

Általánosított mintavételi tétel és alkalmazása kváziperiodikus jelek leírására

Dr. Földvári Rudolf
BME Híradástechnikai Elektronika Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

Az általánosított mintavétel különböző estelnek bemutatása után periodikus jel nem egyenközű mintavételezését ismertetjük. Ha egy periodikus jel spektruma egy oktávnál keskenyebb, akkor a helyi szélsőértéknél vett minták és időpontjaik egyértelműen meghatározzák a jelet. Az így értelmezett illesztett mintavételezés bemutatása után a mintavételezés alapvető tulajdonságaival foglalkozunk. Ezek a tulajdonságok kedvezőek és sok hasonlóságot mutatnak az emberi hallásról szerzett eddigi ismeretekkel.

1. Bevezetés

Az egyenközű ill. ekvidisztáns mintavételezés a legáltalánosabban elterjedt módja egy jel időtartományban történő előállításának. Kevésbé ismert a mintavételi tétel általánosítása, a nem egyenközű mintavételezés, melynek elméletét az [1] irodalom tárgyalja. Számos cikk, például a [2], [3] és [4], digitális szűrők analíziséhez és tervezéséhez felhasználja ezt az általánosabb érvényű mintavételi tételt.

A következőkben részletesen tárgyalt periodikus, nem egyenközű mintavételezés esetére megmutatjuk, hogy a minták milyen feltétel mellett határozzák meg egyértelműen a jelet. A visszaállításhoz szükséges interpoláló függvényeket az [1] irodalom ismerteti. Ezenkívül foglalkozunk egy speciális esettel, nevezetesen periodikus, sávszűrt jelek mintavételezésével, és a mintavételezés néhány alapvető tulajdonságával.

2. Ekvidisztáns mintavételezés

Ekvidisztánsnak nevezzük a mintavételezést, ha az $x(t)$ jelből egyenlő időközönként veszünk mintát. Ha az $x(t)$ jel sávkorlátos akkor érvényes a Shannon-féle mintavételi tétel [1].

2.1. Mintavételi tétel

Legyen $x(t)$ sávkorlátos, a következő alakban felírható időfüggvény

$$x(t) = \int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta(\omega), \quad (1)$$

azaz létezzék spektrális előállítása.

Minden, a fentiek szerinti $x(t)$ előállítható a következő alakban

Beérkezett: 1988. XI. 22. (H)

DR. FÖLDVÁRI RUDOLF

A Budapesti Műszaki Egyetemen szerzett diplomát 1962-ben. A BME Vezetékes Híradástechnikai Tan-székén helyezkedett el és a lineáris hálózatok, valamint a vezetékes távközlő be-

rendezések című tárgyak oktatásában vett részt. 1975-1978-ig a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézetben dolgozott, majd a BME Híradástechnikai Elektronika Intézetében a konstrukció tárgy oktatásába kapcsolódott be.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2}(t-t_k)\right)}{\frac{\omega_0}{2}(t-t_k)}, \quad (2)$$

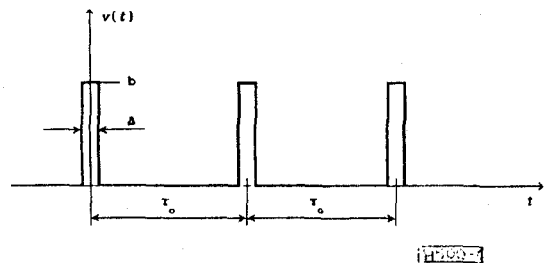
ahol

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, t_k = kT_0 \text{ és } 2\pi B < \frac{\omega_0}{2}.$$

A mintavételi tétel értelmében $x(t)$ -t $\forall t$ -re egyértelműen meghatározzák a t_k időpontokban felvett értékek.

2.2. Mintavételezett jel spektrális előállítása

A mintavételezés felfogható, mint az $x(t)$ és a $v(t)$ mintavételező függvény szorzata [5]. (1. ábra) A



1. ábra. Ekvidisztáns mintavételező függvény

mintavételező $v(t)$ függvény előállítható Fourier sorával, azaz

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3)$$

ahol

$$c_k = C_k = \frac{b\Delta}{T_0} \frac{\sin(k\pi\Delta/T_0)}{k\pi\Delta/T_0},$$

továbbá válasszuk értékét úgy, hogy $b\Delta/T_0 = 1$ legyen. A mintavételezett jelet $y(t)$ -vel jelölve írható, hogy

$$y(t) = x(t) \cdot v(t), \quad (4)$$

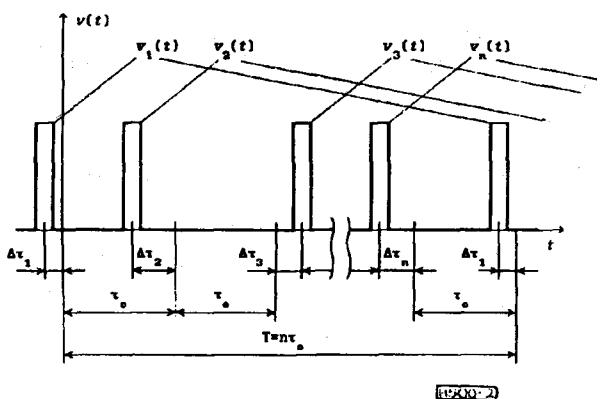
továbbá (1) és (3) felhasználásával

$$y(t) = \left[\int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta(\omega) \right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right] \quad (5)$$

Az (5) egyenletből jól látszik, hogy az $y(t)$ jelet egy ideális $\omega_0/2$ sávhatáru aluláteresztővel szűrve, $c_0 x(t)$ -t kapunk, továbbá ha $\Delta \ll \tau_0$, akkor $c_k \approx 1/k$ -ra, és visszanyerjük a mintavételi tételt. Ha nem ekvidisztáns mintákat veszünk $x(t)$ -ből, de biztosítani tudjuk, hogy a mintavételezett jel spektrális előállítás $\omega_0/2$ -ig megegyezzen $y(t)$ spektrális előállításával, akkor a nem ekvidisztáns minták szintén egyértelműen meghatározzák az $x(t)$ jelet. A következőkben vizsgáljuk meg részletesen ezt az általános esetet.

3. Nem ekvidisztáns mintavételezés

Legyenek a minták egymástól különböző távolságra, és az egyszerűség kedvéért ezek a sorozatok ismétlődjenek periodikusan, azaz a mintavető jel legyen a 2. ábrának megfelelő. Ha az $x(t)$ jelből a 2. ábrán látható $v(t)$ jellel veszünk mintát, és a

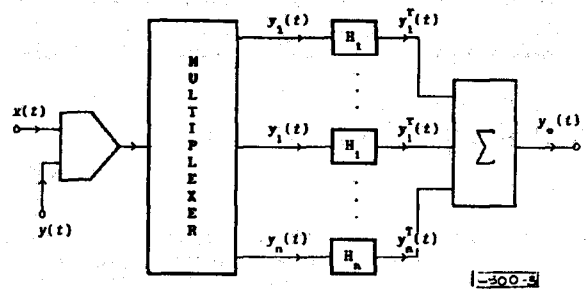


2. ábra. Periodikus, nem ekvidisztáns mintavételező függvény

$[0, T)$ intervallumban minden minta különböző időpontra esik, akkor a minták egyértelműen meghatározzák az $x(t)$ jelet.

3.1. Mintavételezés n nem ekvidisztáns mintából álló periodikus sorozattal

Állítsuk elő az $x(t)$ és a nem ekvidisztáns mintavételezést reprezentáló $v(t)$ szorzatát, majd válaszszuk szét a $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ -hez tartozó mintákat. (A jelölések a 2. ábrán láthatók.) Legyen $y(t) = x(t) \cdot v_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, n$ és az $y(t)$ jelet végezzük el a H_l átviteli függvénnyel jellemzett lineáris invariáns transzformációt a 3. ábrán látható módon. Az összegző kimenetén megjelenő jel legyen $y_0(t)$. A H_l transzformációt úgy kell megválasztani, hogy $y_0(t)$ spektrális előállítás $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$ intervallumban megegyezzen $y(t)$ spektrális előállításával. Ebben



3. ábra. Blokkvázlat a nem egyenközű mintavételezés értelmezéséhez

az esetben ugyanis $\omega_0/2$ sávhatáru aluláteresztő szűrővel $x(t)$ egyértelműen visszaállítható.

A 2. ábra alapján látható hogy $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ a $T = n \tau_0$ idővel periodikus, Fourier sorok csak fázisban különböznek. Az l -edik mintavető jel Fourier transzformáltja

$$v_l(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \left(\frac{k\omega_0}{n} t + k \Delta \Phi_l \right)} \quad (6)$$

ahol

$$\Delta \Phi_l = -\frac{2\pi}{n} \left[(l-1) + \frac{\Delta \tau_l}{\tau_0} \right] \quad (7)$$

A tömörebb írásmód kedvéért vezessük be a következő jelölést

$$A_l = e^{j\Delta \Phi_l}$$

és ezzel

$$v_l(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_l^k e^{j \frac{k\omega_0}{n} t} \quad (8)$$

Az (1) és (8) egyenletek felhasználásával

$$y_1(t) = \left[\int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta(\omega) \right] \cdot \left[\frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_1^k e^{j \frac{k\omega_0}{n} t} \right]$$

$$y_l(t) = \left[\int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta(\omega) \right] \cdot \left[\frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_l^k e^{j \frac{k\omega_0}{n} t} \right] \quad (9)$$

$$y_n(t) = \left[\int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta(\omega) \right] \cdot \left[\frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_n^k e^{j \frac{k\omega_0}{n} t} \right]$$

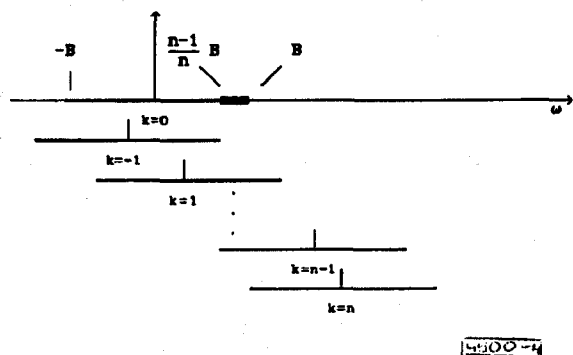
Az $y_1(t)$ spektrális előállítását a $H_1(j\omega)$ átviteli függvénnyel szorozva, és így tovább $y_n(t)$ -t $H_n(j\omega)$ -val transzformálva azt kívánjuk elérni, hogy a $k = 0$ -hoz tartozó tagok összeadódjanak, a $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (n-1)$ -hez tartozók pedig kiessenek a szummázás után.

A (9) egyenletrendszer l -edik egyenletét átalakítva kapjuk, hogy

$$y_l(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-B}^B c_k A_l^k e^{j \left(\frac{k \omega_0}{n} + \omega \right) t} d\beta(\omega) \quad (10)$$

Fenti egyenletből jól látható, hogy a H_1 transzformációt a $\frac{k \omega_0}{n} \pm B$ tartományokon kell meghatározni.

Ahhoz, hogy a szummázó kimenetén megjelenő $y_0(t)$ jel spektrális előállítását $\omega_0/2$ -ig meg egyezzen az ekvidisztáns mintavételezéshez tartozó $y(t)$ előállításával, a $k = n-1$ frekvenciákhoz tartozó tartományt még figyelembe kell venni, de a $k = n, n+1 \dots$ már érdektelen. A 4. ábra a pozitív k



4. ábra. Az $y_l^T(t)$ jel spektrumának tartományai

értékek körül tartományokat szemlélteti. A 4. ábrán a vastag vonallal jelölt résztartományt vizsgálva látható, hogy ebbe a tartományba csak a $k=0, k=1, \dots, k=n-1$ körül tartományokból kerülhetnek komponensek. Ezért a H_1, \dots, H_n transzformációt úgy kell megválasztani, hogy a $k=0, 1, \dots, n-1$ összesen n feltételt kielégítsék. A $k=0$ -hoz tartozó követelményt a 4. ábrán jelölt $(\frac{n-1}{n}B, B)$ tartományra felírva, és a tartomány széleire bevezetve az (ω_1, ω_2) egyszerűbb jelölést, kapjuk, hogy

és a tartomány széleire bevezetve az (ω_1, ω_2) egyszerűbb jelölést, kapjuk, hogy

$$\sum_{l=1}^n y_l^T(t) \Big|_{k=0} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{n} \int_{\omega_1}^{\omega_2} c_0 A_l^0 H_l e^{j\omega t} d\beta(\omega) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega t} d\beta(\omega). \quad (12)$$

A (12) egyenletben az egyszerűsítést elvégezve, valamint a szummát kifejtve írható, hogy

$$c_0 A_1^0 H_1 + c_0 A_2^0 H_2 + \dots + c_0 A_n^0 H_n = n \quad (13)$$

A többi értékhez tartozó spektrális összetevőtől pedig azt követeljük, hogy az összegzés során eszenek ki. Az előzőekhez hasonló átalakítások után pl. a $k=n-1$ -edikre írható, hogy

$$c_{n-1} A_1^{n-1} H_1 + c_{n-1} A_2^{n-1} H_2 + \dots + c_{n-1} A_n^{n-1} H_n = 0. \quad (14)$$

Az összesen n követelményhez tartozó n egyenlet mátrix alakban írva

$$\underline{B} \underline{H} = \underline{N} \quad (15)$$

ahol

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} c_0 A_1^0 & c_0 A_2^0 & \dots & c_0 A_n^0 \\ c_1 A_1^1 & c_1 A_2^1 & \dots & c_1 A_n^1 \\ c_2 A_1^2 & c_2 A_2^2 & \dots & c_2 A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} A_1^{n-1} & c_{n-1} A_2^{n-1} & \dots & c_{n-1} A_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}, \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A (15) mátrix alakban felírt egyenletrendszerből c_0 -t kiemelve majd $c_1/c_0, c_2/c_0, \dots, c_n/c_0$ értékekkel egyszerűsítve írható

$$c_0 \underline{A} \underline{H} = \underline{N}, \quad (16)$$

ahol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_1^0 & A_2^0 & \dots & A_n^0 \\ A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^{n-1} & A_2^{n-1} & \dots & A_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

A (16) egyenletet formálisan megoldva

$$\underline{H} = \frac{1}{c_0} \underline{A}^{-1} \underline{N} \quad (17)$$

Ha az A_1, A_2, \dots, A_n mind különböző, akkor a Vandermonde-féle determináns nem tűnik el. Belátható, hogy ennek az a feltétele, hogy a minták mindegyike különböző időpontokra essen. A (7) egyenlettel meghatározott $\Delta \Phi_l$ minden $l=1, 2, \dots, n$ értékre különböző a $[0, 2\pi]$ intervallumban, ha a minták különböző időpontokra esnek. Mivel a minták T -vel periodikusak, $\Delta \Phi_{n+1} = \Delta \Phi_1 + 2\pi$. Ebből következik, hogy az A_1, A_2, \dots, A_n értékek is különbözők, továbbá $A_l \neq 0$, mert $|A_l| = 1 \forall l$ -re. A (17) egyenlet megoldása tehát létezik, és mivel \underline{A} nem tartalmazza az ω -t, \underline{H} is független ω -tól az $(\frac{n-1}{n}B, B)$

tartományban. Felhasználva, hogy $v_i(t)$ valós $\forall i$ -re, azaz $A_i = A_i^*$, valamint $|A_i^k| = 1 \forall i$ -re és k -ra, továbbá, hogy $x(t)$ szintén valós, tehát

$$e^{j\omega t} \Delta \beta(\omega) = e^{-j\omega t} \Delta \beta(-\omega),$$

könnyen belátható, hogy negatív frekvenciákon, azaz a $(-\frac{n-1}{n} B, -B)$ tartományon $H_i^- = \bar{H}_i^+$, ahol

H_i^- -vel a negatív, H_i^+ -vel pedig a pozitív tartományokhoz tartozó megoldást jelöltük. Mőgegyszer

utalva a 4. ábrán látható, hogy a $(\frac{n-2}{n} B, \frac{n-1}{n} B)$

tartományon a $k = -1, 0, 1, \dots, n-2$ értékekre kell a követelményeinket felírni. Így a (15) mátrixegyenlethez teljesen hasonló egyenletrendszer kapunk. Általában, $k = l+1, l+2, \dots, l+n$ esetén tetszőleges l érték mellett felírható n egyenlet, továbbá minden egyenletben

$$A_i^{l+2} H_i = A_i^1 (A_i^{l+1} H_i), \dots, A_i^{l+n} H_i = A_i^{n-1} (A_i^{l+1} H_i)$$

átírással A -ra újból Vandermode determinánst kapunk, tehát minden tartományra létezik megoldás. Fentiekből az is látható, hogy a (16) mátrixegyenletet elegendő egyszer megoldani, a többi tartományhoz tartozó megoldás ebből származtatható. Természetesen nemcsak a $k=0$ -hoz tartozó $(-B, B)$ sávban állítható vissza az eredeti $x(t)$ jel, bármely k -hoz tartozó transzportált jel is előállítható, csupán más résztartományokra kell a követelményeket felírni, és (16) mátrixegyenletet megoldani.

Részletes vizsgálattal belátható, hogy n mintából álló sorozat esetén, ha n páros akkor $\frac{n}{2}$, ha páratlan, akkor pedig $\frac{n-1}{2}$ különböző tartomány létezik.

Ha n páratlan, akkor még az is igaz, hogy a $(-\frac{1}{n} B,$

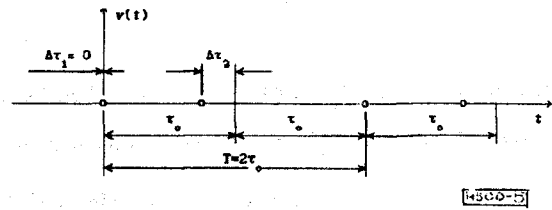
$\frac{1}{n} B)$ tartományban H_i valós $\forall i$ -re. Ha azt kíván-

juk elérni, hogy H_i minden résztartományban azonos legyen, akkor a $T = n\tau_0$ periódusidő alatt $z = n + [\frac{n-1}{2}]$ mintát kell venni, ahol $[\]$ egész részt jelöl.

Ezzel a jelentős, közel másfélszeres túlmintavételezéssel elérhető, hogy H_i ω -tól függetlenül konstans legyen a $(0, B)$ intervallumban. Így H_i ($i = 1, 2, \dots, z$) értéket szükséges meghatározni, azaz egy $n \times n$ -es mátrix helyett egy $z \times z$ méretű mátrixot kell invertálni.

3.2. Egyszerű példa nem ekvidisztáns mintavételezésre

Legyen $n=2$, és az $x(t)$ jelből az 5. ábrának megfelelően vegyünk mintát. (Az ábrán csak a mintavételi időpontok kerültek jelölésre.) Legyen továbbá



5. ábra. A mintavételezés időpontjai $n=2$ esetén

$\Delta \ll \tau_0$, így a (3) egyenlet c_k együtthatóira jó közelítéssel írható, hogy $c_k \cong 1 \forall k$ -ra. Ezzel a (17) egyenlet tovább egyszerűsödik, azaz

$$H = \underline{A}^{-1} N \quad (18)$$

A (7) egyenlet felhasználásával

$$\Delta \Phi_1 = 0,$$

valamint

$$\Delta \Phi_2 = -\pi \left(1 + \frac{\Delta \tau_1}{\tau_0} \right),$$

továbbá

$$A_1 = 1 \text{ és } A_2 = e^{j \Delta \Phi_2}.$$

Az A mátrix, H és N vektor pedig a következő alakú

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A (18) egyenletet H -ra megoldva kapjuk, hogy

$$H_1 = (\sin \frac{\Delta \Phi_2}{2})^{-1} \cdot \exp(j \frac{-\pi + \Delta \Phi_2}{2}), \text{ és}$$

$$H_2 = (\sin \frac{\Delta \Phi_2}{2})^{-1} \cdot \exp(j \frac{-\pi - \Delta \Phi_2}{2}). \quad (19)$$

A (19) megoldás mindig létezik, ha $\Delta \Phi_2 \neq \pm m 2 \pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$ ez a feltétel pedig teljesül, ha $\Delta \tau_2 \neq \pm (2m+1) \tau_0$. Jelen egyszerű esetben csak egy tartomány létezik, továbbá az előző fejezet alapján $H_i^- = \bar{H}_i^+$, azaz a H transzformáció valós jeleket állít elő. A H_1 és H_2 elemeket realizáló hálózatok nem kauzálisak, de tetszés szerinti pontossággal realizálhatók.

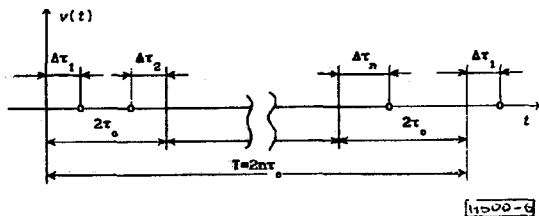
4. A jel és a jel differenciálhányadosának mintavételezése

Kézenfekvő, hogy ha nemcsak a jelből, hanem a jel differenciálhányadosából is mintát veszünk, akkor $x(t)$ egyértelmű meghatározásához elegendő ritkábban mintavételezni. Bizonyítható, hogy $T = n \tau_0$ időközönként a jelből és a jel első $(n-1)$ differenciálhányadosából vett minták egyértelműen meghatározzák $x(t)$ -t. Ez egy általános eset, rész-

letesen csak a jel és a jel első differenciálhányadosának mintavételezésével foglalkozunk.

4.1. A jel és a jel első differenciálhányadosának mintavételezése nem ekvidisztáns mintákból álló periodikus sorozattal

Legyen a mintavételezés időpontja a 6. ábra szerinti. Ezekben az időpontokban vegyünk mintát az



6. ábra. A jel és a jel első differenciálhányadosának mintavételezési időpontjai

$x(t)$ és az $x'(t)$ -ből. A $T=2n\tau_0$ idő alatt $x(t)$ -ből n mintát véve és $x'(t)$ -t is ugyanezekben a helyeken mintavételezve összesen $2n$ mintát kapunk. A 3.1. pontban leírttal azonos módon válasszuk szét $v(t)$ -t $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ -re, és szorozzuk $x(t)$ illetve $x'(t)$ -vel. A szorzatokat jelöljük $y_l(t)$ -vel, ahol $l = 1, 2, \dots, 2n$. Így a következő egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) \cdot v_1(t) \\ &\vdots \\ y_n(t) &= x(t) \cdot v_n(t) \\ y_{n+1}(t) &= x'(t) \cdot v_1(t) \\ &\vdots \\ y_{2n}(t) &= x'(t) \cdot v_n(t) \end{aligned} \quad (20)$$

Tekintettel arra, hogy $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ a $T=2n\tau_0$ időre periodikus, a (20) egyenlet értelemszerű átfűrésével jelen esetben a mintavételező jel az alábbi

$$v_l(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_l^k e^{j \frac{k \omega_0}{2n} t} \quad (21)$$

Ezzel írható, hogy

$$y_1(t) = \left[\int_{-B}^B e^{j \omega t} d\beta(\omega) \right] \cdot \left[\frac{1}{2n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_l^k e^{j \frac{k \omega_0}{2n} t} \right], \quad (22)$$

$$y_{2l}(t) = \left[\int_{-B}^B j \omega e^{j \omega t} d\beta(\omega) \right] \cdot \left[\frac{1}{2n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_l^k e^{j \frac{k \omega_0}{2n} t} \right]$$

Válasszunk ki egy $\Delta\beta(\omega)$ elemi tartományt, és ebben a $\Delta\beta(\omega)$ tartományban lévő jelet jelöljük $\Delta y(t)$ -vel a (22) alapján

$$y_l(t) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_l^k e^{j \left(\frac{k \omega_0}{2n} t \pm \omega \right) t} \right] \Delta\beta(\omega), \quad (23)$$

$$y_{2l}(t) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} j \omega c_k A_l^k e^{j \left(\frac{k \omega_0}{2n} t \pm \omega \right) t} \right] \Delta\beta(\omega).$$

A továbbiakban tételezzük fel, hogy $c_k \equiv 1 \forall k$ -ra. (A bizonyítás természetesen e feltételezés nélkül is elvégezhető a 3.1. pont mintájára.) A következőkben a hosszadalmas átalakítások helyett csak a főbb lépések kerülnek ismertetésre. A 4. ábrán vastag vonallal jelölt tartomány jelen esetben a következő

$$\left(\frac{2n-1}{2n} B, B \right).$$

Belátható, hogy ezen tartományban $H(\omega)$ meghatározásához a pozitív különbségi frekvenciákat kell figyelembe venni. Az egyenletek felírásához célszerű bevezetni további rövidítő jelölést. Legyen

$$\Omega_k = \frac{k \omega_0}{2n} - \omega$$

ahol

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1.$$

Olyan $H_1(\omega), H_2(\omega), \dots, H_l(\omega), \dots, H_{2n}(\omega)$ lineáris transzformáció meghatározása a cél, melyet a $\Delta y_1, \dots, \Delta y_l, \dots, \Delta y_{2n}$ jeleken végrehajtva, majd az összegzést elvégezve $\Delta y_0(t)$ -t kapunk. Ez a 3.1. pontban leírtakhoz hasonlóan csak úgy lehetséges, ha a $k=0$ -hoz tartozó komponensek összeadódnak, a többi $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ értékhez tartozó komponens pedig kiesik.

A (23) egyenletrendszer 2l-edik sorából csak a pozitív különbségi frekvenciákat tartalmazó részt $\Delta y^+(t)$ -vel jelölve írható, hogy

$$y^+_{2l}(t) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} j \omega A_l^k e^{j \Omega_k t} \right] \Delta\beta(\omega). \quad (25)$$

Csupán a szumma k-adik tagján végrehajtva a H_{2l} transzformációt, kapjuk

$$j \omega H_{2l}(\Omega_k) e^{j \Omega_k t}. \quad (26)$$

Mivel minden egyenletben a $H_1(\omega), H_2(\omega), \dots, H_{2n}(\omega)$ transzformációt a $\Delta\beta(\omega)$ -hoz tartozó ω frek-

vencián kell helyettesíteni, a frekvenciatranszformációt a (26)-ból formálisan betűcserével kapjuk, így

$$j\Omega_k A_i^k H_{2l}(\omega) e^{j\omega t} \quad (27)$$

A (23) egyenletrendszer minden során, és minden sor minden tagján elvégezve a fenti átírásokat, követelményünk a következő mátrix alakba írható

$$\underline{A}\underline{H} = \underline{N}, \quad (28)$$

ahol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_1^0 & \dots & A_n^0 & \dots & j\omega A_1^0 & \dots & j\omega A_n^0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_1^{n-1} & \dots & A_n^{n-1} & \dots & j\Omega_{n-1} A_1^{n-1} & \dots & j\Omega_{n-1} A_n^{n-1} \\ A_1^n & \dots & A_n^n & \dots & j\Omega_n A_1^n & \dots & j\Omega_n A_n^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_1^{2n-1} & \dots & A_n^{2n-1} & \dots & j\Omega_{2n-1} A_1^{2n-1} & \dots & j\Omega_{2n-1} A_n^{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_2(\omega) \\ \vdots \\ H_{2n}(\omega) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 2n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A (28) egyenlet formálisan megoldva

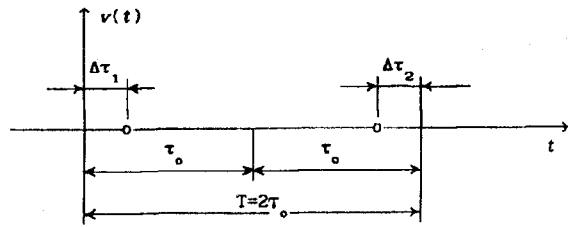
$$\underline{H} = \underline{A}^{-1} \underline{N} \quad (29)$$

A többi tartományokra a (28) egyenlethez hasonló mátrixegyenlet írható annak figyelembevételével, hogy mely komponensek eshetnek az éppen kiválasztott tartományba. Jelen esetben a $H(\omega)$ megoldás nem vezet ω -tól független konstans fázisú hálózatra, mint a 3.1. pontban. A (29) kiszámításával csak a $\left(\frac{2n-1}{2n} B, B\right)$ tartományon belül egy

rögzített pontban kapjuk meg $H(\omega)$ értékét, ezért a számítás minden ω -ra meg kell ismételni. Ha n kicsi, akkor $H(\omega)$ zárt alakban magadható.

4.2. Egyszerű példa a jel és differenciálhányadosának mintavételezésére

A 6. ábra általános esetéből kiindulva, $n=1$ esetén a mintavétel időpontjai a 7. ábrán látható módon alakulnak. Vizsgáljuk azt a legegyszerűbb esetet, amelyikben $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = 0$ azaz $T = 2\tau_0$ időközönként (ekvidisztáns módon) mintát veszünk



11300-7

7. ábra. A jel és a jel első differenciálhányadosának mintavételezési időpontjai $n=1$ esetén

$x(t)$ és $x'(t)$ jelekből. Ebben a speciális esetben a (28) egyenlet a következő alakú

$$\begin{bmatrix} 1 & j\omega \\ 1 & j\left(\frac{\omega_0}{2} - \omega\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_2(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

A (30) egyenletrendszert $H_1(\omega)$ és $H_2(\omega)$ -ra megoldva kapjuk, hogy

$$H_1(\omega) = \frac{2\left(\frac{\omega_0}{2} - \omega\right)}{\frac{\omega_0}{2} - 2\omega}, \quad H_2(\omega) = \frac{2j}{\frac{\omega_0}{2} - 2\omega} \quad (31)$$

A (31) egyenletekkel adott $H_1(\omega)$ és $H_2(\omega)$ az $\omega = \omega_0/4$ -nél szingularitással rendelkezik, és ez a $[0, \omega_0/2)$ intervallum közepére esik. Bizonyítható, hogy a visszaállítás ekkor is egyértelmű, a szummázó kimenetén a határátmenet létezik.

5. Periodikus jel mintavételezése

Vizsgálatainkat korlátozzuk kizárólag periodikus jelekre. Ez nem jelent különösebb megszorítást, mivel a periodikus jelekre kapott eredmények több oldalról megközelítve is állandósíthatók. A periodikus jelek jellegzetes pontjai — pl. nullaheiyei, vagy helyi szélsőértékeinél felvett értékei — bonyolult kapcsolatban vannak a jel Fourier komponenseivel. Három komponensből álló jel nulla-helyei nem adhatók meg zárt alakban, ezért a helyi szélsőértékek és az időfüggvény közötti kapcsolatteremtés kérdését más oldalról kell megközelíteni.

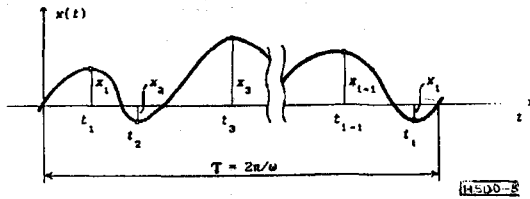
5.1. Periodikus jel nullahelyeinek száma

Egy sávkorlátos periodikus jel mindig felírható a következő alakban

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-n_L}^{n_H} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t) = \\ &= \sum_{n=-n_L}^{n_H} c_n \sin(n\omega t + \Phi_n), \end{aligned} \quad (32)$$

ahol n pozitív egész szám, és $n_L \leq n_H$. Jelöljük $x(t)$ periodusidejét T -vel, így $T=2\pi/\omega$. Helyezzük el a $t=0$ időpontot az $x(t)$ jel valamelyik pozitív nullátmenetnél, mint az a 8. ábrán látható. Az $x(t)$ jelnek

$$2\omega_H < \omega_0. \quad (37)$$



8. ábra. Periodikus, véges sávszélességű jel helyi szélsőértékei

a $[0, T)$ intervallumban i nullahelye van, és korlátok közé szorítható. Bizonyítható, hogy

$$h(n_L \omega) \leq i < h(n_H \omega), \quad (33)$$

ahol $h(n_L \omega)$ a legkisebb, $h(n_H \omega)$ pedig a legnagyobb frekvenciájú komponens nullahelyeinek számát jelenti ugyanezen intervallumban. Ebből következik, hogy a $x(t)$ jel nullahelyeinek száma

$$2n_L \leq i < 2n_H. \quad (34)$$

5.2. Periodikus jel nem ekvidisztáns mintavételezése és tulajdonságai

Legyen $x(t)$ a (32)-nek megfelelő alakú és a $[0, T)$ intervallumban vegyünk mintát a jel helyi szélsőértékeinél a 8. ábrának megfelelően. Vezessük be a következő egyszerűsítő jelöléseket

$$x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_i = x(t_i),$$

valamint

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \dots, \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Az $\{x_1, \Delta t_1, x_2, \Delta t_2, \dots, x_i, \Delta t_i\}$ halmaz egyértelműen meghatározza $x(t)$ -t, ha $\omega_H < 2\omega_L$, azaz ha $x(t)$ komponensei egy oktávnál szűkebb sávba esnek. Ugyanis, ha az $x(t)$ jelből a $[0, T)$ intervallumban $2i$ ekvidisztáns mintát veszünk, akkor $\tau_0 = T/2i$, és a mintavételi frekvencia

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0} = 2\pi \frac{2i}{T}. \quad (35)$$

A legkedvezőtlenebb esetben $i=2n_L$ a (34)-ből adódóan, és (35)-be helyettesítve

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} (2 \cdot 2n_L) = 4n_L \omega = 4\omega_L. \quad (36)$$

Feltételünk értelmében $\omega_H < \omega_L$, összevetve a (36)-el adódik, hogy

Tekintettel arra, hogy $i \geq 2n_L$, a (37) mindig teljesül, tehát a $2i$ ekvidisztáns minta egyértelműen meghatározza $x(t)$ -t. A 4.1. értelmében, ha $x(t)$ és $x'(t)$ jelekből $T=2n\tau_0$ idő alatt n nem ekvidisztáns mintát veszünk, akkor a minták meghatározzák $x(t)$ -t. A periodikus $x(t)$ jelnek a $[0, T)$ intervallumban i helyi szélsőértéke van, azaz $T=2i\tau_0$, tehát az i nem ekvidisztáns minta egyértelműen meghatározza $x(t)$ -t. (A differenciáhányadosok mind nullák, de a t_1, t_2, \dots, t_i időpontok nem semmitmondók.)

A helyi szélsőértékeknel történő mintavételezést a továbbiakban illesztett mintavételezésnek nevezzük. Az illesztett mintavételezés egy transzformáció, mely az $x(t)$ jelből az $\{x_1, \Delta t_1, x_2, \Delta t_2, \dots, x_i, \Delta t_i\}$ halmazt állítja elő. Jelöljük ezt a transzformációt AS szimbólummal. (Adaptive Sampling)

Mielőtt e mintavételezésének főbb tulajdonságait felsorolánk, vizsgáljuk meg, hogy a periodikus jelek összege milyen feltételek mellett lesz szintén periodikus. Ha egy $x_1(t)$ jel T_1 -re, $x_2(t)$ pedig T_2 -re periodikus, akkor $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ csak akkor lehet periodikus T -re, ha

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2, \quad (38)$$

ahol n_1 és n_2 pozitív egész számok. Ebből következik, hogy egy olyan transzformációra, mely előállítja a T_1 és T_2 periodusidőket, nem lehet érvényes a szuperpozíció.

1. Tulajdonság

Az illesztett mintavételezés a geometriai értelemben hasonló jeleket hasonló halmazokra képezi le, ugyanis

$$AS\{x(t)\} = \{x_1, \Delta t_1, x_2, \Delta t_2, \dots, x_i, \Delta t_i\},$$

$$AS\{\alpha x(t)\} = \{\alpha x_1, \beta \Delta t_1, \alpha x_2, \beta \Delta t_2, \dots, \alpha x_i, \beta \Delta t_i\}.$$

Ezzel a tulajdonsággal minden lineáris transzformáció rendelkezik. Ezenkívül az illesztett mintavételezés a τ idővel való eltolása invariáns, azaz

$$AS(x(t-\tau)) = \{x_1, \Delta t_1, x_2, \Delta t_2, \dots, x_i, \Delta t_i\}.$$

2. Tulajdonság

Az illesztett mintavételezés megtartja a jel periodikus tulajdonságát, azaz ha $x(t)$ periodikus, akkor a minták is periodikusak, $x_k = x_{k+1}$, valamint $\Delta t_k = \Delta t_{k+1}$. Ebből fentiek alapján következik, hogy nem érvényes a lineáris szuperpozíció, azaz

$$AS\{x_1(t) + x_2(t)\} \neq AS\{x_1(t)\} + AS\{x_2(t)\}.$$

3. Tulajdonság

Ha egy $x(t)$ jel T -vel periodikus, akkor minden rész sávja T -vel szintén periodikus, ezért különböző oktávokban kell létezni azonos T idővel azonos $x_k = x_{k+1}$ illesztett mintáknak. Másszóval a különböző oktávokban például kell létezni olyan pozitív nullátmetszéseknek, melyek között az időintervallum azonos T hosszúságú.

4. Tulajdonság

Ha $x(t)$ periodikus, akkor minden lineáris transzformáltja is periodikus, tehát az

$$x(t) = x(t+T), x^{(1)}(t) = x^{(1)}(t+T), \dots, x^{(l-1)}(t) = x^{(l-1)}(t+T)$$

Jelek illesztett mintái is periodikusak T -vel, és a 4. pont értelmében egyértelműen meghatározzák $x(t)$ -t, ha a jel spektruma egy oktávnál szűkebb. Ebből következik, hogy egy T^{-1} hipotézisről $T + \Delta t$ idő alatt eldönthető illesztett mintái alapján, hogy lehet-e periodusidő. (Nem szükséges $2T$ hosszúságú ablak ismerete!)

5. Tulajdonság

Ha egy $x(t)$ jelnek a $[0, T)$ intervallumban $l > 2n_L$ számú nullaheye van, akkor az illesztett minták a jelet túlhatározzák, a felesleges minták elhagyhatók.

6. Záró megjegyzés

Az illesztett mintavételezés első két tulajdonságának együttes fennállása önmagában is érdekes, és lehetőséget ad arra, hogy segítségével megkíséreljük modellezni a hallásmechanizmust. Az emberi hallásról szerzett eddigi ismeretek [7], [8], [9] és [10] jól összhangban vannak az illesztett mintavételezés tulajdonságaival. Mint az a [11]-ben közölt pszichoakusztikai vizsgálatokból kiderül, az időös frekvenciatartománybeli felbontás szorzata lényegesen kisebb, mintsem spektrum mérésen alapuló modellel magyarázható lenne [12]. Az illesztett mintavételezés kedvező tulajdonságokat mutat, ezért alkalmasnak tűnik a beszédjel feldolgozására, például a "pitch" frekvencia detektálására, különösen akkor, ha több oktávban, vagy oktáv-

nál szűkebb sávban párhuzamos feldolgozás történik. Természetesen sokféle feldolgozás képzelhető el, például a jól bevált AMDF (Average Magnitude Difference Function) módszer [10] az illesztett mintákon egyszerűen alkalmazható. Annak tisztázásához azonban, hogy az illesztett mintavételezéssel kváziperiodikus jelekre milyen tulajdonságú becslés adható, további részletes vizsgálatok szükségesek.

Köszönetnyilvánítás

Munkánk során igen sok segítséget nyújtott dr. Osváth László, valamint dr. Pap László, aki felhívta a figyelmem az általánosítás időtartományban megfogalmazható szellemes lehetőségeire. Külön köszönöm Szekeres Gábor gondos munkáját, mellyel a kézirat tévedéseit korrigálta. Továbbá szeretném megköszönni közvetlen munkatársam dr. Farkas György és dr. Jereb László segítségét, akik tanácsalkkál és más területen végzett munkájukkal lehetővé tették e cikk megírását.

Irodalom

- [1] H. Freeman Discrete-Time Systems John Wiley & Sons, INC. New York, 1965.
- [2] H.W. Thomas, N.P. Lutte, Z-transform Analysis of Nonuniformly Sampled Digital Filters. Proc. IEE, vol. 119, No.11, 1972.
- [3] A. Wojtkiewicz, M. Tuszyński, W. Klimkiewicz, Analysis and Design of Digital. Proc Filters Processing Nonuniformly Sampled Signals. Proc. of ECCTD'85, Prague Czechoslovakia, 1985.
- [4] A. Weinberg and B. Liu, Discrete Time Analysis of Nonuniform Sampling First- and Second-Order Digital Phase Lock Loops. IEEE Trans. on Communications, Vol. COM-22, No.2. Feb. 1974.
- [5] G.A. Korn-T.M. Korn, Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, 1975.
- [6] Információ közlése és feldolgozása. Szerkesztő: Csibi Sándor. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [7] H. Fletcher: Speech and Hearing. Nostrand Co., New York, 1950.
- [8] Tarnóczy T.: Zenei akusztika. Zeneműkiadó, Budapest, 1982.
- [9] G.V. Békésy: Experiments in Hearing, New York, 1960.
- [10] Gordos G., Takács Gy.: Digitális beszédfeldolgozás. Műszaki Kiadó Budapest, 1983.
- [11] L.M. Grobber: Apperclation of shorts tones. Seventh international congress on acoustics, Budapest, 1971 Vol. 3. 329-332.
- [12] Gabor, D.: Acoustical Quanta and the Theory of Hearing Nature, 1947. vol. 159. 591-692.