Semi-Markov folyamatok megbízhatósági alkalmazással

BEGAIN, Khalid
Jordánia
BME, Híradástechnikai Elektronika Intézet

ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen cikk a semi-Markov folyamatok alapmodelljének kialakításával, analízisével és egyfajta alkalmazásával foglalkozik. Célja az általános meghibásodási-javítási folyamatokkal rendelkező bonyolult rendszerek megbízhatósági vizsgálatának lehetővé tétele, és ezen rendszerek megbízhatósági paramétereinek meghatározása. A kapott eredmények (megfelelő interpretációval) alkalmasak különböző átlagos tartózkodási időparaméterek vizsgálatára.

BEGAIN, KHALID

Villamosmérnöki, illetve Híradástechnikai szakmérnöki diplomáját a Budapesti Műszaki Egyetemen 1986-ban, illetve 1988-ban szerezte. A cikk írásakor a BME Híradástechnikai Elektronika Intézetében dogozott, mint tudományos segédmunkatárs. Fő érdeklődési területe a bonyolult rendszerek megbízhatósági vizsgálata és az általános tömeg- kiszolgálási elmélet.

1. BEVEZETÉS

1.1 Előszó

A semi-Markov folyamat olyan sztochasztikus folyamat, amelyben az állapotok közötti átmenetek egy Markov-láncot alkotnak, de az egyes állapotban eltöltött idők tetszőleges eloszlásúak.

A következőkben az alapvető jelöléseket és definíciókat vezetjük be. Az irodalomban több féle módon jelölik az egyes mennyiségeket, ennek ellenére a továbbiakban következetesen igyekszünk eljárni, lehetőleg követve ezzel Howard [1]-ben használt jelölés rendszerét, ós ettől csak akkor térünk el, ha az érthetőség azt megköveteli.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van a markovi folyamatok alap definícióval ós összefüggéseivel. Arra a célra tömör összefoglalókat a [10,11]-ben, ós részletesebb leírásokat a [1,3,6]-ben találunk.

1.2 Osztályozás

Hasonlóan a markovi folyamatokhoz, a semi-markovi folyamatokat alapvetően kót szempont alapján osztályozhatjuk:

- időparaméter szerint lehet
  - diszkrét idejű, illetve
  - folytonos idejű semi-markovi folyamat,
- állapottér szerint lehet
  - diszkrét állapotterű, és ezen belül
    - véges állapotterű, vagy
    - megszámlálhatóan végtelen állapotterű folyamat,
  - folytonos állapotterű semi-Markov folyamat.

A következőkben csak a véges állapotterű folytonos idejű semi-Markov folyamatokkal foglalkozunk, mivel ezek segítségével tudjuk a valós rendszerek meghibásodási-javítási folyamatait leírni. A diszkrét időre csak abban az esetben térünk ki, ha ennek segítségével a számítás szempontjából sokkal egyszerűbb rekurzív kifejezéseket kapunk.

Beérkezett: 1988. VII. 22. (H)

2. A SEMI-MARKOV FOLYAMATOK ALAP MODELLJE

2.1 Alapmennyiségek és definíciók

Tekintsünk egy sztochasztikus folymatot, amelyben J_0 jelöli a folyamat kezdeti állapotát. Minden $k \geq 1$-re, J_k jelöli a folyamat állapotát az k-adik átlépést követően. Legyen

$$p^{k}_{ij} = P[J_k = j \mid J_{k-1} = i] \qquad (2.1)$$

annak valószínűsége, hogy a folyamat az i. állapotot követően a j. állapotba fog lépni. A következőkben nem kívánunk foglalkozni az átlépésszámtól való függéssel, így ezt a felső k index elhagyásával jelezzük. Jelölje továbbá $x=\{x_1, \ldots, x_N\}$ a folyamat állapotterét. A t_{ij} átmeneti valószínűségeknek teljesíteniük kell ugyanazokat a követelményeket, mint a markovi folyamatok esetében, azaz

$$p_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \quad j = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1, \qquad (2.3)$$

ahol N a rendszer állapotainak a számát jelöli.

Ha a folyamat belép az i. állapotba azonnal kisorsolja a következő állapotot $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{iN}$ valószínűségi eloszlás alapján. Miután a j. állapot kiválasztásra kerül a folyamat egy τ_{ij} ún. tartásidőt tölt el az i. állapotban az újabb átlépésig ($i \to j$). A tartásidő pozitív valós értékű valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvényét $h_{ij}(.)$-vel jelöljük.

Megfigyelhető, hogy a $\{J_n, n = 1, 2, \ldots\}$ folyamat egy Markov-láncot alkot P_{ij} átmeneti valószínűségekkel. Az ilyen folyamatokat beágyazott Markov folyamatoknak szokás hívni. Jelölje továbbá $n_i(t)$ az i. állapotba törtónt belépések számát a $(0,t)$ időintervallumban, és definiáljuk az összes átlépés számot, mint

$$n(t) = \sum_{i=0}^{N} n_i(t) \qquad (2.4)$$

Ha $Z(t)$-vel jelöljük az eredeti sztochasztikus folyamat állapotát, akkor

$$Z(t) = J_{n(t)}. \quad (2.5)$$

Definíció 1.
A $\{Z(t), t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot semi-Markov folyamatnak nevezzük.

Definíció 2.
Az $\{n(t) = (n_1(t), \ldots, n_N(t), t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot Markov felújítási folyamatnak nevezzük.

Az eddigiek alapján világos, hogy a semi-Markov folyamat megadja a folyamat állapotát a t időpillanatban, míg a Markov felújítási folyamat egy számláló folyamat, amely számlálja az egyes állapotokban történt (ill. az összes) belépések számát az adott t idő alatt.

Egy semi-Markov folyamat megadásához specifikálni kell N^2 tartásidő sűrűségfüggvényt a p_{ij} átmeneti valószínűségek megadása mellett.

A τ_{ij} tartásidő elteltével a folyamat átlép a j. állapotba, ahol azon nyomban kisorsolja a következő k állapotot ós ez alapján $h_{jk}(t)$ sűrűsógfüggvónyű τ_{jk} véletlen tartásidőt tölt el ott, ós így tovább.

Az első felvetődő kérdés most az, hogy történhet-e végtelen számú átlépés véges idő alatt.

Definíció 3.
Egy i állapot reguláris, ha

$$P[n(t) = \infty \mid J_0 = i] = 0 \qquad \text{minden } t < 0 \quad (2.6)$$

Egy Markov felújítási folyamat reguláris, ha minden állapota reguláris.

Egy véges állapotterű Markov felújítási folyamat mindig reguláris, ha minden állapotra annak valószínűsége, hogy az adott állapotban a tartózkodási idő nullával egyenlő, egynél kisebb [2].

Tekintettel arra, hogy mi csak véges állapotterű rendszereket vizsgálunk, célszerűnek látszik a mátrixos formák bevezetése. A következőkben bevezetendő mátrixok mérete NxN kivéve, ha ezt külön megadjuk.

Ezek alapján jelölje $P = \{p_{ij}\}$ az átmeneti valószínűségek mátrixát, a $H(.) = \{h_{ij}(.)\}$ mátrix pedig a hozzátartozó tartásidő sűrűségfüggvényeket tartalmazza.

2.2 A magfüggvóny

Vezessük be a $c_{ij}(.)$ mennyiségeket a következő módon:

$$c_{ij}(t) = p_{ij} \cdot h_{ij}(t) \quad (2.7)$$

A $c_{ij}(t)$ mennyiségeket magfüggvényeknek, a $C(t) = \{c_{ij}(t)\}$ mátrixot magmátrixnak nevezik.

A fenti művelet nem hagyományos mátrixszorzás, hanem két mátrix azonos helyen lévő elemeinek a szorzata. Erre bevezetjük a kongruens mátrix szorzási műveletet úgy, hogy

$$c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij} \quad (2.8)$$

ós azt a következőképpen jelöljük

$$C = A \,¤\, B \quad (2.9)$$

A függelék több információt ós néhány elemi azonosságot tartalmaz a kongruens szorzásról.

Ezek alapján a magmátrix a következő módon is kifejezhető

$$C(t) = P \,¤\, H(t) \quad (2.10)$$

2.3 Várakozási idők

Definiáljuk azt a τ_i feltétel nélküli időt, amely megadja egy adott i. állapotban eltöltött időt a következő állapot ismerete nélkül. Ezt az időt az i. állapotbeli várakozási időnek nevezik.

Legyen $w_i(t)$ ezen várakozási idő sűrűségfüggvénye, így

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} h_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}(t), \quad (2.11)$$

amely a magmátrixban a sorösszegeket jelenti.

A definíció alapján a várakozási idő momentumai meghatározhatók a tartásidő momentumai segítségével

$$\overline{\tau^k}_i = \int_0^\infty \tau^k \sum_{j=i}^{N} p_{ij} h_{ij}(\tau)\, d\tau = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \int_0^\infty h_{ij}(\tau)\, \tau^k\, d\tau =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \overline{\tau^k}_{ij} \quad (2.12)$$

Mátrix formában $W(t) = \{w_i(t)\}$.

2. 4 Az intervallum átmeneti valószínűségek

Legyen $\phi_{ij}(t)$ annak valószínűsége, hogy a folyamat a j. állapotban lesz a t időpillanatban feltéve, hogy a 0 pillanatban lépett be az i. állapotba. Ezt a valószínűséget a (0, t) időintervallumra vonatkozó intervallum átmeneti valószínűségnek fogjuk hívni.

Vizsgáljuk meg azt, hogy milyen módon lehet az a folyamat t idő múlva j. állapotban, amely éppen most lépett be az i. állapotba? Az egyik lehetséges eset az, ha i ós j ugyanazt az állapotot jelöli, és a folyamat egyáltalán nem lépett ki ebből az állapotból a (0, t) idő alatt. Ez azt is jelenti, hogy a folyamat csak t idő után teszi meg az első átlépést. Minden más esetben a folyamat szükségszerűen megtesz legalább egy átlépést a (0, t) idő alatt. Például, először átlép egy k állapotba τ idő után, azután onnan bizonyos számú átlépésben átkerül a j. állapotba a maradó $t - \tau$ idő alatt.

Összefoglalva ezeket a meggondolásokat a következőt kapjuk:

$$\varphi_{ij}(t) = \delta_{ij} W^c{}_i(t) + \sum_{k=1}^{N} p_{ik} \int_0^1 h_{ik}(\tau)\, \varphi_{kj}(t-\tau)\, d\tau \quad (2.13)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N, \quad t \geq 0$$

ahol $W^c{}_i(t) = P[\tau_i > t]$. Ugyanez mátrix alakban:

$$\Phi(t) = W^c(t) + \int_0^t (P \,¤\, H(\tau))\, \Phi(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= W^C(t) + \int_0^t C(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.14)$$

Most láthatjuk a $C^C(\tau)$ mátrix bevezetésének a célszerűségét, mitöbb a $C(\tau)$ mátrix sorösszeggel megadják a $W(\tau)$ diagonalmátrix elemeit. $C(\tau)$ τ minden értéke melleti integrálja megadja a P átmeneti valószínűség mátrixot.

Mint látjuk, (2.17) egyenlet megoldásához egy integrálegyenletet kellene megoldani, amely általában nem egyszerű feladat. Diszkrét idejű semi-Markov folyamatok esetében a fenti kifejezés a következő alakban írható le a (0, n) időintervallumra:

$$\varphi_{ij}(n) = \delta_{ij}\, W^C{}_i(n) + \sum_{k=1}^{N} p_{ik} \sum_{m=0}^{n} h_{ik}(m)\,\varphi_{ij}(n-m) \qquad (2.15)$$

amely egyszerű rekurzív kifejezés. Ebből következően egyes esetekben érdemes áttérni a diszkrét idővel történő számításra.

3. FOLYTONOS IDEJŰ SEMI-MARKOVI FOLYAMATOK ANALIZISE TRANSZFORMÁCIÓVAL

3.1 A *Laplace transzformáció*

Mint láttuk, ha az intervallum átmeneti valószínűségeket akarjuk meghatározni, akkor ezt csak hosszadalmas számítások útján tehetjük meg. Az analitikus vizsgálatokban viszont igen elterjedt a transzformációk használata. Folytonos idejű vizsgálatok esetén a Laplace-transzformációt használják a leggyakrabban.

A Laplace-transzformáció részletesebb ismertetésére itt nem szeretnék kitérni, mivel erre több irodalomban találunk igen jó leírásokat ós összefoglalókat. A következőkben a transzformáltat egy felső csillag indexszel '*' fogjuk jelölni.

3.2 *Az intervallum átmeneti valószínűségek transzformáltja*

Képezzük a (2. 13) kifejezés transzformált alakját:

$$\varphi^*_{ij}(s) = \delta_{ij}\, W^{C*}{}_i(s) + \sum_{k=1}^{N} p_{ik}\, h^*_{ik}(s)\,\varphi^*_{kj}(s) \qquad (3.1)$$

A transzformációnak köszönhetően a konvolució szorzattá változik.

A Laplace-transzformáció elmélete alapján az i-edik állapot várakozási ideje komplementer eloszlásfüggvényének transzformáltja kifejezhető a várakozási idő transzformált sűrűségfüggvénye segítségével

$$W^{C*}{}_i(s) = \frac{1}{s}\,(1 - w^*_i(s)) \qquad (3.2)$$

Mivel a várakozási idő sűrűségfüggvénye megadható az átmeneti valószínűségek és a tartási idők sűrűségfüggvénye (magfüggvónyek) segítségével

$$w^*_i(s) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\, h^*_{ij}(s) = \sum_{j=1}^{N} c^*_{ij}(s) \qquad (3.3)$$

így az intervallum átmeneti valószínűségek transzformáltja csupán az átmeneti valószínűségektől és a tartási idők transzformált sűrűségfüggvényétől függ.

Most fejezzük ki a (3. 1)-t transzformált mátrix formában:

$$\Phi^*(s) = W^{C*}(s) + (P \,\square\, H^*(s))\,\Phi^*(s) =$$
$$= W^{C*}(s) + C^*(s)\,\Phi^*(s). \qquad (3.4)$$

A fenti egyenlet megoldása:

$$\Phi^*(s) = [I - C^*(s)]^{-1}\, W^{C*}(s), \qquad (3,5)$$

ahol I az egység mátrixot jelöli.

A fenti mátrixinverz mindig létezik az általunk vizsgált valós rendszerek esetében.

3.3 *Stacionárus viselkedés*

Térjünk ki most az intervallum átmeneti valószínűségek viselkedésének vizsgálatára hosszú működési időt feltételezve. Vezessük be a stacionárius intervallum átmeneti valószínűségek mátrixát:

$$\Phi = \lim_{t\to\infty} \Phi(t). \qquad (3.6)$$

A Laplace-transzformáció határórtóktótele alapján Φ kifejezhető, mint

$$\Phi = \lim_{s\to 0} s\,\Phi^*(s). \qquad (3.7)$$

Minthogy a szorzat határértéke megegyezik a határértékek szorzatával (ha ezek lóteznek), így

$$\Phi = \lim_{s\to 0} s\,\Phi^*(s) = \lim_{s\to 0} s\,[I - C^*(s)]^{-1} \lim_{s\to 0} W^{C*}(s). \qquad (3.8)$$

Tekintsük most egyenként a jobb oldali mennyiségeket. A második határérték:

$$\lim_{s\to 0} W^{C*}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{I - w^*(s)}{s} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{s\to 0} -\frac{d}{ds}\, w^*(s) = M \qquad (3.9)$$

ahol $M = \{\bar{\tau}_i\}$ a várakozási idők átlagértékének diagonálmátrixa.

Definiáljunk továbbá a $T^*(s)$ transzformált mátrixot, mint

$$T^*(s) = s\,[I - C^*(s)]^{-1} = s\,[I - P \,\square\, H^*(s)]^{-1}, \qquad (3.10)$$

és rendezzük át az egyenlőséget a következő módon:

$$T^*(s) - T^*(s)\,[P \,\square\, H^*(s)] = s\,I. \qquad (3.11)$$

Vizsgáljuk meg ezt az egyenletet az $s\to 0$ esetre, és vegyük észre, hogy a Laplace-transzformáció definíciójából következik, hogy

$$H^*(0) = U, \qquad (3.12)$$

ahol U jelöli a csupa 1-es elemű mátrixot. A (3. 11) egyenlet így a következőre egyszerűsödik:

$$T^*(0) = T^*(0)\,P. \qquad (3.13)$$

Mint látjuk $T^*(0)$ a mátrixnak ugyanazt az egyenletet kell teljesíteni, mint a beágyazott Markov-lánc stacioner állapotvalószínűség vektorának, azaz

$$\Pi = \Pi\,P, \qquad (3.14)$$

így a $T^*(0)$ mátrix mindegyik sora egy arányossági tényezőtől eltekintve megegyezik a beágyazott Markov-lánc stacioner állapot valószínűség vektorával, amely egyértelmű, ha a lánc ergodikus.

Most mát felírhatjuk Φ (3. 8)-nak megfelelő értékét:

$$\Phi = T^*(0)\ M \qquad (3.15)$$

amelynek elemei

$$\varphi_{ij} = t_{ij}(0)\,\tau_j = k_i\,\pi_j\,\tau_j \qquad i,j = 1,\ldots,N, \quad (3.16)$$

ahol a k_i határozatlan arányossági tényező a $T^*(0)$ mátrix i-edik eleme ós a Π vektor között. Mivel a φ_{ij} intervallum átmeneti valószínűségek összege az összes állapotra eggyel egyenlő, így

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij} = 1 = \sum_{j=1}^{N} k_i\,\pi_j\,\tau_j = k_i \sum_{j=1}^{N} \pi_j\,\tau_j, \qquad (3.17)$$

amelyből

$$k_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \pi_j\,\tau_j} \qquad i,j = 1,\ldots,N. \quad (3.18)$$

Látható, hogy az arányossági tényező ugyanaz az összes állapotra. Definiáljuk az egy tetszőleges állapotbeli átlagos várakozási időt

$$\bar{\tau} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j\,\tau_j \qquad (3.19)$$

ós írjuk át a (3. 16) kifejezést a következő alakra:

$$\varphi_{ij} = \frac{\pi_j\,\tau_j}{\bar{\tau}} = \varphi_j \qquad (3.20)$$

Mint várható volt, az intervallum átmeneti valószínűségek határértékei függetlenek a semi-markovi folyamat kezdeti állapotától, így elegendő a második index használata az elemek megkülönböztetésére. Szavakba foglalva a (3. 20) kifejezést: a semi-markovi folyamat határ int. átm. valószínűségei megegyeznek a hozzátartozó beágyazott Markov- lánc stacionárius állapotvalószínűségeivel, megszorozva az adott állapot átlagos várakozási idejével ós normalizálva az állapotok átlagos várakozási idejére.

Ujból emlékezzünk arra, hogy a φ_j mennyiség megadja annak valószínűségét, hogy a folyamat a j. állapotban található feltéve, hogy a folyamat elég hosszú ideje működik.

Egy nagyon fontos megfigyelés a (3. 20) kifejezéssel kapcsolatban az, hogy a folyamat stacionárius viselkedését a tartásidő eloszlásoknak csupán a várható értéke befolyásolja.

Mivel a Φ mátrix sorai megegyeznek, így definiálhatjuk a határ intervallum átmeneti valószínűségek vektorát $\psi = \{\varphi_j\}$, ós kifejezhetjük ezt a beágyazott Markov-lánc stacionárius állapotvalószínűség vektorának segítségével:

$$\psi = \frac{1}{\bar{\tau}}\ \Pi\,M \qquad (3.21)$$

4. ÁLLAPOTCSOPORTBAN ELTÖLTÖTT ÁTLAGOS IDŐ

A következőkben bevezetünk néhány új valószínűség-ós időfogalmat az állapottérre, vagy annak egy részére. Célunk ezzel az, hogy megteremtsük a megfelelő apparátust néhány rendszerjellemző meghatározásához. Ilyen jellemzők a megbízhatósági vizsgálatok esetén az adott állapotcsoportbeli tartózkodási valószínűségek (pl. készenléti tényező) vagy az állapotok egy csoportjára vonatkozó várakozásidők (MTFF, MTTF, MUT, MDT, stb.).

Jelölje ν_{ij} egy adott R állapotcsoport elhagyásáig a $j \in R$ állapotban eltöltött összidőt feltéve, hogy a folyamat az $i \in R$ állapotba lépett be a $t = 0$ -ban. Az állapotcsoportban eltöltött idők vizsgálatához rendezzük át olymódon az állapotteret, hogy a vizsgált állapotcsoportba tartozó állapotok előre kerülnek, azaz $R = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\} \subset X$, ahol X a teljes állapotteret jelöli. Nevezzük az állapottérnek az R állapotcsoporton kívüli részét S-sel, azaz $S = X \backslash R = \{X_{k+1}, \ldots, X_N\}$. Ennek megfelelően rendezzük át a folyamathoz tartozó alapmátrixokat (P, H(t) és W(t)) a következő minta szerint, pl. P mátrixra

$$P = \begin{bmatrix} P_{RR} & P_{RS} \\ P_{SR} & P_{SS} \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

Jelölje ν az átlépési időt az R állapotcsoportból az S-be, feltéve, hogy a folyamat egy R állapotcsoportbeli állapotban kezdte a működését, azaz

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(0) = 1\,. \qquad (4.2)$$

A ν átlépési idő vizsgálatához eltekintünk az S állapotcsoporton belüli, ós az $S \rightarrow R$ állapotváltozásoktól is, így $P_{SR} = 0$ ós $P_{SS} = 0$.

Definiáljuk az $x_{ij}(t)$ indikátorfüggvényt, amelynek értéke 1, ha a folyamat a j. állapotban van a t időpillanatban, és 0, ha nem, feltéve, hogy a folyamat az i. állapotba lépett be a t=0-ban.

Könnyen belátható, hogy

$$\nu_{ij} = \int_0^{\infty} x_{ij}(t)\,dt\,, \qquad (4.3)$$

ós a j. állapotban eltöltött idő várható értéke

$$\bar{\nu}_{ij} = \int_0^{\infty} \overline{x_{ij}(t)}\,dt\,, \qquad (4.4)$$

Mivel azonban $P[x_{ij}(t) = 1 \mid i] = \varphi_{ij}(t)$ ós $P[x_{ij}(t) = 0 \mid i] = 1 - \varphi_{ij}(t)$, így,

$$\bar{\nu}_{ij} = \int_0^{\infty} \varphi_{ij}(t)\,dt\,, \qquad (4.5)$$

Figyelembe véve a Laplace-transzformáció definícióját ezt felírhatjuk, mint

$$\bar{\nu}_{ij} = \int_0^{\infty} \varphi_{ij}(t)\,e^{-st}\,dt \,\Big|_{s=0} = \varphi^*_{ij}(0) \qquad (4.6)$$

Felhasználva az előző fejezetben kapott eredményt, mógpędig

$$\Phi(s) = [I - C^{*}(s)]^{-1} W^{c^{*}}(s) = $$
$$= [I - P \,¤\, H^{*}(s)]^{-1} W^{c^{*}}(s)$$

s=0-t behelyettesítve az előzőeknek megfelelően

$$\Phi(0) = \lim_{s \to 0} s\, \Phi^{*}(s) = \lim_{s \to 0} s\, [I - C^{*}(s)]^{-1} \lim_{s \to 0} W^{c^{*}}(s) \quad (4.7)$$

és mivel tudjuk, hogy $H^{*}(0) = U$, ill. $\lim_{s \to 0} W^{c^{*}}(s) = M =$

$\{\bar{\tau}_i\}$, akkor vezessük be az $\bar{N} = \{\gamma_{ij}\}$ mátrixot:

$$\bar{N}_{RR} = [I_{kk} - P_{RR}]^{-1} M_{RR} \quad (4.8)$$

ahol $\bar{N}_{RR}$ az R állapotcsoportra vonatkozó várható átlépési idők mátrixa, mérete kxk.

Jelölje $\bar{\nu}_i$ az állapotcsoportban eltöltött idő várható értékét, feltéve, hogy a folyamat i-be lépett be a t=0-ban.

Akkor

$$\bar{\nu}_i = \sum_{j=1}^{k} \bar{\nu}_{ij} \quad (4.9)$$

Ha a folyamat a t=0 időpillanatban bizonyos kezdeti valószínűségi eloszlás szerint lép be az egyes állapotokba

$$\Pi(0) = \{\pi_1(0), \ldots, \pi_k(0), \pi_{k+1} \ldots, \pi_N(0)\}$$

Ha feltesszük, hogy a folyamat 1 valószínűséggel a vizsgált állapotcsoportból indult, azaz $\pi_i(0) = 0$, ha $i > k$ akkor ezen kezdeti eloszlással kiszámítjuk az állapotcsoportból való kilépés idejének ν várható értékét, amely

$$\nu = \Pi_k(0)\, \bar{N}_{RR}\, I_k \quad (4.10)$$

ahol I_k egy k hosszúságú csupa egyes elemű oszlop vektor.

5. MEGBÍZHATÓSÁGI PARAMÉTEREK MEGHATÁROZÁSA

Az eddigiekben bemutattuk a semi-Markov folyamatokat, ós meghatároztunk néhány jellemző mennyiséget velük kapcsolatban. Mint láttuk, a semi-markovi folyamatok időfüggő vizsgálata transzformációk segítségével elvégezhető. Az így kapott eredmények viszont nehezen értékelhetők, mivel a legtöbb esetben nem, vagy nagyon nehezen tudjuk a megoldást időtartományba visszatranszformálni. A fent említettek miatt általában a semi-Markov folyamatok stacionárius jellemzőinek meghatározásával, és így a kapott eredmények általában stacionárius valószínűségek, vagy átlagos idők. Jelen fejezetben az eddigi eredmények egyfajta alkalmazását mutatjuk be, az általános meghibásodási-javítási folyamattal rendelkező rendszerek megbízhatósági vizsgálatában. Az általános folyamatot az teszi indokolttá, hogy amíg a homogén Markov-láncok jó modellt alkotnak az elektronikus rendszerek meghibásodási folyamataira, addig a nem elektronikus meghibásodási és javítási folyamatok esetében szükségessé válik általánosabb tartási időeloszlások használata is.

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer megbízhatósági (meghibásodási-javítási) viselkedését leíró $\{z(t), t \geq 0\}$ folyamat semi-Markov folyamat $(P, H(t))$, ós legyen X a folyamat állapottere. Különböztessünk meg két állapotcsoportot az állapottérben: $R = \{X_1, \ldots, X_k\}$ a működóses állapotok és $S = X \setminus R = \{X_{k+1}, \ldots, X_N\}$ a működésképtelen állapotok csoportja.

A továbbiakban ugyanazt a vektor és mátrix párticionálást alkalmazzuk, mint az 4.2. pontban tettük, az ott tárgyalt erdmények segítségével határozzuk meg a megbízhatósági paramétereket.

5.1 A készenléti tényező

A készenléti tényező a következőképpen értelmezhető:

$$K = \lim_{t \to \infty} P[z(t) \in R] = \lim_{t \to \infty} \sum_{j=1}^{k} P[z(t) = X_j] = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j \,. \quad (5.1)$$

Ennek alapján a készenléti tényező meghatározásához meg kell oldani a folyamathoz tartozó beágyazott Markov-láncra a

$$\Pi = \Pi P \quad (5.2)$$

egyenletet [1], ós abból kell meghatározni a stacionárius intervallum átmeneti valószínűségeket az összefüggés alapján.

$$\psi = \frac{1}{\bar{\tau}} \Pi M \quad (5.3)$$

5.2 Az első meghibásodás várható ideje, MTFF

MTFF-nek nevezzük a meghibásodás bekövetkezésének várható idejét, feltéve, hogy a t=0-ban a rendszer a tökéletes állapotban volt. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy az X_1 állapot jelöli a rendszer tökéletes állapotát. Ekkor a $\psi_R(0)$ k hosszúságú kezdeti eloszlás vektor feltételezésével az (4. 10) kifejezós felhasználásával

$$MTFF = \{1\,0 \ldots 0\}\, \bar{N}_{RR}\, I_k \,, \quad (5.4)$$

ahol $\bar{N}_{RR}$ az R állapotcsoportra vonatkozó várható átlépési idők mátrixa; mérete kxk.

5.3 A következő meghibásodás várható ideje, MTTF

MTTF-nek nevezzük a meghibásodás bekövetkezésének várható idejét, feltéve, hogy a t=0-ban a rendszer egy jó állapotban volt. Itt azt tételezzük fel csupán, hogy a rendszer 1 valószínűséggel működőképes állapotban volt.

A kezdeti eloszlás akkor

$$\psi_R(0) = \frac{\psi_R}{\psi_R I_k}$$

ós így

$$MTTF = \frac{\psi_R}{\psi_R l_k} \bar{N}_{RR} l_k \qquad (5.5)$$

5.4 *Várható működési idő, MUT*

MUT a következő meghibásodás várható ideje, feltéve, hogy a t=0-ban fejeződött be a javítás. A mostani helyzet kissé eltér az eddigiektől, hiszen az (4.10) összefüggés felhasználásához meg kell határozni azt a stacionárius valószínűségi eloszlást, amely megadja azt, hogy az S állapotcsoportból való kilépést követően a folyamat milyen valószínűséggel lép be először valamelyik R állapotcsoportbeli állapotba.

Jelölje $f_{ij}(t)$ annak valószínűségét, hogy az a folyamat, amely a t=0-ban lépett be az $i \in S$ állapotba, a t időpillanatban lép ki először az S állapotcsoportból és egy $j \in R$ állapotba lép be. Ezt az eseményt úgy lehet elképzelni, hogy a folyamat τ idő alatt bizonyos számú lépésben átkerül egy $k \in S$ állapotba, ós azt követően $t-\tau$ idő alatt egy lépésben átlép a $j \in R$ állapotba. Mindezt kifejezésbe foglalva

$$f_{ij}(t) = \int_0^\infty \sum_{r=k+1}^{N} \varphi_{ir}(\tau)\, p_{rj}\, h_{rj}(t-\tau)\, d\tau \qquad (5.6)$$

$$j=1,2,\ldots,k, \quad i=k+1,\ldots,N, \quad t \geq 0$$

Használjuk most is a megoldásra a már bevált transzformációs módszert, ós képezzük a (5.6) összefügés Laplace alakját

$$f^*_{ij}(s) = \sum_{r=k+1}^{N} \varphi^*_{ir}(s)\, p_{rj}\, h^*_{rj}(s) \qquad (5.7)$$

Ezt mátrix alakban felírva

$$F^*_{SR}(s) = \Phi^*_{SS}(s)\, (P_{SR} \circ H^*_{SR}(s)) \qquad (5.8)$$

A Laplace-transzformáció határórtéktótelének segítsógóvel

$$F_{SR} = \lim_{s \to 0} s F^*_{SR}(s) = \lim_{s \to 0} s \Phi^*_{SS}(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} (P_{SR} \circ H^*_{SR}(s)). \qquad (5.9)$$

Figyelembe véve azt, hogy

$$\lim_{s \to 0} s \Phi^*_{SS}(s) = \Phi_{SS} \quad \text{ós} \quad H^*_{SR}(0) = U_{SR},$$

azt kapjuk, hogy

$$F_{SR} = \Phi_{SS} \cdot P_{SR} \qquad (5.10)$$

Ha feltesszük, hogy a folyamat a t=0-ban 1 valószínűséggel tartózkodott valamelyik $i \in S$ állapotban, akkor a feltételnélküli f_R valószínűségi sorvektor

$$f_R = \frac{\psi_S}{\psi_S l_{N-k}} \Phi_{SS} \cdot P_{SR} = \psi_S \cdot P_{SR} \qquad (5.11)$$

ahol $\psi_S = (\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_N\}$. A kapott eredmény egyszerűen abból adódik, hogy a stacioner intervallum átmeneti valószínűségek, mint tudjuk, függetlenek a kezdeti valószínűségeloszlástól.

Mivel mi az S állapotcsoportból történő kilépést követő eloszlásra vagyunk kíváncsiak, így azt a megfelelő normalizálással kapjuk meg, azaz

$$\psi_R(0) = \frac{f_R}{f_R l_k} = \frac{\psi_S P_{SR}}{\psi_S P_{SR} l_k} \qquad (5.12)$$

A (4.10) kifejezésbe behelyettesítve

$$MUT = \frac{\psi_S P_{SR}}{\psi_S P_{SR} l_k} \bar{N}_{RR} l_k \qquad (5.13)$$

5.5 *Várható kiesési idő, MDT*

MDT a javítás elvégzésének várható idejét adja, feltóve, hogy a t=0-ban következett be a meghibásodás. Világosan látszik, hogy most is ugyanazzal a problémával állunk szemben, mint az előző részben, felcserélve R ós S állapotcsoportnak a szerepót.

Az előző pont analógiájára

$$\psi_S(0) = \frac{f_S}{f_S l_{N-k}} = \frac{\psi_R P_{RS}}{\psi_R P_{RS} l_{N-k}} \qquad (5.14)$$

ós így

$$MDT = \frac{\psi_R P_{RS}}{\psi_R P_{RS} l_{N-k}} \bar{N}_{SS} l_{N-K} \qquad (5.15)$$

5.6 *Várható ciklus idő, MCT*

Az MTC két egymást követő meghibásodás közötti átlagos idő a meghibásodási és a javítási időket beleértve. Az MCT-t nem kell külön levezetni, mivel ez a definícióból egyszerűen a következő módon megadható:

$$MCT = MUT + MDT \qquad (5.16)$$

A fenti várható ciklusidő ismeretével meg tudjuk határozni a készenléti tényezőt a következőképpen is:

$$K = \frac{MUT}{MCT} = \frac{MUT}{MUT + MDT} \qquad (5.17)$$

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A cikk kidolgozása során Dr. Jereb László a műszaki tudományok kandidátusa témavezetőm és Telek Miklós villamosmérnök kollégám sokat tettek az eredmények ellenőrzésével és hasznos észrevételeikkel. Az értékes segítségért a szerző ezúton is mond köszönetet.

FÜGGELÉK KONGRUENS MÁTRIXSZORZÁS

A tanulmány során szükségessé vált az ún. kongruens (megegyező) mátrixszorzás (angolul: Congrugent matrix multiplication) bevezetése. Legyen A és B két azonos méretű mátrix. Az A és B mátrix C kongruens szorzatának a mérete ugyanakkora, és az elemei a következő módon megkaphatók:

$$c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij} \qquad \forall\, i \text{ és } j\text{-re} \qquad \text{(F.1)}$$

Így a kongruens mátrixszorzás az azonos helyen lévő elemek szorzatából adódik. A kongruens szorzás műveletét kis négyzet alakú "doboz" $\square$ operátorral jelöljük, és így az (F. 1) kifejezés mátrix formában is felírható:

$$C = A \square B$$

A kongruens mátrixszorzás nem csak egyszerű mátrix szorzásra alkalmazható, hanem mátrixok formálására és csonkítására is. Így például, ha $I = \{\delta_{ij}\}$ jelöli az egységmátrixot, és $U = \{u_{ij} = 1\}$ a csupa 1 elemű mátrixot, akkor az $(A \square I)$ mátrix az A mátrix főátlóját tartalmazó diagonál mátrix, és $(A \square (U - I))$ viszont megegyezik az A mátrix-szal, nulla főátlóbeli elemekkel.

Könnyen mutatható, hogy a kongruens mátrixszorzás rendelkezik több hasznos algebrai tulajdonsággal.

Például legyen A, B és C azonos méretű mátrix, az (F. 1) kifejezés segítségével bebizonyítható, hogy a kongrugens mátrixszorzás:

Kommutatív	$A \square B = B \square A$	(F.3)
Asszociatív	$(A \square B) \square C = A \square (B \square C)$	(F.4)
Disztributív	$A \square (B + C) = (A \square B) + (A \square C)$	(F.5)

Továbbá definiálhatjuk az A mátrix kongruens inverzmátrixát A^{-1} úgy, hogy

$$A \square A^{-1} = A^{-1} \square A = U \qquad \text{(F.6)}$$

így $A^{-1} = \{a^{*}_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}\}$.

IRODALOM

[1] HOWARD, R.A.: Dynamic Probabilistic Systems. Volume I.: Markov Models. Volume II.: Semimarkov and Decision Processes. John Wiley & Sons, INC. New York, 1971.

[2] ROSS, S. M.: Applied Probability Models with Optimatization Applications. Holden-day, San Francisco, 1970.

[3] ROSS, S. M.: Introduction to Probability Models. Academic Press N. Y.-London, 1972.

[4] KLEINROCK, L.: Queueing Systems. Vol I: Theory John Wiley & Sons, New York, 1975.

[5] BUZACOTT, J. A.: Markov Approach to Finding Failure Times of Repairable Systems. IEEE. Trans. on Reliability, Vol. R-19 Nov. 1970. pp. 152-156.

[6] TAKÁCS, L.: Introduction to the Theory of Queues. New York, Oxford University Press, 1962.

[7] TOMKÓ, J.: Renewal Method in the Theory of Semi-Markov Processes on Arbitrary Spaces. Prob. Theory and Math. stat. VNU Science Press, 1986.

[8] FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.I., John Wiley & Sons, N.Y. 1057.

[9] FELLER, W.: On Semi-Markov Processes. Proc. Natoinal Academy of Science, 51, (1964) pp. 653-659.

[10] JEREB, L.: Számítási módszerek bonyolult rendszerek megbízhatóságának neghatározására. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1985.

[11] BEGAIN, K.: Bonyolult rendszerek megbízhatósági vizsgálata. Diplomaterv, BME-HEI. 1986.

[12] TELEK, M.: Bonyolult rendszerek megbízhatósága. Diplomaterv, BME-HEI, 1987.