontosan egy nullátorvágatot, vagy pontosan egy nullátorkört tartalmaz. Így a vágat-körpáros hálózatra definíció folytán teljesül a kvázireguláris hálózat 1. és 2. Tulajdonsága.

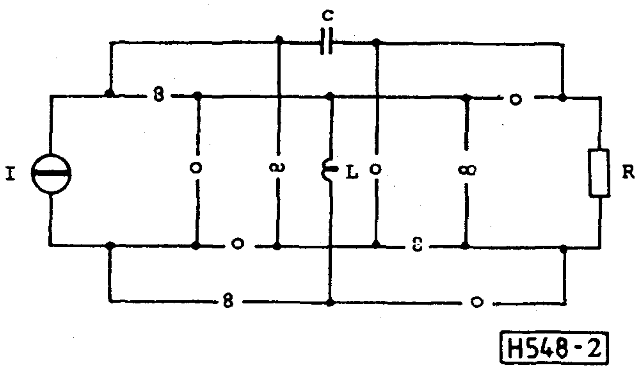
Akkor mondjuk, hogy a hálózat *norátorok és feszültséggenerátorok halmaza karakterisztikus*, ha nincs feszültséggenerátort tartalmazó köre; a hálózat *norátorok és áramgenerátorok halmaza karakterisztikus*, ha nincs áramgenerátort tartalmazó vágata.



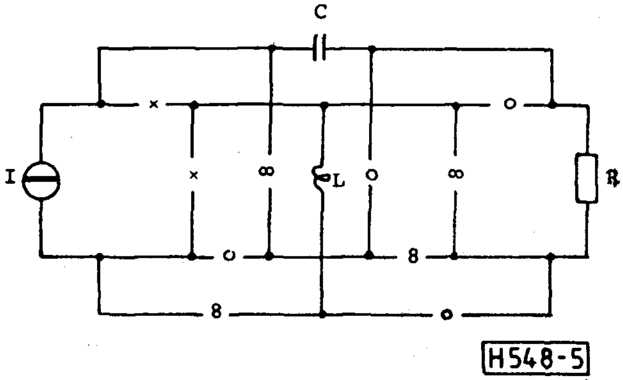
1. ábra. Vágat/vágat típusú kvázireguláris hálózat



4. ábra. Az 1. ábrán megadott hálózat egy redukáltja



2. ábra. Kör/kör típusú kvázireguláris hálózat



5. ábra. A 2. ábrán megadott hálózat egy redukáltja

Ezután terjesszük ki vágat-körpáros hálózatra is a kitűntetett nullátor norátor pár, annak eliminálása és a redukált hálózat fogalmát.

3. *Tétel.* Vágat-körpáros hálózat akkor és csak akkor kvázireguláris, ha mind a norátorok és feszültséggenerátorok halmaza, mind a norátorok és az áramgenerátorok halmaza karakterisztikus és a redukált hálózata reguláris.

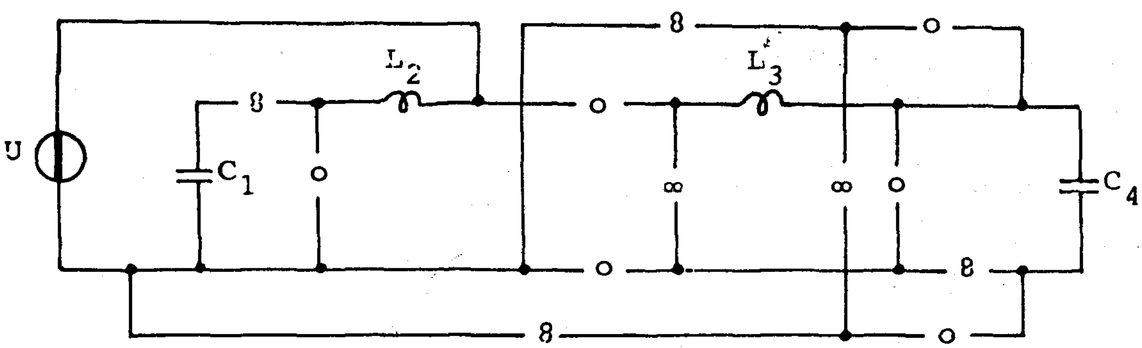
Megjegyzés. Ez utóbbi tétel birtokában lehetséges vágat-körpáros hálózat nem egyértelmű megoldhatóságának eldöntését visszavezetni reguláris hálózat egyértelmű megoldhatóságának vizsgálatára ([9]).

Alkalmazás

1.példa. Igazoljuk, hogy az 1., 2. és a 3. ábrán látható hálózatok kváziregulárisak.

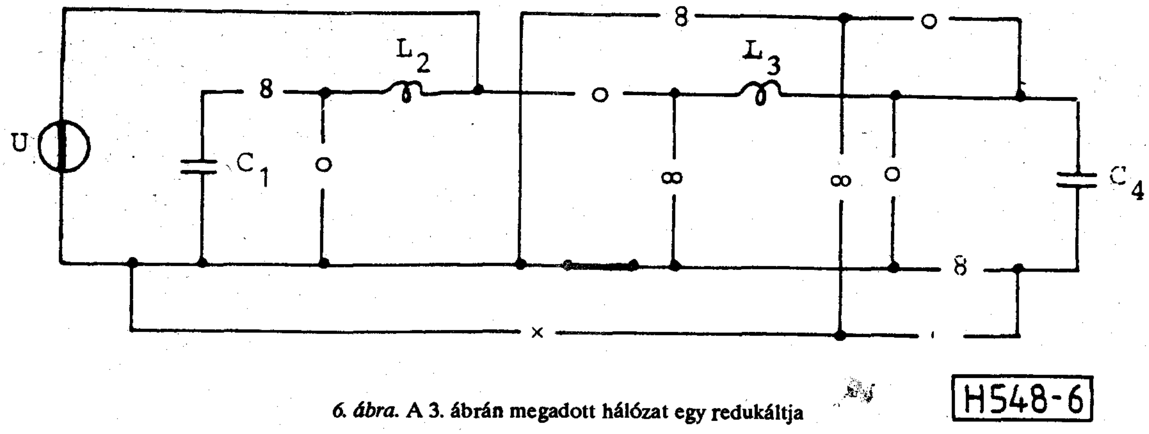
Mivel a szóbanforgó hálózatok mindegyike vágat-körpáros hálózat, továbbá mind a norátorok és feszültséggenerátorok halmaza, mind a norátorok és áramgenerátorok halmaza karakterisztikus, elegendő megmutatni, hogy egy redukált hálózatuk reguláris. A 4. ábra szemlélteti az 1. ábra hálózatának egy redukáltját. Ennek egyetlen magja az R elem, tehát a redukált hálózat feltétel nélkül reguláris.

Az 5. ábrán láthatjuk a 2. ábra hálózatának egy redukáltját. Mivel a magelemek száma 2, és az R elem sem L-lel, sem C-vel magban nem fordulhat elő, egyetlen magként az {L,C} halmaz jöhet csak számításba, és ez valóban a redukált hálózat magja. Megjegyezzük, hogy az 1. ábrán látható kapcsolás éppen egy ideális feszültséggenerátorral meghajtott nem átmenő földes feszültségvezérelt feszültséggenerátor modellje ([2]), míg a 2. ábrán látható kapcsolás egy olyan átmenő föld nélküli girátor modell ([2]) duális hálózata, amelynek primer oldalát egy ideális feszült-

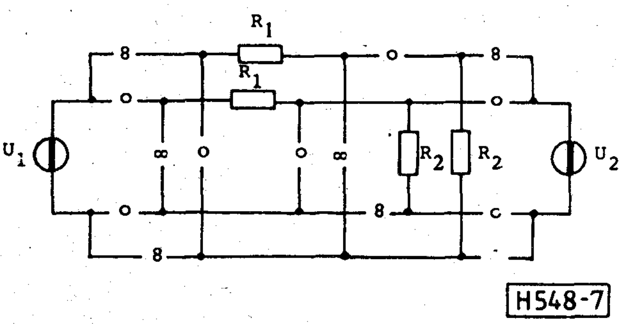


3. ábra. Vágat/kör típusú kvázireguláris hálózat

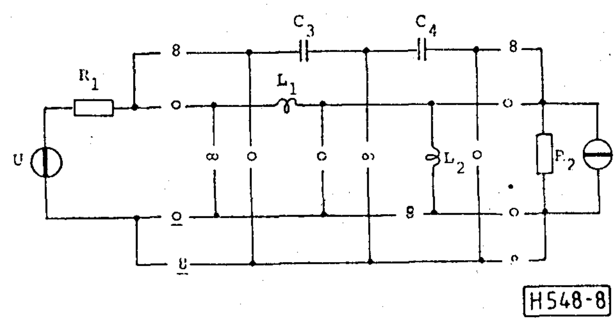
H548-3



6. ábra. A 3. ábrán megadott hálózat egy redukáltja



7. ábra. Példa nem megoldható vágat-körpáros hálózatra



8. ábra. Példa kvázireguláris hálózat megoldási feltétele számításához

séggenerátor, szekunder oldalát pedig egy kapacitás zárja le.

A 6. ábra a 3. ábrán látható hálózat egy redukáltja. A magelemek száma most is kettő. Elvileg a 4 passzív elem 6 magot alkothatna, azonban magelem számára sem L_2, sem L_3 nem alkalmas: Egyetlen mag tehát csak a $\{C_1,C_4\}$ halmaz lehet, és valóban mag. Ezzel az 1. feladatot megoldottuk.

2. példa. Tekintsük a 7. ábrán látható hálózatot. Vizsgáljuk meg a megoldhatóságát.

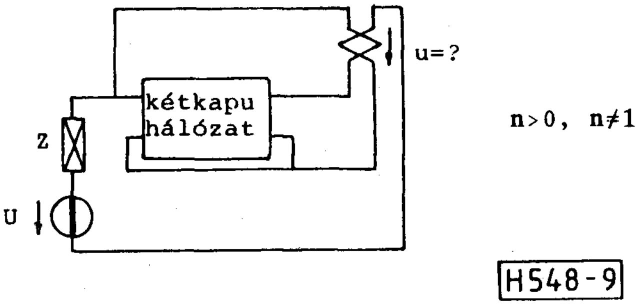
A hálózat vágat/vágat típusú vágat-körpáros hálózat. Egy redukáltja előáll, ha valamelyik kitüntetett nullátor-norátor párjának elemeit rövidzárral pótoljuk. Vegyük észre, hogy most egyetlen redukált hálózatnak sem lehet magja, mert magelem számára egyetlen rezisztencia sem jöhet számításba. Ugyanis bármelyik rezisztencia a feszültséggenerátorokkal együtt vagy tiszta nullátort vagy tiszta norátort tartalmazó körbe foglalható az eredeti kapcsolásban ([9]), és ez a körülmény akkor sem változik, ha egy-egy nullátort, illetve norátort rövidzárral helyettesítünk. Így a 7. ábrán látható kapcsolás példa nem megoldható vágat-körpáros hálózatra.

A 7. ábrán látható hálózat tulajdonképpen olyan, nem átmenő földes ideális transzformátor modell ([2]), amelyet mind a primer, mind a szekunder oldalon ideális feszültséggenerátorral zártunk le. Így ez a feladat a klasszikus hálózatelmélet egy közismerten ellentmondásos példáját szemlélteti.

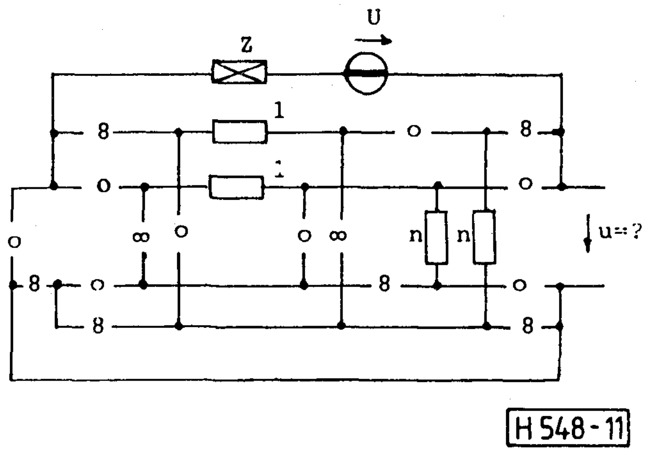
3. példa. Tekintsük a 8. ábrán látható hálózatot. Adjunk feltételt a hálózatban szereplő paraméterekre úgy, hogy a hálózat kvázireguláris legyen.

Mivel a hálózat vágat/vágat típusú vágat-körpáros hálózat, egy redukáltjához úgy jutunk, hogy pl. a kapcsolásban szereplő, aláhúzással jelölt nullátor és norátor elemeit rövidzárral helyettesítjük. Így a redukált hálózat pontjainak száma 11. Mivel e kapcsolás egy feszültséggenerátort és 6 nullátor norátor párt tartalmaz, magja 3 elemű ([9]). Tehát a magok száma legfeljebb 20.

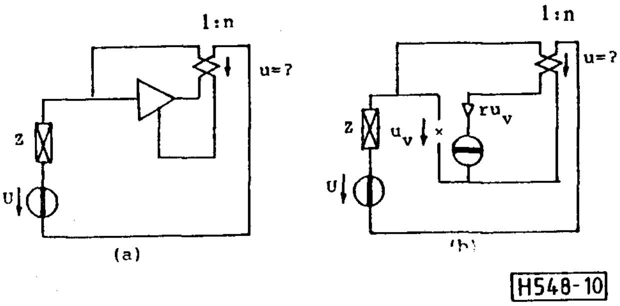
Tekintsük először azokat a magokat, amelyek az R_1 elemet tartalmazzák. Ilyen magban nem szerepelhet L_1 (mert a hálózatnak van R_1, U, L_1 és nullátorelemeket tartalmazó köre), illetve C_3 (mert a hálózatnak van R_1, U, C_3 és norátorelemeket tartalmazó köre). Mivel az R_1 elemet tartalmazó magban egyszerre nem fordulhat elő az (R_2,L_2), illetve az (R_2,C_4) pár, a szóbajöhető mag $\{R_1,L_2,C_4\}$ lehet csupán, és ez valóban mag, mégpedig 0 fokszámú ([9]). Másodszor tekintsük azokat a magokat, amelyek az R_1 elemet nem tartalmazzák. Mivel a magban az (L_1,L_2) és a (C_3,C_4) párok nem szerepelhetnek, R_2 biztosan magelem. De R_2 jelenléte kizárja C_4-et, mert az (R_2,C_4) pár sem szerepelhet a magban. Az egyetlen szóbajöhető mag tehát az R_2,L_1,C_3, és ez valóban mag és fokszáma ugyancsak zérus ([9]). A két mag előjele [8] figyelembe vételével különböző. Így az egyetlen magfüggvény ([9]):



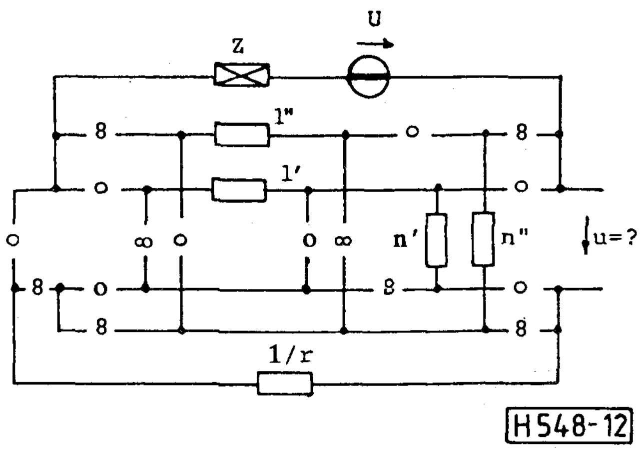
9. ábra. Ideális transzformátorral visszacsatolt kétkapu hálózat



11. ábra. A 10.a. ábrán látható hálózat nullátor norátor páros modellje



10. ábra. A kétkapu hálózat
(a) ideális műveleti erősítő;
(b) feszültségvezérelt áramgenerátor



12. ábra. A 10.b. ábrán látható hálózat nullátor norátor páros modellje

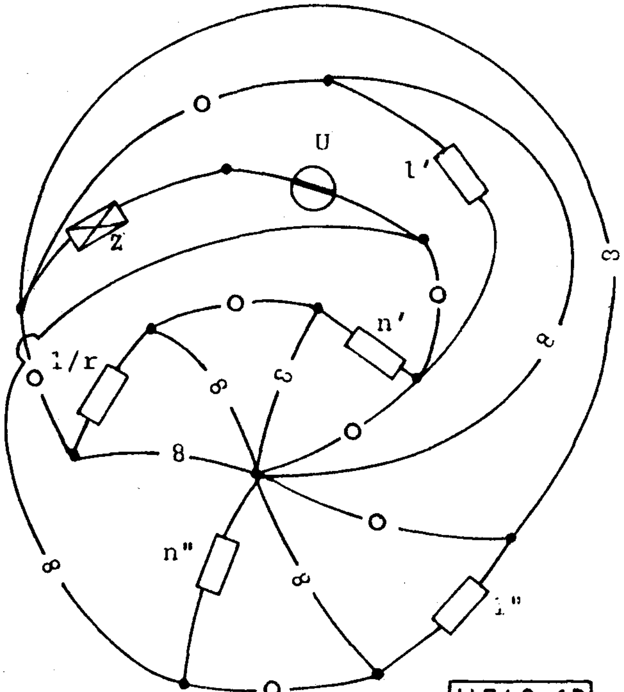
$$\frac{C_4}{R_1L_2} - \frac{C_3}{R_2L_1}.$$

A redukált hálózat regularitásának szükséges és elégséges feltétele e magfüggvény zérustól különböző volta. Nyertük tehát, hogy a szóbanforgó hálózat akkor és csak akkor kvázireguláris, ha $R_1L_2C_3 \neq R_2L_1C_4$ feltétel teljesül.

4. példa. Tekintsük a 9. ábrán látható, ideális transzformátorral visszacsatolt kétkapu hálózatot, ahol Z tetszőleges RLC kétpólus impedancia, a transzformátor áttétele pozitív, és 1-től különböző. Érdeklődünk a transzformátor szekunder oldali feszültsége iránt.

Legyen a kétkapu hálózat először ideális műveleti erősítő (10. ábra (a) része). A 11. ábra mutatja a kapcsolás nullátor norátor páros modelljét. Látható, hogy a modell egy norátorvágatot, egy norátorkört, ugyanakkor egy nullátorvágatot is tartalmaz, ezért nem lehet kvázireguláris, sőt elemi analízissel kimutatható, hogy ellentmondásos. Most a kérdéses feszültség nem határozható meg. Legyen a kétkapu hálózat másodszor r ($\neq$ 0) áttételű feszültségvezérelt áramgenerátor (10. ábra (b) része). a 12. ábrán a szóbanforgó hálózat nullátor norátor páros modellje látható. A modellben az elemek paramétere impedancia illetve ellenállás, a későbbiek kedvéért az azonos 1 és n paraméterű elemeket vesszőkkel különböztetjük meg. A modell vágat/-vágat típusú kvázireguláris hálózat. Mivel mind a norátorok és a feszültséggenerátorok, mind a norátorok és áramgenerátorok halmaza karakterisztikus, megoldhatóságához elegendő megmutatni, hogy a modell redukáltja reguláris. Egy redukáltat szemléltet a 13. ábra. Mivel a pontok száma 12, a degenerált elempárok száma 7, a lehetséges mag 3 elemű. Magelem gyanánt nem fordulhat elő az 1/r paraméterű elem, azaz a vezérelt generátor áttétele a megoldhatóságot nem befolyásolhatja. Mivel (1',n') és (1",n") jelű elempárok magban norátorkör illetve nullátorkör miatt nem szerepelhetnek, Z szükségképpen magelem kell legyen. De akkor 1' elem magban való jelenléte kizárt a feszültséggenerátor helyzete folytán (nullátorkör!). Lehetséges magok {Z,n',n"} és {Z,n',1"} , és ezek valóban magok is. Mivel a hálózatmodellnek nincs több magja, a megoldhatóság egy elegendő feltétele:

$$\frac{1}{Zn} + \frac{1}{Zn^2} \neq 0,$$



13. ábra. A 12. ábrán látható hálózat egy redukáltja

azaz $1+n\neq 0$. Ez a feltétel teljesül. Mivel a keresett u feszültség az n' elem feszültsége, az 1. Tétel folytán független a tetszőlegesen választott norátorfeszültségtől, így egyértelmű.

Számítógépes implementáció

Reguláris hálózatok számítására az irodalom számos hatékony módszert ismertet ([6], [4], [5]). Mivel kvázireguláris hálózatok számítása reguláris hálózatok számítására vezethető vissza, így az említett módszerek kvázireguláris hálózatok megoldására is alkalmasak.

Nullátor norátor páros hálózatok analízisét célszerűen meg kell előzze a hálózat egyértelmű megoldhatóságának vizsgálata ([9]). Lényegében ilyen vizsgálatokat végeztünk el az előző fejezetben tisztán logikai okoskodással. Pontosabban arról döntöttünk, hogy a kitűzött vágat-körpáros hálózat kvázireguláris-e.

Nullátor norátor páros hálózat egyértelmű vagy nem egyértelmű megoldhatóságának eldöntése lényegében topológiai eljárást igényel.

Ennek az eljárásnak logikai úton való véghezvitele bonyolultabb feladatoknál igen nehézkes, fárasztó, nehezen áttekinthető. Hálózatok regularitásának kimutatásához [9]-ben számítógépes program készítésére alkalmas eljárás leírást találunk. Lehetséges számítógépes eljárást tervezni hálózatok kváziregularitásának eldöntésére is. Ehhez célszerűen először azt vizsgáljuk, hogy a hálózat vágat-körpáros-e, mert ez a tulajdonság a hálózat gráfjáról viszonylag könnyen kimutatható. Vágat-körpáros hálózat esetén megvizsgálandó, hogy a nullátorok és feszültséggenerátorok, illetve a nullátorok és áramgenerátorok halmaza *karakterisztikus*-e. Ha igen, úgy képezzük a hálózat egy (tetszőleges) redukáltját annak valamely kitüntetett degenerált elempárja eliminálásával. Végül a 3. Tétel figyelembe vételével a tekintett hálózat akkor és csak akkor nem egyértelműen megoldható, ha a redukáltja egyértelműen megoldható. Egyben az 1. Tétel folytán a redukált hálózat elemeinek feszültsége és árama adja a kvázireguláris hálózat megoldását néhány norátorelem feszültsége illetve árama kivételével

Lehetséges olyan számítógépes programot tervezni, amely alkalmas mind a regularitás, mind a kváziregulatitás eldöntésére. Ilyen program készítéséhez tekintsük a 14. ábrán látható blokksémát. A blokkséma a [9]-ben ismertetett blokkséma alkalmas kiegészítésével állott elő, erre utalnak a 14. ábra tömbjeiben használt jelölések is. Mindenesetre definiálunk egy "k" jelű paramétert, amelynek kezdeti értéke 1. A blokkséma bal oldala összefoglalja a hálózat magjának felkutatását. A séma középső része tulajdonképpen a [9]-beli folyamatábra kiegészítése. Ha a hálózatnak nincs magja, akkor nem lehet reguláris, de lehet még kvázireguláris. A [9]-beli program leállítása helyett a 14. ábrán most a kváziregularitás vizsgálatával folytatódik az eljárás. Amennyiben a vizsgált hálózat karakterisztikus halmazokkal rendelkező vágat-körpáros hálózat, úgy a program előállítja annak egy redukáltját. A redukált hálózat adatait (új) bemenő adatoknak tekintve a program visszatér az elejére, miután a k paraméter 2-re változott. Amennyiben az eljárás most sem talál magot, így a hálózat nem kvázireguláris. Mag létezése esetén a programvezérlés áttevődik a blokkséma jobb oszlopára annak kiderítésére, hogy a megoldhatóság feltétel nélküli vagy feltételes.

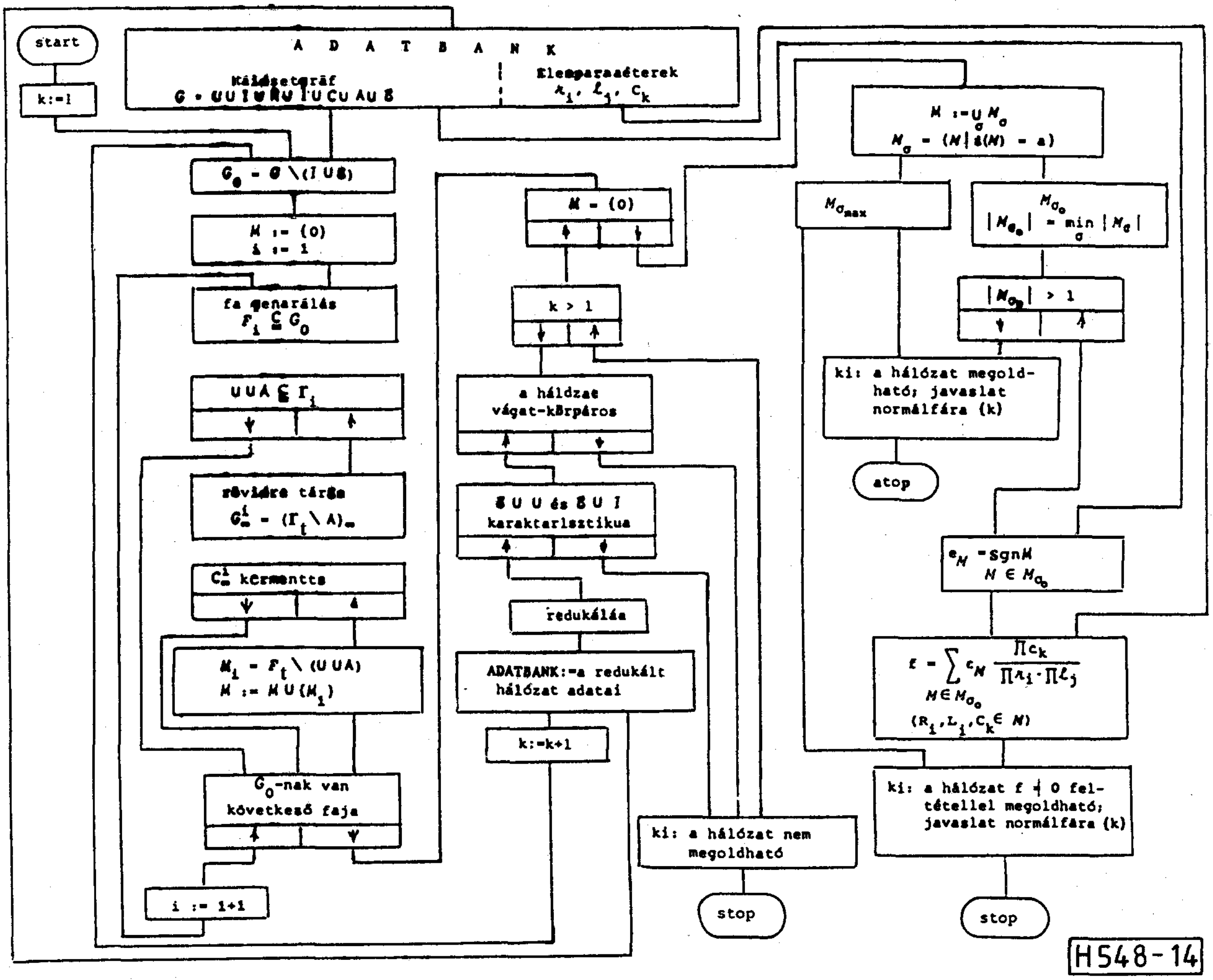
Mindkét esetben az eljárás végén a k paraméter aktuális értékével együtt (amely mutatja, hogy a vizsgált hálózat reguláris vagy kvázireguláris) javaslat születik az analízis számára normálfa megválasztására.

Általánosítás

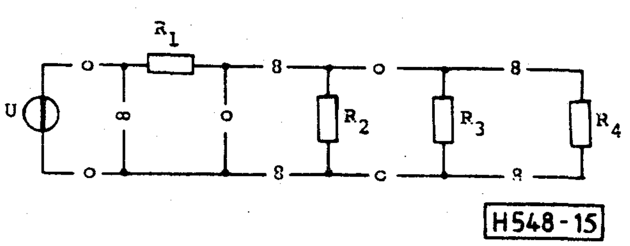
A [2] irodalomban számos, nem átmenő földes kétkapu hálózatmodell található, amelyek kvázireguláris hálózatokból épülnek fel, és e modellek is kvázireguláris hálózatokból épülnek fel, és e modellek is kvázirequlárisak.

Kvázireguláris hálózatokból felépített hálózatok természetesen lehetnek regulárisok, kvázirequlárisok, sőt akár ellentmondásos hálózatok is (pl. a 7. ábrán látható hálózat).

Tekintsük a 15. ábrán látható, lényegében két kvázireguláris hálózat összekapcsolásával nyert hálózatot. Ez a hálózat se nem reguláris, se nem kvázireguláris, de egyrészt megoldható, másrészt a kvázireguláris hálózatokhoz hasonló tulajdonságú abban az értelem-



14. ábra. Blokkséma számítógépes implementációhoz



15. ábra. Példa 2-kvázireguláris hálózatra

ben, hogy a kapcsolásban két norátorelem feszültségének (tetszőleges) rögzítése után a hálózat már reguláris, sőt 4 norátorelem feszültségétől eltekintve az összes áramköri elem feszültsége és árama egyértelmű és független a rögzített norátorfeszültségek megválasztásától. Figyeljük meg azt is, hogy a 15. ábra hálózata két-két norátorvágatot, illetve nullátorvágatot tartalmaz.

Most általánosítjuk a kvázireguláris hálózatok fogalmát úgy, hogy a 15. ábrán látható hálózatokhoz hasonló hálózatok megoldhatósága is vizsgálható legyen.

Akkor mondjuk, hogy egy nullátor norátor páros hálózat n-*kvázireguláris*, ha nem reguláris, de pusztán összesen n számú norátorfeszültség és norátoráram (tetszőleges) rözítése után a hálózat regulárissá válik.

Akkor mondjuk, hogy egy nullátor norátor páros hálózat n-*vágat-körpáros*, ha a nullátorok halmaza összesen n számú, külön-külön független rendszert alkotó vágatot és kört tartalmaz, és ugyanez érvényes a norátorok halmazára is. Vegyük észre, hogy a kvázireguláris hálózat az n-kvázireguláris hálózatnak n=1 esete, úgyszintén a korábbi fejezetekben szereplő vágat-körpáros hálózat éppen 1-vágat-körpáros hálózat.

Az n-vágat-körpáros hálózat *kitüntetett nullátor norátor párján* olyan nullátor norátor párt értünk, amelynek nullátora valamelyik (független) nullátorvágat vagy nullátorkör eleme, ugyanakkor norátor eleme a hálózat valamelyik (független) norátorvágat vagy norátorkör eleme. Kitüntetett nullátor norátor pár *eliminálásán* a nullátor norátor pár elemeinek szakadással illetve rövidzárral való helyettesítését értjük, mégpedig vágatelemet rövidzárral, körelemet szakadással pótolunk. n-*vágat-körpáros hálózat redukáltján* azt a nullátor norátor páros hálózatot értjük, amelyet az n-vágat-körpáros hálózatból úgy nyerünk, hogy annak n számú kitüntetett nullátor norátor párját rendre elimináljuk.

Jelölje a hálózat norátor elemeinek halmazát B, feszültséggenerátor elemeinek halmazát U, valamint áramgenerátor elemeinek halmazát I. Akkor mondjuk, hogy az n-vágat-körpáros hálózat BUU és BUI halmazai *karakterisztikusak*, ha BUU halmaznak nincs feszültséggenerátort tartalmazó köre, és BUI halmaznak nincs áramgenerátort tartalmazó vágata.

4. Tétel. n-vágat-körpáros hálózat akkor és csak akkor n-kvázireguláris hálózat, ha BUU és BUI halmazok karakterisztikusak és redukált hálózata reguláris.

5. Tétel. n-kvázireguláris hálózat elemeinek mind a feszültsége mind az árama a norátorvágat elemek feszültségétől és a norátorkör elemek áramától eltekintve egyértelmű és független a (tetszőlegesen) rögzített norátorfeszültségektől és norátoráramoktól. Megjegyezzük, hogy a 4. és az 5. Tétel birtokában lehetséges n-vágat-körpáros hálózatokból eldönteni az n-kváziregularitást, továbbá n-kvázireguláris hálózatok megoldásához reguláris hálózatot adni az analízis számára. Úgyszintén a 14. ábrán látható blokkséma módosításával lehetséges n-kvázireguláris hálózatok megoldhatóságának számítógépes kimutatása.

FÜGGELÉK

A tulajdonságok belátása

Jelölje U a hálózat feszültséggenerátorainak, I az áramgenerátorainak, A a nullátorainak, B a norátorainak, végül Z az RLC elemek operátoros impedanciájának halmazát. Akkor a Laplace transzformáltakra vonatkozó hálózategyenletrendszer a következő formában írható:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
U^u & I^u & B^u & A^u & Z^u & Z^i & A^i & B^i & U^i & I^i
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccccccccc}
\multicolumn{5}{c}{\mathbf{B}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \multicolumn{5}{c}{\mathbf{Q}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{Z}^{-1}} & \boxed{-\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \mathbf{u}_U \\ \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_Z \\ \mathbf{i}_Z \\ \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \\ \mathbf{i}_U \\ \mathbf{i}_I \end{bmatrix}
= \mathbf{0} \qquad (1)
$$

(1) baloldalának hipermátrixában (hálózatmátrix) $\mathbf{B}$ és $\mathbf{Q}$ a hálózat fundamentális kör, illetve vágatmátrixa, $\mathbf{Z}^{-1}$ az RLC elemek operátoros admittanciájából alkotott diagonálmátrix, $\mathbf{1}$ egységmátrix, a $\mathbf{0}$ pedig nullmátrixot jelent. A hipermátrix baloldalán található oszlopvektor $\mathbf{u}_U,\dots,\mathbf{i}_I$ elemei feszültség, illetve áramvektorok, az index utal arra a hálózatelem halmazra, amelynek elemeire a komponensek vonatkoznak. A hálózatmátrix fejlécén lévő szimbólumok a mátrix megfelelő oszlopainak halmazát jelölik, a hálózatmátrix szaggatott vonalak közötti része pedig a hálózatdetermináns.

Ezután tegyük fel, hogy a hálózat kvázireguláris, és pusztán egy norátorelem feszültségének rögzítésével tehető regulárissá. Ez azt jelenti, hogy (1) hálózatdeterminánsának egy norátorfeszültség oszlopvektora előállítható a többi oszlopvektor lineáris kombinációjaként. Az előállításban résztvevő oszlopvektorok között a "pusztán" szó miatt nem szerepelhet áramgenerátorfeszültség oszlopvektor, így csak norátorfeszültség oszlopvektorok jöhetnek számításba. B mátrix tulajdonságából következik, hogy a hálózatnak van tiszta norátorvágata. A norátorvágat egyetlen, mert különben a regularitáshoz egynél több norátorfeszültséget kellene rögzíteni.

A transzponált mátrix rangjának invarianciájából következik, hogy a hálózatdetermináns sorai között is kell legyen olyan sorvektor, amelyik előállítható a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Mivel B és Q fundamentális mátrixok, (1) hálózatdeterminánsának első három sorvektor halmaza biztosan lineárisan független. Két eset lehetséges:

1. a negyedik sorvektorhalmaz valamelyik eleme előállítható a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Egy pillantást vetve (1)-re látjuk, hogy most e lineáris kombinációban csak B és nullátorfeszültségre vonatkozó sorvektorok szerepelhetnek. Megmutatható, hogy a nullátorfeszültség sorvektorok egy halmazának lineáris kombinációja feszültséggenerátor elemektől és a tetszőlegesen rögzített feszültségű norátorelemtől eltekintve megegyezik $\mathbf{B}$ bizonyos sorainak lineáris kombinációjával. Mivel a hálózat nem ellentmondásos, így szükségképpen létezik tiszta nullátorelemekből álló köre. Ismét a transzponált mátrix invarianciája miatt ez a kör egyetlen.
2. az ötödik sorvektorhalmaz valamelyik eleme állítható elő a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Az előbbi okoskodást most a $\mathbf{Q}$ mátrix és a nullátoráram sorvektorokra megismételve nyerjük, hogy a hálózatnak létezik egy nullátorokból álló vágata.

Hasonlóképpen látható be, hogy az olyan kvázireguláris hálózat, amely pusztán egy norátorelem áramának rögzítése után válik regulárissá, pontosan egy norátorkört tartalmaz, és ugyanakkor létezik vagy pontosan egy nullátorköre, vagy pontosan egy nullátorvágata. Ezzel a kvázireguláris hálózatok mindkét tulajdonságát bebizonyítottuk.

A tételek bizonyítása

1. Tétel

Legyen a kvázireguláris hálózat vágat/vágat típusú. Rögzítsük tetszőlegesen a norátorvágat egyik elemének feszültségét. A hálózategyenletrendszer felírásánál most a hálózatgráf olyan kifeszítő fáját válasszuk referencia fa gyanánt, amelynek a tekintett norátorelem kötőéle. (1)-ben **B** és **Q** mátrixok most erre a fára vonatkozzanak. Akkor u oszlopvektor halmaznak a tekintett norátorelemre vonatkozó oszlopvektora pontosan egy 1-es elemet tartalmaz, az összes többi eleme 0. Az általánosság megcsorbítása nélkül feltehető, hogy az oszlopvektor első komponense 1. Tekintsük ezután a tetszőlegesen rögzített norátorfeszültséget a hálózat bemenő jelének, azaz soroljuk át a neki megfelelő oszlopvektort az u oszlopvektorhalmazba. Töröljük ezután a hálózatmátrix egyik, nullátorvágatban előforduló nullátorelemhez tartozó nullátoráram sorvektorát. Az így nyert determináns a feltétel folytán már zérustól különböző.

Tekintsük ezután a hálózatnak egy, norátorvágat elemtől különböző tetszőleges elemét. Az elem feszültsége, illetve árama Cramer szabálya szerint két determináns hányadosa. A nevezőben lévő determináns biztosan független a rögzített norátorfeszültségtől, mert az már az elemei között sem fordul elő. A számlálóban lévő módosított determináns azonban már tartalmaz egy olyan oszlopot, amelyben előfordul a határozatlan norátorfeszültség, mégpedig a referencia fa alkalmas megválasztása miatt pontosan az első komponensében.

A módosított determináns oszlopainak elemi átalakításával elérhető, hogy egy norátorvágat elem feszültségoszlopa megegyezzék a tetszőlegesen rögzített (határozatlan) feszültségű norátorelem feszültségoszlopával, azaz pontosan az első eleme 1-es, az összes többi zérus, ugyanakkor a kapott determináns értéke a módosított determináns értékétől legfeljebb előjelben különbözhet. E determinánsnak az átalakított oszlopa szerinti kifejtéséből látszik, hogy a módosított determináns értéke is független a határozatlan norátorfeszültségtől.

Amennyiben norátorvágat elem feszültségét akarnánk meghatározni, úgy a módosított determináns a fentiekben leírt elemi átalakítása nem lehetséges, így bármelyik norátorvágat elem feszültsége már függhet a határozatlan norátorfeszültségtől. Hasonlóképpen bizonyítható a tétel a többi típusú kvázireguláris hálózatokra,

A tétel bizonyításából az is kiderült, hogy norátorvágat elemeinek árama, illetve a norátorkör elemeinek feszültsége is egyértelműen meghatározott.

2. Tétel

A tétel bizonyítása triviális, ha meggondoljuk, hogy egy norátorvágat elem rövidzárral történő helyettesítése a határozatlan norátorfeszültség 0 választását, egy norátorkör elem szakadással történő pótlása pedig a határozatlan norátoráram 0 választását jelenti; ugyanakkor nullátorvágat elem rövidzárral való helyettesítése a nullátoráram sorvektor törlése, nullátorkör elem szakadással pótlása pedig nullátorfeszültség sorvektor törlése miatt jogos.

3. Tétel

A feltétel nyilvánvalóan elegendő.
Tegyük fel ezután, hogy a vágat-körpáros hálózatra teljesülnek a tétel feltételei. Megmutatjuk, hogy akkor a hálózat kvázireguláris.

Amennyiben a vágat-körpáros hálózat norátorvágatot tartalmaz, úgy rögzítsük tetszőlegesen annak egyik eleme feszültségét. Hagyjuk el ezután a hálózategyenletrendszer egyik nullátor elem feszültségére vagy nullátor elem áramára vonatkozó sorát aszerint, hogy a hálózat nullátorkört vagy nullátorvágatot tartalmaz. Vegyük észre, hogy az így előállított hálózat éppen a vágat-körpáros hálózat redukáltja, tehát hálózatdeterminánsa zérustól különbözik. Ha a vágat-körpáros hálózat norátorkört tartalmaz. úgy az előbbi eljárás értelemszerűen hajtandó végre. Végül a norátorelemek és áramgenerátorok halmazára, illetve a norátorelemek és feszültséggenerátorok halmazára tett feltevés miatt a korábbi eljárás pusztán vagy norátorelem feszültségének vagy norátorelem áramának tetszőlegesen való rögzítésével tehető meg. Ezzel a tételt bizonyítottuk.
n-vágat-körpáros és n-kvázireguláris hálózatokra vonatkozó *4. Tétel és 5. Tétel* bizonyítása n szerinti teljes indukcióval lehetséges. $n=1$ esetben a 4. Tétel a 3. Tétel miatt, az 5. Tétel pedig az 1. Tétel miatt teljesül. Tegyük fel ezután, hogy a 4. Tétel és az 5. Tétel (n-1)-re már igaz; bizonyítható, hogy akkor n-re is igazak.

Példaként bemutatjuk a további okoskodást a 4. Tétel elégséges feltételének igazolására:

A definíció folytán n-kvázireguláris hálózat független norátorköreinek és norátorvágatainak összes száma legfeljebb n. Ha az n-kvázireguláris hálózatnak van olyan norátoreleme, amelynek feszültsége (tetszőlegesen) rögzítendő, akkor tekintsük az (1) hálózategyenletrendszerben azokat a minimális számú norátorfeszültség oszlopvektorokat, amelyek a szóbanforgó norátorfeszültség oszlopvektorral lineárisan összefüggőek. A norátorfeszültség rögzítése után keletkezett hálózat (n-1)-kvázireguláris, tehát az indukció feltevés figyelembevétele miatt az n-kvázireguláris hálózat független norátorköreinek és norátorvágatainak összes száma legalább n. Ezért az n-kvázireguláris hálózat független norátorköreinek és norátorvágatainak őszes száma pontosan n. Amennyiben a hálózatnak nincs olyan norátoreleme, amelynek a feszültsége rögzítendő, akkor az n-kvázireguláris hálózatban csak norátoráramok rögzíthetők. Az (1) hálózategyenletrendszer norátoráram oszlopaira az előbbi okoskodást értelemszerűen megismételve nyerjük, hogy a független norátorkörök száma n, és mivel norátorvágat most nem létezik, így a független norátorkörök és norátorvágatok együttes száma ugyancsak n.

Felhasználva a mátrix rangjának transzponálással szemben való invarianciáját, a kvázireguláris hálózatok 2. Tulajdonságának bizonyításánál látottakhoz hasonlóan mutatható meg, hogy n-kvázireguláris hálózatok esetén a független nullátorkörök és nullátorvágatok összes száma is n. Azaz n-kvázireguláris hálózat mindig n-vágat-körpáros.

BUU és *BUI* halmazok karakterisztikussága az n-kvázireguláris hálózatok definíciójában szereplő "pusztán" szó miatt, az n-vágat-körpáros hálózat redukáltjának regularitása pedig az n-kvázireguláris hálózat redukáltjának regularitása miatt teljesül. Ezzel a feltétel elégségességét beláttuk.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton mondok köszönetet Hollós Editnek önzetlen szakmai segítségnyújtásáért, hasznos tanácsaiért és konkrét javaslataiért, amelyek az általa korábban publikált eredményeivel együtt hozzájárultak e cikk témája megválasztásán túl annak jelenlegi formája elnyeréséhez.

IRODALOM

[1] *Davies, A. C.:* Matrix analysis of networks containing nullators and norators. Electronic letters (1966), p. 48-49.

[2] *Hollós, E.:* Nullátort és norátort tartalmazó kétkapu modellek. HÍRADÁSTECHNIKA, XXXIII (1982), 493-496.

[3] *Vágó, I., Hollós, E.:* Kétkapu modellezése nullátor és norátor felhasználásával. HÍRADÁSTECHNIKA, XXIV (1973), 236-239.

[4] *Hollós, E.:* Hurokáramok módszere nullátort és norátort tartalmazó hálózatokra. HÍRADÁSTECHNIKA, XXXIII (1982), 497-499.

[5] *Hollós, E.:* Vágatfeszültségek módszere nullátort és norátort tartalmazó hálózatokra. HÍRADÁSTECHNIKA, XXXIII (1982), 500-502.

[6] *Vágó, I.:* Nullátorokat és norátorokat tartalmazó hálózati modellek számítása. HIRADÁSTECHNIKA, XXIV (1973), 265-268.

[7] *Vágó, I.:* A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1976.

[8] *Pávó, I.:* The sign of k-tree in the nullator norator pairs network. 26. IWK, TH Ilmenau, (1981), p. 59-61.

[9] *Pávó, I.:* Nullátor norátor páros hálózatok megoldhatóságáról. HÍRADÁSTECHNIKA, XXXIX (1988), 393-401.