

Iterációs eljárások konvergenciájának javítása síkban periódikus foltszerű felületek szórási paramétereinek számításánál

PETRE PÉTER
BME Mikrohullámú Híradástechnikai Tanszék

DR. ZOMBORY LÁSZLÓ
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a cikkben síkban periódikus, foltszerű felületek analízisére használható konjugált gradiens-gyors Fourier-transzformációs, CGM—FFT-módszer konvergenciájának javítására két módszert mutatunk be, melyeket több szempont alapján összehasonlítottunk egymással.

A fizikai modell ismertetése után a felületen indukált áramra egy operátoregyenletet írunk fel, melyet először a hagyományos CGM—FFT-módszer segítségével oldunk meg. Itt külön foglalkozunk a norma és a belső szorzat definíciójával. Ezután részletesen ismertetjük a prekondicionálás elvét, majd bevezetünk egy új eljárást, a bikonjugált gradiens-gyors—Fourier-transzformációs, BiCGM—FFT-módszert, melyről kimutatjuk, hogy erre a feladatra alkalmazva sokkal kedvezőbb konvergencia tulajdonságokat mutat, mint a hagyományos CGM.

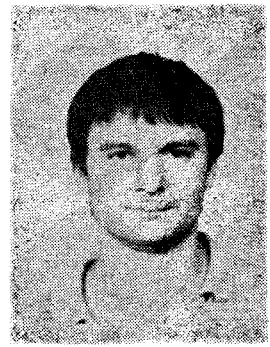
A cikk végén, szabályos geometriájú fémháló analízise kapcsán összehasonlítjuk a CGM—FFT-, a prekondicionált CGM—FFT- és a BiCGM—FFT-módszerekkel kapott eredmények pontosságát, konvergenciasebességét és futási idő szempontjából.

1. Bevezetés

Síkban periódikus foltszerű felületek analízisére a szakirodalomban többféle módszer terjedt el, melyek közül némelyek csak speciális elrendezésre, vagy csak bizonyos megszorításokkal alkalmazhatók.

Néhány eljárás a teljesség igénye nélkül: az indukált áram rezonáns módusa szerinti sorfejtésen alapuló eljárás [1], alacsony frekvenciás közelítésből adódó zárt alakú közelítő megoldások [2, 3], melyek még viszonylag sok megszorítást tartalmaznak a konkrét feladatra vonatkozóan. Általánosabban használható a spektrál tartományú analízis („Spectral Domain Analysis”), amit rendszerint a momentum módszerrel (MM) ötvöznek [6—10]s melynek hátránya többek között a viszonylag sok ismeretlen, mely nagy tárcapacitás igényt jelenthet és a MM konvergenciájának bizonytalansága [11].

E hátrányok leküzdésére az utóbbi időben nagy erőfeszítéseket tettek, melyek eredményeként megszülettek az iterációs eljárásokon alapuló módszerek [11, 16]. Ezek közül is kiemelkedik a már említett konjugált gradiens-gyors—Fourier-transzformációs (CGM—FFT) módszer [12—16] és a spektráliterációs közelítés („Spectral Iteration Techniques”, SIT) [4, 5], melyek már általánosab-



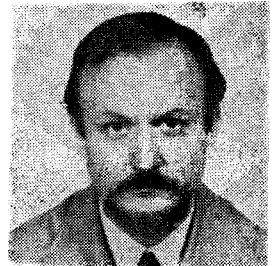
PETRE PÉTER

1985-ben végzett a Budapesti Műszaki Egyetem villamosmérnöki Karán. Először tudományos segédmunkatársként, majd 1986-tól tanársegédként dolgozik a BME Mikrohullámú Híradástechnika Tanszékén.

DR. ZOMBORY LÁSZLÓ

a BME Elméleti Villamosságtan Tanszékének docense, a Villamosmérnöki Kar dékánya 1965-ben végzett a BME Villamosmérnöki Kar híradástechnika szakán. 1969-ben Sub auspiciis kiténtetéssel doktorált. 1974-ben védte meg kandidátusi értekezését. Hosszabb ideig dolgozott a SZUTA A. F. Ioffe Műszaki Fizikai Intézetében, a Polytechnic Institute of New York-ban és a Stanford University-n. A HTE BME Villamoskari Csoportjának tükára, az URSI Magyar Nemzeti Bizottságának tükára.

Részt vesz az „Antennák és Hullámterjedés”, valamint a számítástechnikai alapot tárgyak oktatásában. Kutatási területe: térelmélet numerikus módszerei — véges elem módszer, momentum módszer, iterációs eljárások — melyek kapcsán már több publikációja jelent meg idehaza és külföldön egyaránt.



Fő kutatási területei: terék hálózati modelljei, félvezető eszközök technológiájának és működésének térelméleti modellezése. Egy szakkönyv, számos szakkikk és konferenciaelbeszélő szerzője, ill. társszerzője.

használhatók ilyen jellegű feladatok megoldására. A SIT hátránya a CGM-el szemben, hogy bár gyorsabb konvergenciát ad, maga a konvergencia ténye nem biztosított [11].

A CGM—FFT módszer hátránya csak a kis kapacitású számítógépeken ütközik ki, ami a néha elfogadhatatlanul lassú konvergenciasebességben nyilvánul meg.

E problémák áthidalására két különböző eljárást mutatunk be. Az első a prekondicionálás [17], mely nem csak mátrix-, hanem operátoregyenletekre is általánosabban használható, a másik pedig egy új módszer, a bikonjugált gradiens-gyors—Fourier-transzformációs (BiCGM—FFT) módszer [18, 22], melyet erre a feladatra (legalábbis a szerzők ismeretei alapján) eddig még nem alkalmaztak.

A dolgozatban a fent említett két eljárással és a hagyományos CGM-rel kapott eredményeket, egy szabályos geometriájú fémháló analízise kapcsán

Beérkezett: 1988. IV. 19. (H)

részletesen összehasonlítjuk egymással pontosság, konvergenciasebesség és kis kapacitású számítógépekre való alkalmazhatóság szerint.

2. A feladat megfogalmazása

A továbbiakban, ahogy azt már a bevezetőben is említettük, szabadon álló, vékony, periódikusan elhelyezkedő, veszteséges foltokat tartalmazó felületet fogunk vizsgálni.

Induljunk ki az 1. ábrán látható fizikai modellből.

A réteg vastagsága legyen h , ami közel zérus ($h \approx 0$). A periódikus felület a $z=0$ síkban helyezkedik el. A felületet az 1. ábrának megfelelően cellákra osztjuk fel. A felület veszteségét az R_{\square} négyzetes ellenállással definiáljuk. Mivel ez már csak a réteg vastagságának és vezetőképességének a szorzatát tartalmazza, ezért lehetőségünk van

az előírt R_{\square} felületi négyzetes ellenállást tetszőleges $h \approx 0$ vastagsággal realizálni.

A periódikus felületet mindig síkhullámmal gerjesztjük (2. ábra). Merőleges (TE-módusú) polarizáció esetén az \mathbf{E}^i , gerjesztő elektromos térerő, párhuzamos az $x-y$ síkkal, így az x és y komponense a következő lesz

$$E_x^i = E_0 \sin(-\Phi); \quad E_y^i = E_0 \cos\Phi \quad (1)$$

és ennek megfelelően

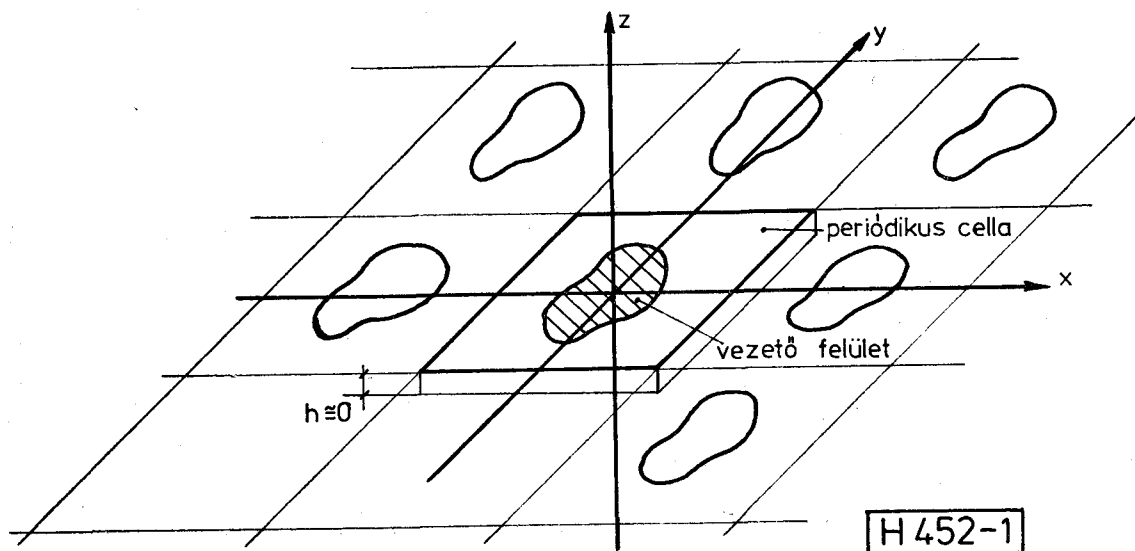
$$H_x^i = \frac{E_0}{\eta} \cos\Phi \cos\Theta; \quad H_y^i = -\frac{E_0}{\eta} \sin\Phi \cos\Theta \quad (2)$$

ahol

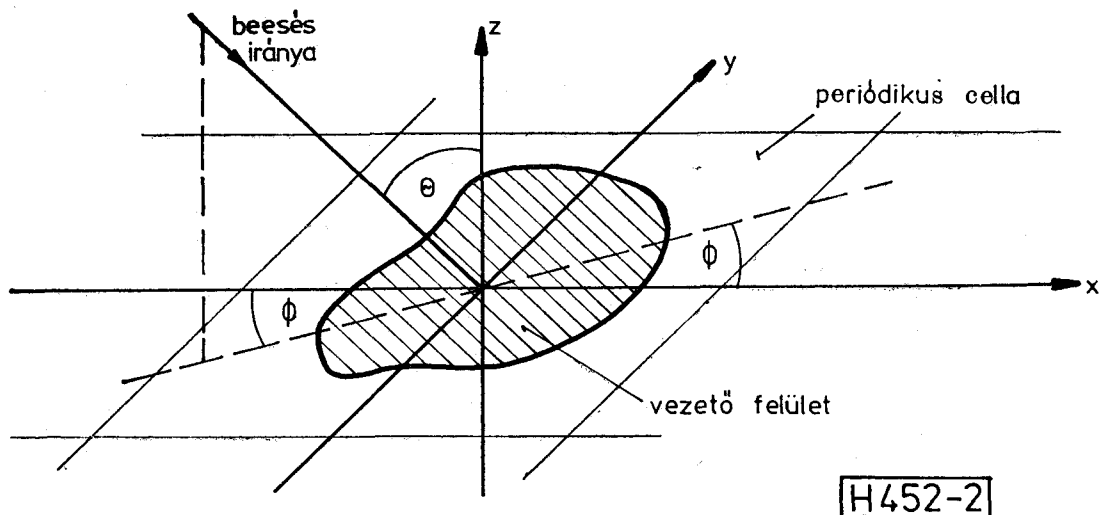
\mathbf{H}^i – a gerjesztő mágneses térvektor,

$\eta = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ a szabad tér hullámimpedanciája,

E_0 – a gerjesztő elektromos térerősség amplitúdója.



1. ábra. Periódikus felület fizikai modellje



2. ábra. A beeső síkhullám értelmezése TE és TM módusú polarizációnál

Párhuzamos (TM-módusú) polarizációnál a H^i lesz párhuzamos az $x-y$ síkkal, azaz

$$E_x^i = E_0 \cos \Theta \cos \Phi; \quad E_y^i = E_0 \cos \Theta \sin \Phi \quad (3)$$

$$H_x^i = \frac{E_0}{\eta} \cos \Phi; \quad H_y^i = \frac{E_0}{\eta} \sin(-\Phi) \quad (4)$$

Itt kell megjegyeznünk, hogy az általános szórási paraméterek bevezetésével az 1. ábrán látható periódikus felületekből álló olyan összetettebb rendszerek is analizálhatók, ahol az egyes periódikus rétegeket veszteséges dielektrikumok választják el egymástól [12].

Másik megjegyzésünk, hogy ezzel a fizikai modellel az „ekvivalens sugár elvét” felhasználva nemcsak sík elrendezés analizálható, hanem vékony, veszteséges hengeres vezetőkből álló rendszerek is (diplosor, rács stb. . .) [13].

A felületen indukált áramra vonatkozó operátor-egyenlet felírásához tekintsük a 3. ábrán látható matematikai modellt.

A periódikus felület a $z=0$ síkban helyezkedik el és mind az x , mind az y irányban végtelen kiterjedésű. A réteg vastagsága zérus (ellentétben a fizikai modellel), négyzetes ellenállása pedig R_{\square} (x, y). A periódikus cellák egymáshoz képesti helyzetét az a, b és Ω értékek egyértelműen meghatározzák. A felületet a 2. ábrának megfelelő síkhullámmal gerjesztjük.

Kihhasználva a felület periódikus voltát, a szórt tér a teljes tartományban ($z > 0$ és $z < 0$) felírható a Floquet-módusoknak megfelelő kettős sorral [5]:

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \times \begin{bmatrix} \tilde{E}_{x,m,n}^{s+} \\ \tilde{E}_{y,m,n}^{s+} \end{bmatrix} e^{j[\alpha_{m,n}x + \beta_{m,n}\nu]} e^{-\gamma_{m,n}z} \quad (5)$$

ha $z > 0$

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \times \begin{bmatrix} \tilde{E}_{x,m,n}^{s-} \\ \tilde{E}_{y,m,n}^{s-} \end{bmatrix} e^{j[\alpha_{m,n}x + \beta_{m,n}\nu]} e^{\gamma_{m,n}z} \quad (6)$$

ha $z < 0$

ahol E_x^s, E_y^s a szórt tér x és y irányú komponense, $E_{x,m,n}^{s+}, E_{y,m,n}^{s+}$ a szórt tér (m, n) módusának komplex amplitúdója a $z \geq 0$ tartományban az, $E_{x,m,n}^{s-}, E_{y,m,n}^{s-}$ a szórt tér (m, n) módusának komplex amplitúdója a $z < 0$ tartományban,

$$\alpha_{m,n} = \frac{2\pi m}{a} - k_0 \sin \Theta \cos \Phi \quad (7)$$

$$\beta_{m,n} = \frac{2\pi n}{b \cdot \sin \Omega} - \frac{2\pi m}{a} \cot \Omega - k_0 \sin \Theta \sin \Phi$$

ahol $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ a szabadtéri terjedési tényező, és

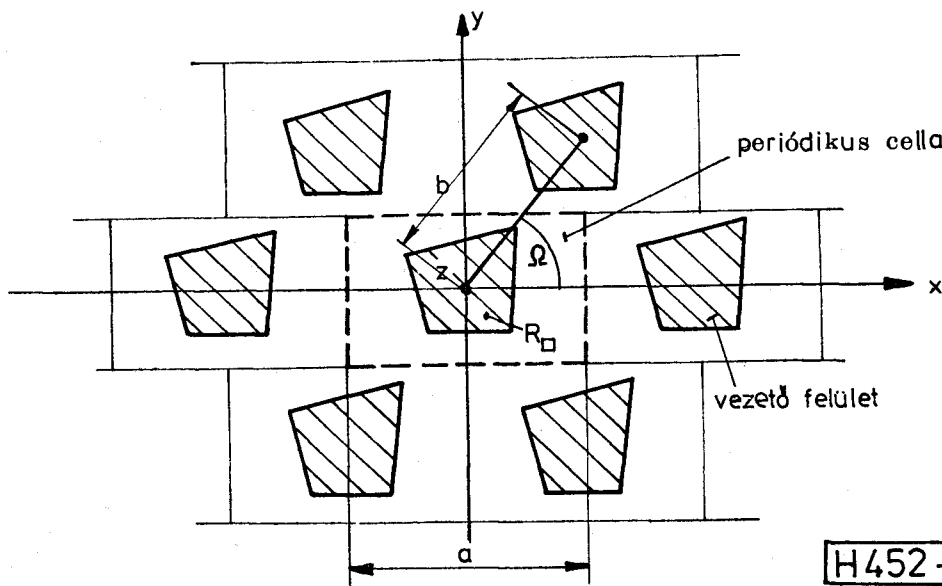
$$\gamma_{m,n} = \begin{cases} -j[k_0^2 - (\alpha_{m,n}^2 + \beta_{m,n}^2)]^{1/2} & \text{ha } k_0^2 > \alpha_{m,n}^2 + \beta_{m,n}^2 & (8.a) \\ -[(\alpha_{m,n}^2 + \beta_{m,n}^2) - k_0^2]^{1/2} & \text{ha } k_0^2 < (\alpha_{m,n}^2 + \beta_{m,n}^2) & (8.b) \end{cases}$$

az (m, n) módusnak megfelelő terjedési tényező, melymind a terjedő (8a), mind a csillapodó módusokat (8b) magában foglalja. A távotér kialakításában természetesen csak a terjedő módusok játszanak szerepet.

Az E^i teljes tér $a - \infty < z < \infty$ tartományban alábbi:

$$E^i = E^i + E^s \quad (9)$$

A teljes tér z komponense az (5, 6) egyenletekből határozható meg a $\text{div} E^i = 0$ figyelembevételével



3. ábra. Szabadon álló, periódikusan elhelyezkedő foltokat tartalmazó felület matematikai modellje

Érvényesítve a $z=0$ síkban a határfeltételt, a szórt tér spektrális komponenseire a következő összefüggés adódik:

$$\tilde{E}_{x,m,n}^{s+} = \tilde{E}_{x,m,n}^{s-}; \quad \tilde{E}_{y,m,n}^{s+} = \tilde{E}_{y,m,n}^{s-} \quad (10)$$

A Maxwell egyenletekből kiindulva, és bevezetve az \mathbf{A} mágneses vektorpotenciált, a szórt tér a következőképpen fejezhető ki a \mathbf{J} indukált áram segítségével

$$\mathbf{E}^s = \frac{1}{j\omega s_0} [\text{grad div } \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A}] \quad (11)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \mathbf{J} * G \quad (12)$$

Itt a „*” a konvulúciót jelenti és $G = G(\mathbf{r})$ a szabadtéri Green-függvény

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \quad (13)$$

A $z=0$ síkban érvényesítve a vezető felületekre vonatkozó peremfeltételt, miszerint

$$\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s = R_{\square} \mathbf{J} \text{ a vezető felületeken} \quad (14)$$

valamint figyelembe véve az (5, 6) egyenletekkel meghatározott diszkrét spektrumot és a (11)–(13) egyenletek Fourier-transzformált párjaikat, az indukált áram \mathbf{J} Fourier-transzformáltjára a következő operátoregyenletet kapjuk:

$$f_c \left\{ \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta} \tilde{G}(\alpha_m, n, \beta_m, n) \tilde{\mathbf{J}}(\alpha_m, n, \beta_m, n) \cdot e^{j[\alpha_m, n x + \beta_m, n y]} - R_{\square} \mathbf{J} \right\} = -f_c \mathbf{E}^i \quad (15)$$

ahol \tilde{G} a spektrális Green-mátrix,

$$\tilde{G}(\alpha, \beta) = \frac{-j}{2(k_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} k_0^2 - \alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & k_0^2 - \beta^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

és f_c olyan korlátozó függvény, amelynek értéke a vezető felületeken egységnyi, míg máshol zérus.

Az τ -diszkrét Fourier-transzformáció és τ^{-1} inverz diszkrét Fourier-transzformáció jelöléseket bevezetve a (16) egyenlet leírható az alábbi tömör alakban

$$f_c \left\{ \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \tau^{-1} [\tilde{G} \tau(f_c \mathbf{J})] - R_{\square} \mathbf{J} \right\} = -f_c \mathbf{E}^i \quad (17)$$

A (17) egyenlet tehát az indukált áramra vonatkozó operátoregyenlet, amit a következő alfejezetben meg fogunk oldani.

3. Az operátoregyenlet megoldása CGM—FFT módszer segítségével

Ebben az alfejezetben a (17) operátoregyenletet oldjuk meg a konjugált gradiens — gyors Fourier-transzformációs (CGM—FFT)—módszer segítségével. Ez eltérően a hagyományos mátrix módszerektől iterációs eljárás, melynek előnyeit az alábbiakban foglalhatjuk össze [11, 15, 18]:

Ha a feladathoz tartozó ismeretlenek száma N , akkor a CGM—FFT-módszer csak $5N$ számú

változót kezel, ellentétben a mátrix módszerekkel, melyek N^2 számú ismeretlen értékkel számolnak.

A CGM—FFT-módszer mindig a helyes eredményhez konvergál, eltérően a SIT, és az MM-eljárásoktól.

A megoldás hibáját, amit többféleképpen is lehet definiálni, minden iteráció után meg tudjuk adni. Ez a hiba CGM—FFT-módszernél monoton csökken.

Revezetve az L -operátor és Y -gerjesztés jelöléseket a (17) operátoregyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$L(\mathbf{J}) = \mathbf{Y} \quad (18)$$

ahol

$$\mathbf{Y} = -f_c \mathbf{E}^i \quad (19.a)$$

$$L(\mathbf{J}) = f_c \left\{ \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \tau^{-1} [\tilde{G} \tau(f_c \mathbf{J})] - R_{\square} \mathbf{J} \right\} \quad (19.b)$$

Mint azt már korábban említettük a CGM-nek több változata is ismert, attól függően, hogy a hibafüggvényt hogy definiáltuk [11]. Munkánk során több CGM algoritmust is kipróbáltunk és kedvezőbb konvergencia takajdonságai miatt az alábbi változat mellett döntöttünk:

A minimalizálandó függvény

$$F(\mathbf{J}_i) = \|L(\mathbf{J}_i) - \mathbf{Y}\|^2 \quad (20)$$

ahol $\|\dots\|$ a normát jelöli. A CGM algoritmus ezek után a következő lesz:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Y} - L(\mathbf{J}_1) \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_1 = L^*(\mathbf{R}_1) \quad (22)$$

és $i = 1, 2, \dots$ esetén legyen

$$a_i = \frac{\|L^*(\mathbf{R}_i)\|^2}{\|L(\mathbf{P}_i)\|^2} \quad (23)$$

$$\mathbf{J}_{i+1} = \mathbf{J}_i + a_i \mathbf{P}_i \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i - a_i L(\mathbf{P}_i) \quad (25)$$

$$b_i = \frac{\|L^*(\mathbf{R}_{i+1})\|^2}{\|L^*(\mathbf{R}_i)\|^2} \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_{i+1} = L^*(\mathbf{R}_{i+1}) + b_i \mathbf{P}_i \quad (27)$$

ahol $\mathbf{R}_i, \mathbf{P}_i$ vektorok, a_i, b_i skalárok és L^* az L operátor adjungált operátora, mely definíció-szerűen

$$\langle L(\mathbf{l}), \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{l}, L^*(\mathbf{g}) \rangle \quad (28)$$

ahol \mathbf{l} és \mathbf{g} vektor értékű függvények és „ $\langle \rangle$ ” a belső szorzat.

A belső szorzat definíciója

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{g}} d\Omega \quad (29)$$

ahol a felülvonás a komplex konjugálást jelenti, Ω pedig az L operátor értelmezési tartománya.

A (29) definícióval összhangban a már korábban használt normát az alábbi egyenlet határozza meg:

$$\|\mathbf{l}\|^2 = \langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{l} \bar{\mathbf{l}} d\Omega = \int_{\Omega} |\mathbf{l}|^2 d\Omega \quad (30)$$

A (19b) és (28) egyenletek egybevetéséből az L operátor adjungáltjára az alábbi adódik

$$L^*(\mathbf{J}) = f_0 \left\{ \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \tau^{-1} [\tilde{\mathbf{G}} \tau(f_0 \mathbf{J})] - R_{\square} \mathbf{J} \right\} \quad (31)$$

A (21)–(27) egyenletekkel definiált algoritmust addig kell ismételni, amíg az $\|\mathbf{R}_i\|/\|\mathbf{Y}\| = \varepsilon$, valamilyen előírt értéknél kisebb nem lesz. Ezt a határt most $\varepsilon = 0,01$ -ben állapítottuk meg.

Az FFT alkalmazása esetünkben azt jelenti, hogy a (19b) és (31) egyenletekkel megadott operátorokban az τ és τ^{-1} transzformációkat ezzel a gyors algoritmussal valósítjuk meg.

A munkának ebben a fázisában különböző méretű és geometriájú elrendezésekre több futtatást végeztünk. A tapasztalatokat úgy foglalhatnánk össze, hogy a módszer konvergenciasebbsége nagyon értékes a hullámhosszban kifejezett méretekre és a geometriára. Ennek oka elsősorban az L operátor rossz kondicionáltsága [17], melynek javítására a következő alfejezetben bemutatunk két eljárást.

4. A konvergenciasebbség növelésének lehetőségei

Ebben az alfejezetben két módszert mutatunk be rosszul kondicionált operátoregyenletek megoldására.

a) Prekondicionálás

A prekondicionálás elve a mátrixelméletből ismert [17, 19] és operátorokra is alkalmazható. Tekintsük a következő

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (32)$$

lineáris egyenletrendszer.

Az \mathbf{M} mátrix kondíciószámát az alábbi

$$k(\mathbf{M}) = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} \quad (33)$$

egyenlet definiálja, ahol σ_{\max} és σ_{\min} az \mathbf{M} mátrix legnagyobb, illetve legkisebb sajátértéke. A cél olyan \mathbf{P} és \mathbf{Q} mátrixok keresése, melynek a segítségével az eredeti (32) egyenlet úgy transzformálható, hogy

$$\mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{b} \quad (34)$$

ahol

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} \quad (35)$$

és a $\mathbf{P}^* \mathbf{M} \mathbf{Q}$ mátrix kondíciószáma kisebb mint az eredeti \mathbf{M} mátrixé.

Ezet az elvet szem előtt tarva vizsgáljuk meg a (19b) egyenlettel definiált L operátort. Az operátor sajátértékeit a $\tilde{\mathbf{G}}$ spektrális Green-mátrix sajátértékei határozzák meg [17]. Nagy $(\alpha^2 + \beta^2)$ értékek nél az egyik sajátérték a végtelenhez, a másik a zérushoz tart. Célunk a (17) operátoregyenlet átirása olyan formába, hogy a spektrális Green-mátrix transzformáltja szerepeljen benne, melynek kondíciószáma kisebb, mint az eredeti mátrixé.

Itt jegyezzük meg, hogy a prekondicionálást kizárólag $R_{\square} = 0$ esetre alkalmazzuk, ugyanis ha $R_{\square} \neq 0$, akkor az L operátor kondicionáltsága sokkal jobb, mint veszteségmentes esetben, és itt nincs szükség prekondicionálásra.

A (17) operátoregyenletet a [17] közleményben leírtaknak megfelelően átírhatjuk az alábbi prekondicionált formába

$$(f_c - f_f) \left\{ \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \tau^{-1} [(\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{E})(\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{E})^{-1} \tau(\mathbf{K})] \right\} + \mathbf{K} = -2f_c \mathbf{E}^t \quad (36)$$

ahol most már a transzformált ismeretlen a \mathbf{K} , melyre igaz, hogy

$$\mathbf{J} = \tau^{-1} [(\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{E})^{-1} \tau(\mathbf{K})] \quad (37)$$

Itt az \mathbf{E} egy 2×2 -es egységmátrix a „-1”-es index az inverz-mátrixra utal, f_f pedig az f_c komplementer függvénye, melynek az értéke a vezetől felületeken zérus, míg máshol egységnyi.

A (36) egyenletben szereplő $(\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{E})(\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{E})^{-1}$ transzformált mátrix sajátértékei $(e-1)/(e+1)$ módon transzformálódnak, ahol e az eredeti $\tilde{\mathbf{G}}$ mátrix sajátértéke.

\mathbf{E} módszer hatékonyságának bemutatására a [17] irodalom több összehasonlítást is végez, melyek eredményeként megállapítja, hogy a javulás az iterációk számának csökkenésében 1–3-szoros. Mint később látni fogjuk, saját tapasztalataink ezzel szemben csak nagyon kis mértékű javulást igazolnak, melynek oka elsősorban az lehet, hogy mi kizárólag merőleges beesést vizsgáltunk, ahol az operátor kondicionáltsága nem olyan kritikus

b) Rikonjugált gradiens módszer (RiCGM) [18]

\mathbf{E} módszert főleg rosszul kondicionált operátoregyenletek megoldására javasolják. Hátránya a hagyományos CGM-rel szemben, hogy $2N$ számú ismeretlennel többet kell tárolni, mint az eredeti változatban és hogy az egyes iterációknál kapott hiba nem monoton csökken. Ezen hátrányok ellenére a (17) operátoregyenlet megoldására mégis ezt a módszert javasoljuk, mert konvergencia tulajdonságai nagyságrendekkel jobbak, mint a CGM vagy a prekondicionált CGM tulajdonságai.

A BiCGM — eltérően a hagyományos CGM-től — minden egyes lépésben teljesítmény normát minimalizál. A minimalizálandó F függvény ennek megfelelően

$$F(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = 2 \cdot \text{Re} \langle L(\mathbf{I}), \mathbf{J} \rangle = \langle L(\mathbf{I}), \mathbf{J} \rangle + \overline{\langle L(\mathbf{I}), \mathbf{J} \rangle} \quad (3i)$$

ahol \mathbf{I} és \mathbf{J} vektor értékű függvények, „Re” pedig a valós részt jelenti.

A (18) operátoregyenletre vonatkozó általános BiCGM-t megvalósító algoritmus a következő:

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{0}; \mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_1 = \mathbf{Y}; \mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_1 = \bar{\mathbf{Y}} \quad (39)$$

és $i = 1, 2, \dots$ esetén legyen

$$a_i = \frac{\langle \mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_i \rangle}{\langle L(\mathbf{P}_i), \mathbf{W}_i \rangle} \quad (40)$$

$$\mathbf{J}_{i+1} = \mathbf{J}_i + a_i \mathbf{P}_i \quad (41)$$

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i - a_i L_i(\mathbf{P}_i) \quad (42)$$

$$Q_{i+1} = Q_i - \bar{a}_i L^*(W_i) \quad (43)$$

$$c_i = \frac{\langle R_{i+1}, Q_{i+1} \rangle}{\langle R_i, Q_i \rangle} \quad (44)$$

$$P_{i+1} = R_{i+1} + c_i P_i \quad (45)$$

$$W_{i+1} = Q_{i+1} + \bar{c}_i W_i \quad (46)$$

ahol most az a_i és c_i nem skalárok, hanem komplex mennyiségek.

Itt kell megjegyeznünk, hogy a (39)–(46) egyenletekkel definiált algoritmustetszőleges operátorra alkalmazható, eltérően a hagyományos CGM-től, mely csak Hermite típusú operátor esetén használható. A [18] publikáció közül egy másik algoritmust is, mely szimmetrikus operátorokra alkalmazható, és csak feleannyi számítási műveletet tartalmaz, mint ez az általánosabb eljárás. Ez nagy előnyt jelentene, de a szerző állításával ellentétben az a véleményünk, hogy a (19b.) egyenlettel definiált operátor nem szimmetrikus.

A következő alfejezetben röviden összefoglaljuk a számítások eredményeként kiadódó szórási paraméterek definícióit.

5. Szórási paraméterek

A továbbiakban szórási paramétereknek nevezzük a feszültségre, illetve a teljesítményre vonatkozó reflexiós és átviteli tényezőket, melyek egyértelműen jellemzik a 2. alfejezetben bevezetett fizikai modell szórási tulajdonságait. Külön foglalkozunk a domináns módusra [3, 12, 13] és külön a teljesítményre vonatkozó szórási paraméterek definícióival és kiszámításuk módozataival.

Ha a geometriai méretek olyanok, hogy csak a domináns módus terjed, vagyis $(m, n) = (0, 0)$ akkor a távotér kialakításában kizárólag az áram konsztans összetevője játszik szerepet. Ekkor nagy z/λ értékekre igaz, hogy

$$E^z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \tilde{G}(0, 0) \tilde{J}(0, 0) e^{\gamma_{0,0} z} \quad (47)$$

illetve

$$E^z = E^z + \frac{1}{j\omega s_0} \tilde{G}(0, 0) \tilde{J}(0, 0) e^{-\gamma_{0,0} z} \quad (48)$$

ahol $\gamma_{0,0} = k_0$ a (8) egyenletek megfelelően. Ezek után az x és y komponensekre vonatkozó feszültség reflexiós és átviteli tényezők a következők lesznek:

$$R_x = E_x^s / (E_x^{i2} + E_y^{i2})^{1/2} \quad (49)$$

$$R_y = E_y^s / (E_x^{i2} + E_y^{i2})^{1/2}$$

illetve

$$T_x = E_x^t / (E_x^{i2} + E_y^{i2})^{1/2} \quad (50)$$

$$T_y = E_y^t / (E_x^{i2} + E_y^{i2})^{1/2}$$

ahol a (49), a (47) egyenlettel definiált szórt térre, az (50) pedig a (48) egyenlettel megadott teljes térre vonatkoznak.

A teljesítményre vonatkozó szórási paraméterek pedig

$$|R|^2 = |R_x|^2 + |R_y|^2$$

$$|T|^2 = |T_x|^2 + |T_y|^2 \quad (51)$$

Megjegyezzük, hogy a (49), illetve (50) képletekkel megadott feszültségre vonatkozó szórási paraméterekből egyszerű koordináta-transzformációval megadhatók a névleges és keresztpolarizációra vonatkozó reflexiós, illetve átviteli tényezők [21].

Az előbbieknek megfelelően, ha csak a domináns módus terjed, akkor a szórt tér egyirányú, vagyis az iránydiagramnak nincsenek melléknyalábjai és igaz lesz a (0,0) módusra vonatkozó energiamegmaradás tétel, miszerint

$$P_d/P_i + |R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (52)$$

ahol P_d az anyagban disszipált, P_i pedig a gerjesztő tér teljesítménysűrűsége.

Ha nem csak a domináns módus terjed, akkor az összes teljesítményre vonatkozó szórási paraméterek a következőképpen írhatók fel:

$$|R|^2 = \frac{\operatorname{Re} \left\{ \int_{ec} (E^s \times \bar{H}^s) \hat{z} ds \right\}}{\operatorname{Re} \left\{ \int_{ec} (E^i \times \bar{H}^i) (-\hat{z}) ds \right\}} \quad (53)$$

ahol a H^s mágneses térerősséget a Maxwell egyenletekből határozhatjuk meg. Az integrál az egységnyi (periódikus) cellára vonatkozik. Az átviteli tényező a teljes térből határozható meg:

$$|T|^2 = \frac{\operatorname{Re} \left\{ \int_{ec} E^t \times \bar{H}^t (-\hat{z}) ds \right\}}{\operatorname{Re} \left\{ \int_{ec} (E^i \times \bar{H}^i) (-\hat{z}) ds \right\}} \quad (54)$$

A következő alfejezetben az egyes módszerek előnyeit és hátrányait egy gyakorlati példa kapcsán mutatjuk be.

6. Számítási eredmények

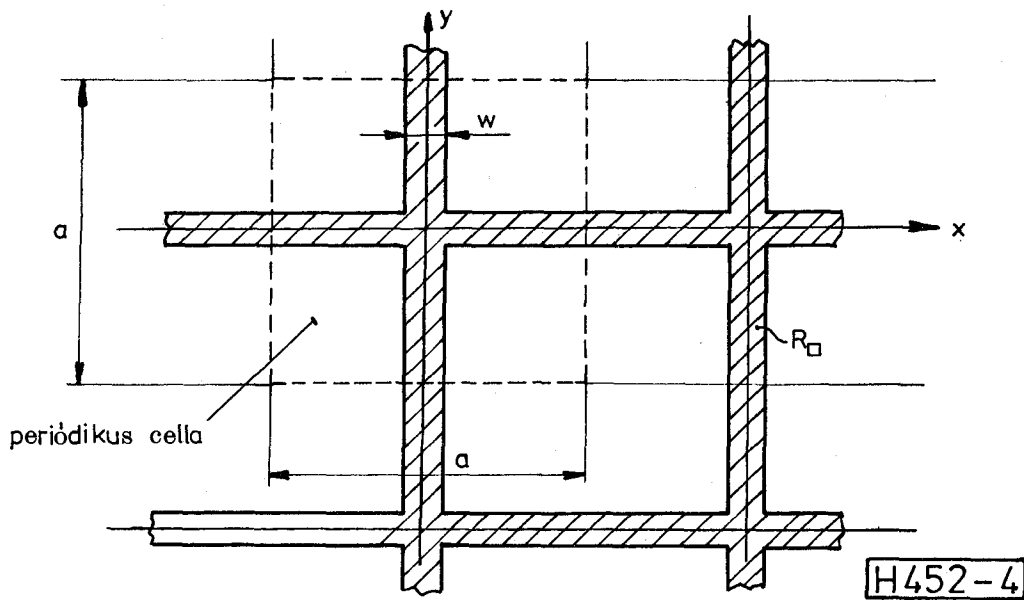
Ebben az alfejezetben egy szabályos geometriájú fémháló analízise kapcsán összehasonlítottuk a CGM—FFT, a prekondicionált CGM—FFT és a BiCGM—FFT módszerekkel kapott eredményeket pontosság és konvergenciasebesség szempontjai szerint. Ilyen elrendezés vizsgálatára a szakirodalomban már találunk példát [13, 20], s az általuk közölt számítási eredményeket referenciaként fogjuk használni.

Modellünk megfelel a 2. alfejezetben bevezetett fizikai modellnek, ahol a felület veszteségét az R_{\square} felületi négyzetes ellenállással írjuk elő. Számításaink eredményeként mindig a domináns módusra vonatkozó szórási paramétereket adjuk meg.

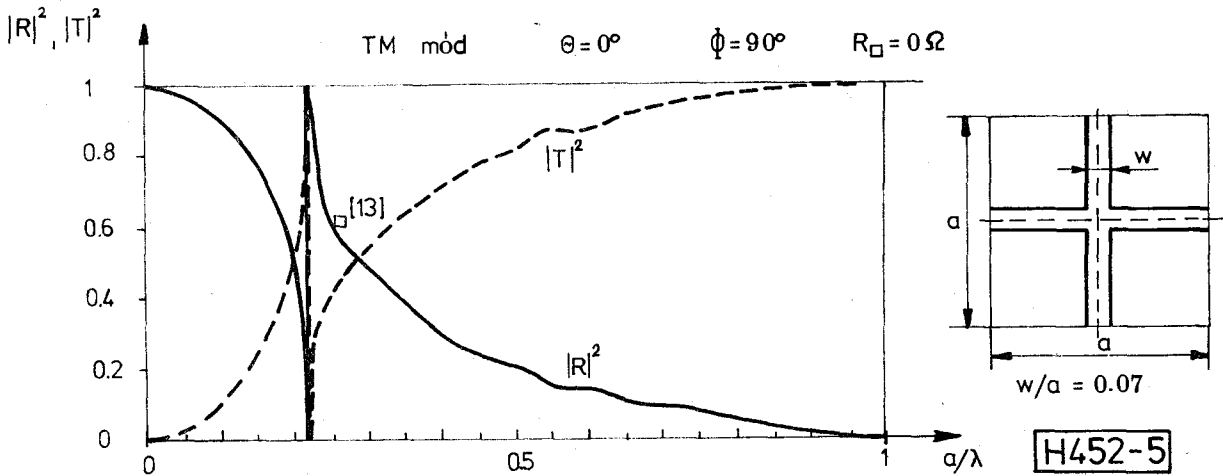
A végtelen kiterjedésű rácsszerkezet kinagyított periódikus cellája a 4. ábrán látható.

A négyzetes cella mérete a , a vezető felület szélessége W , melyre teljesül, hogy $W/a = 0,07$. A felület négyzetes ellenállása R_{\square} .

Az 5. ábrán megadtuk az előbbi geometriára vonatkozó teljesítmény reflexiós- és átviteli ténye-



4. ábra. Szabályos rácsgeometria



5. ábra. Teljesítményre vonatkozó szórásparaméterek a hullámhossz függvényében, $R_{\square} = 0$ ohm

zót a hullámhosszban kifejezett geometriai méretek függvényeként a $0 < a/\lambda < 1$ tartományra.

A diagram TM módosú merőleges beesésre vonatkozik, ahol $R_{\square} = 0$ ohm.

Az ábrán jól látszik az $a/\lambda \approx 0,22$ -nél lévő rezonancia, ahol $|R|^2$ nagyon gyorsan változik a frekvencia függvényében. Az ábrán feltüntettük a [13] közleményből származó számítási eredményt is.

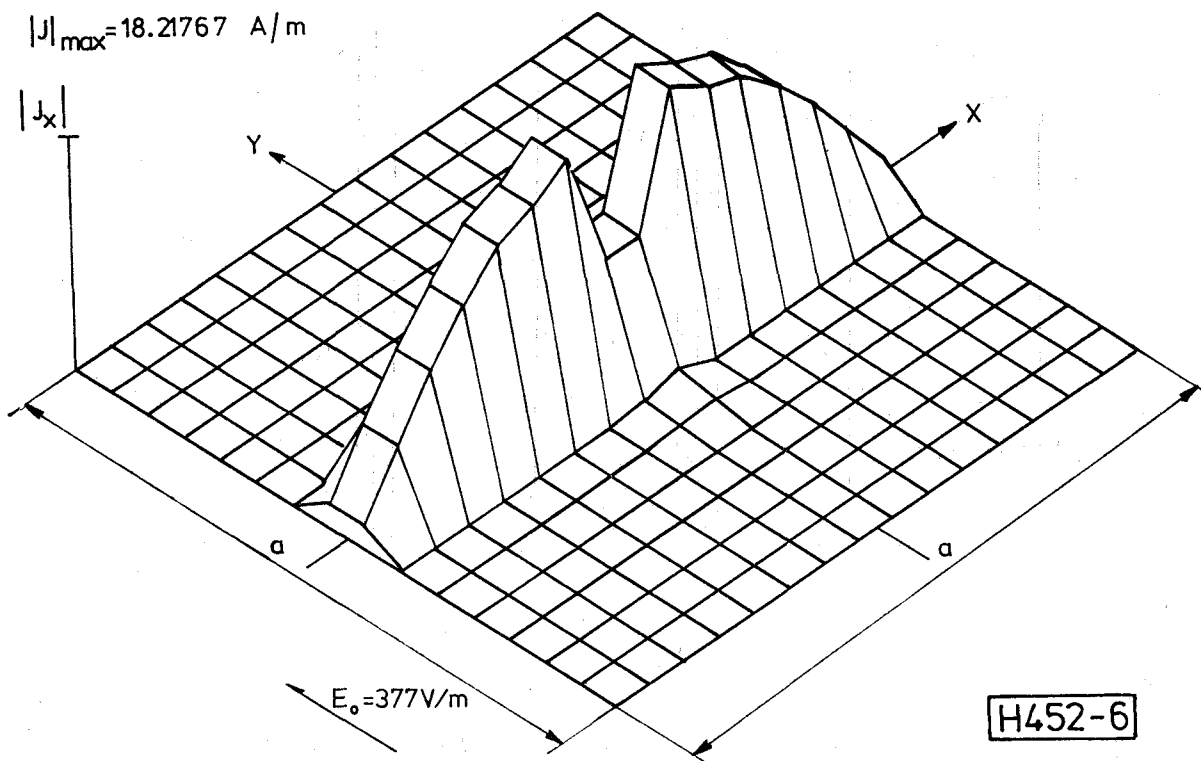
A 6. és 7. ábrán az $a/\lambda = 0,25$ értékhez tartozó árameloszlást adtuk meg egy periódikus cellán belül. A 6. ábrán az indukált áram x irányú, míg a 7. ábrán az y irányú komponensének abszolútértékét rajzoltuk fel.

A 8. ábrán az $\epsilon^2 = 10^{-4}$ hibához tartozó iterációk számát rajzoltuk fel a/λ függvényében, a CGM—FFT, a prekondicionált CGM—FFT és a BiCGM—FFT módszerek alkalmazása esetén. A polarizáció TM módosú, $\Theta = 0^\circ$, $\Phi = 90^\circ$ és $R_{\square} = 0$ ohm. Az ábrán látható három görbe közül a BiCGM—FFT

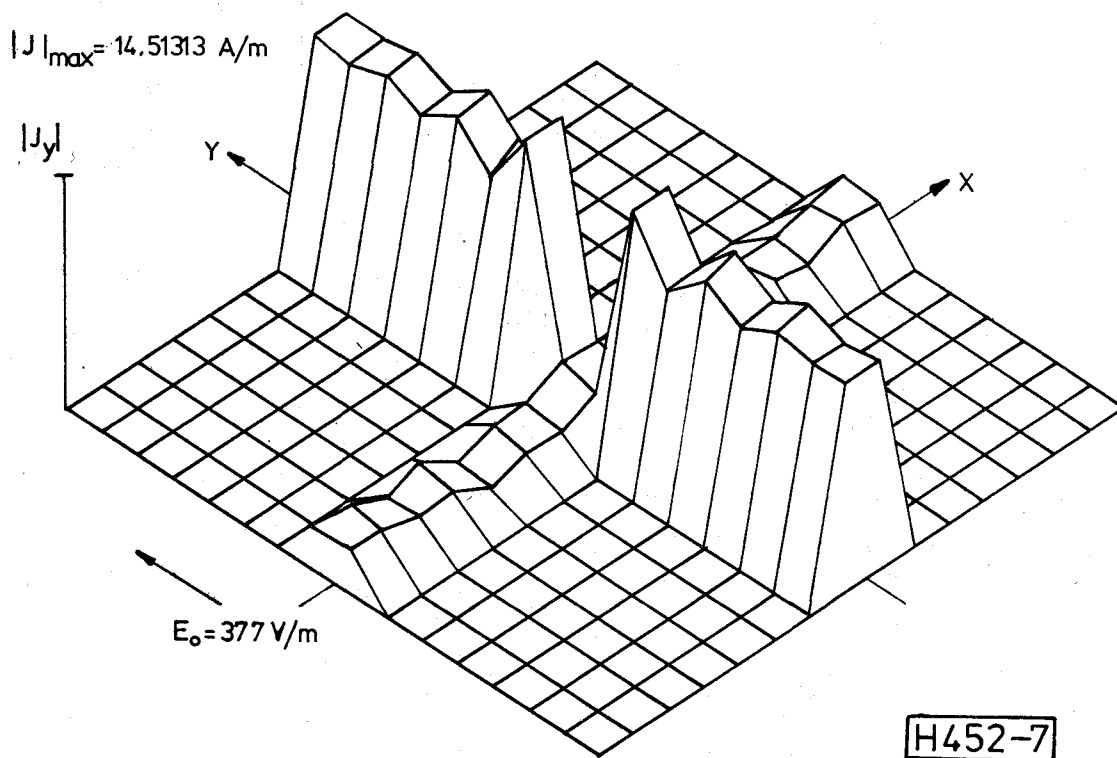
módszerhez tartozó mutatja a legkedvezőbb konvergencia tulajdonságokat. Érdekes megjegyezni, hogy a prekondicionált CGM—FFT módszer csak a rezonancia környezetében biztosít gyors konvergenciát, máshol a szükséges iterációk száma nagyobb, mint amely a hagyományos CGM—FFT módszernél kell.

A 9. ábrán az előbb említett három módszerhez tartozó hibát rajzoltuk fel az iterációk számának függvényében. A polarizáció itt is TM módosú, $\Theta = 0^\circ$, $\Phi = 90^\circ$, $R_{\square} = 0$ ohm és $a/\lambda = 0,25$. Az ábrán jól látszik, hogy a hagyományos CGM—FFT és a prekondicionált CGM—FFT-eljárások esetén a hiba monoton csökken, ellentétben a BiCGM—FFT-módszerrel. Az adott ϵ^2 hibához szükséges iterációk száma ezzel szemben ez utóbbi eljárásnál kisebb.

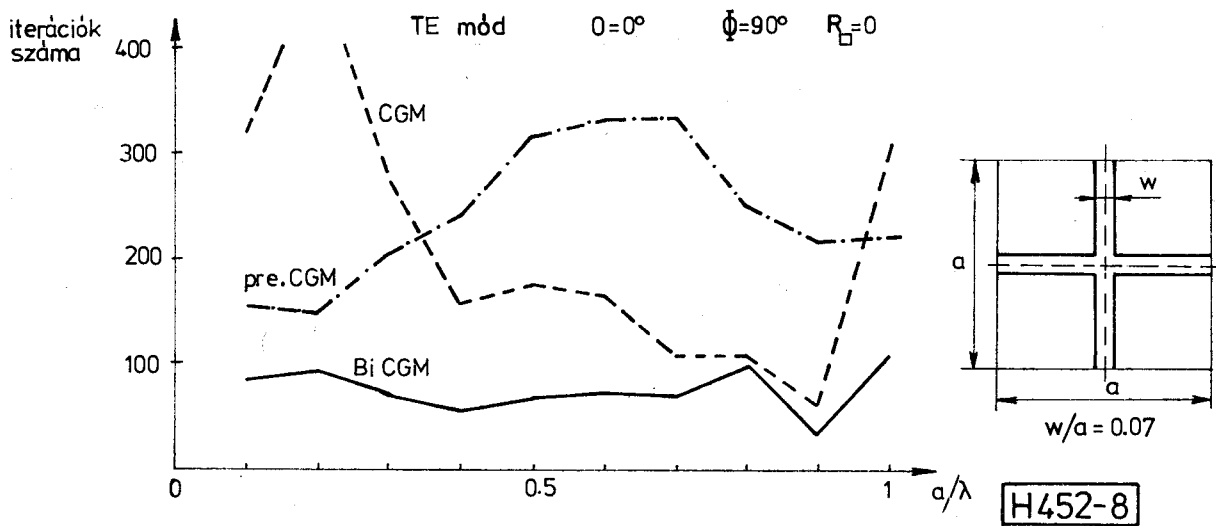
A 10. ábrán az $a/\lambda = 0,25$ -höz tartozó szórásparaméter és P_a/P_i értékeket ábrázoltuk a felületi négyzetes ellenállás függvényében ($0 < R_{\square} < 100$



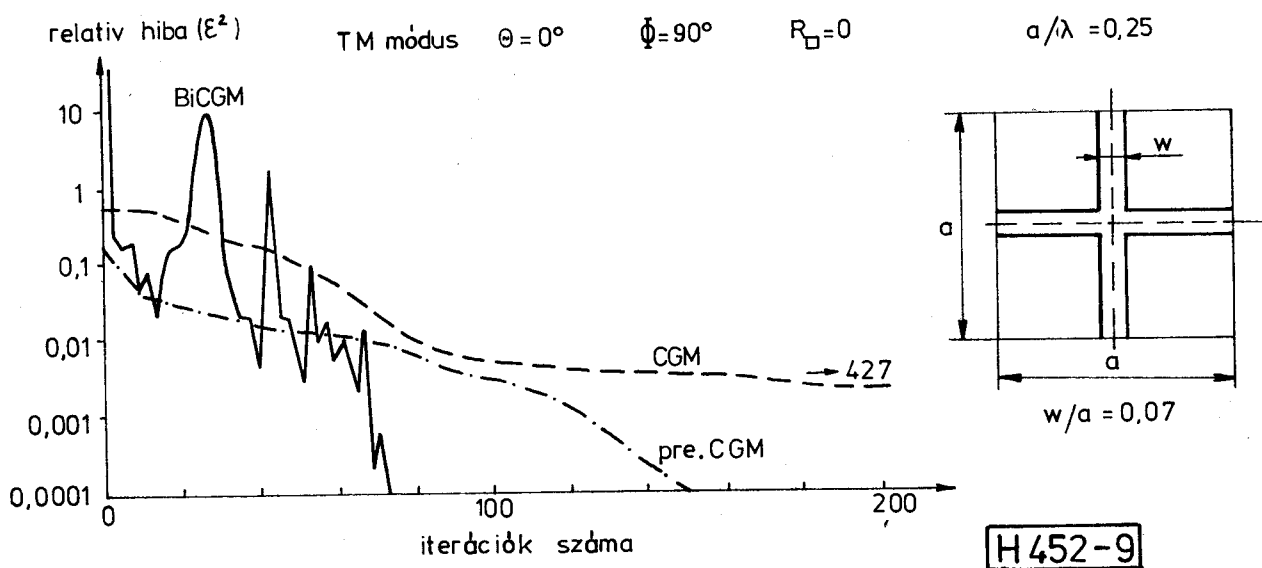
6. ábra. Az indukált áram $|J_x|$ eloszlása egy periódikus cellán belül, TM-mód, $a/\lambda = 0,25$, $\theta = 0^\circ$, $\phi = 90^\circ$, $R_{\square} = 0 \text{ ohm}$



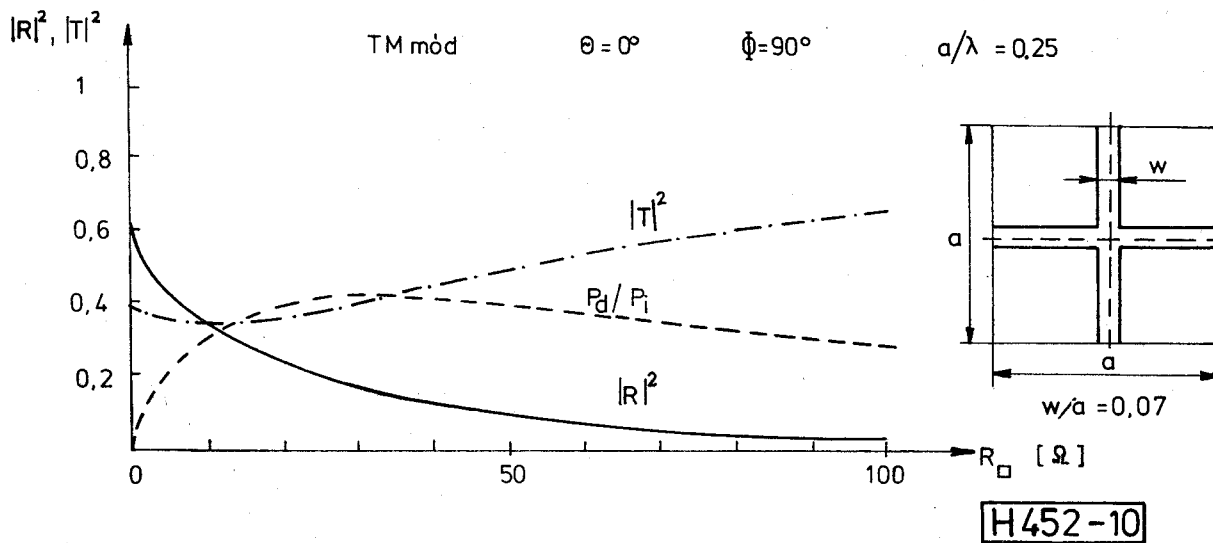
7. ábra. Az indukált áram $|J_y|$ eloszlása egy periódikus cellán belül, TM-mód, $a/\lambda = 0,25$, $\theta = 0^\circ$, $\phi = 90^\circ$, $R_{\square} = 0 \text{ ohm}$



8. ábra. Az iterációk száma az a/λ függvényében

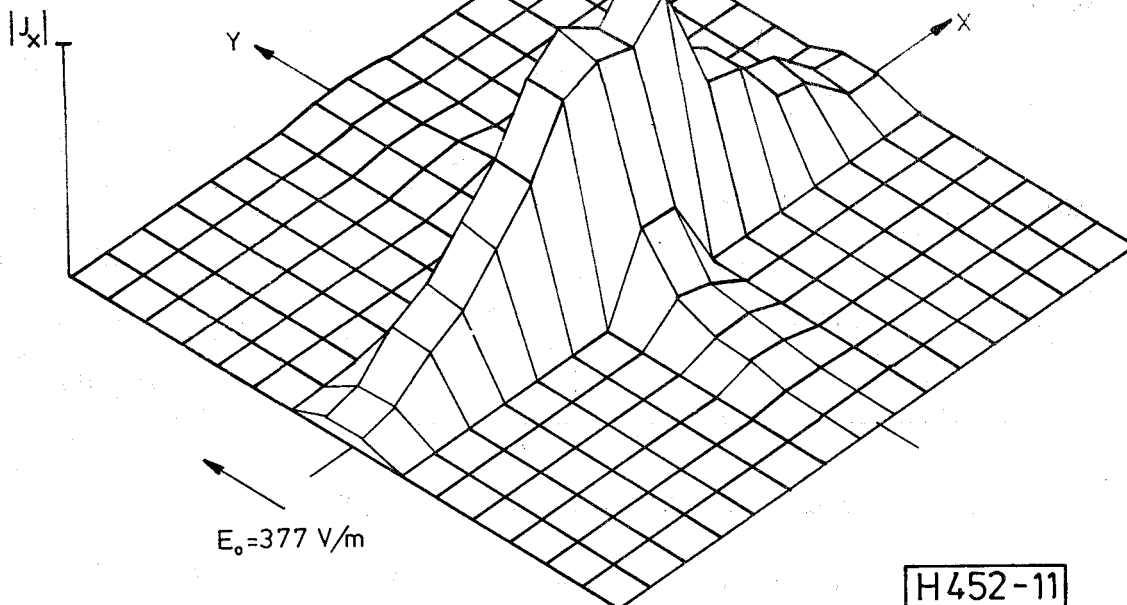


9. ábra. Az egyes módszerek relatív hibái az iterációk számának függvényében



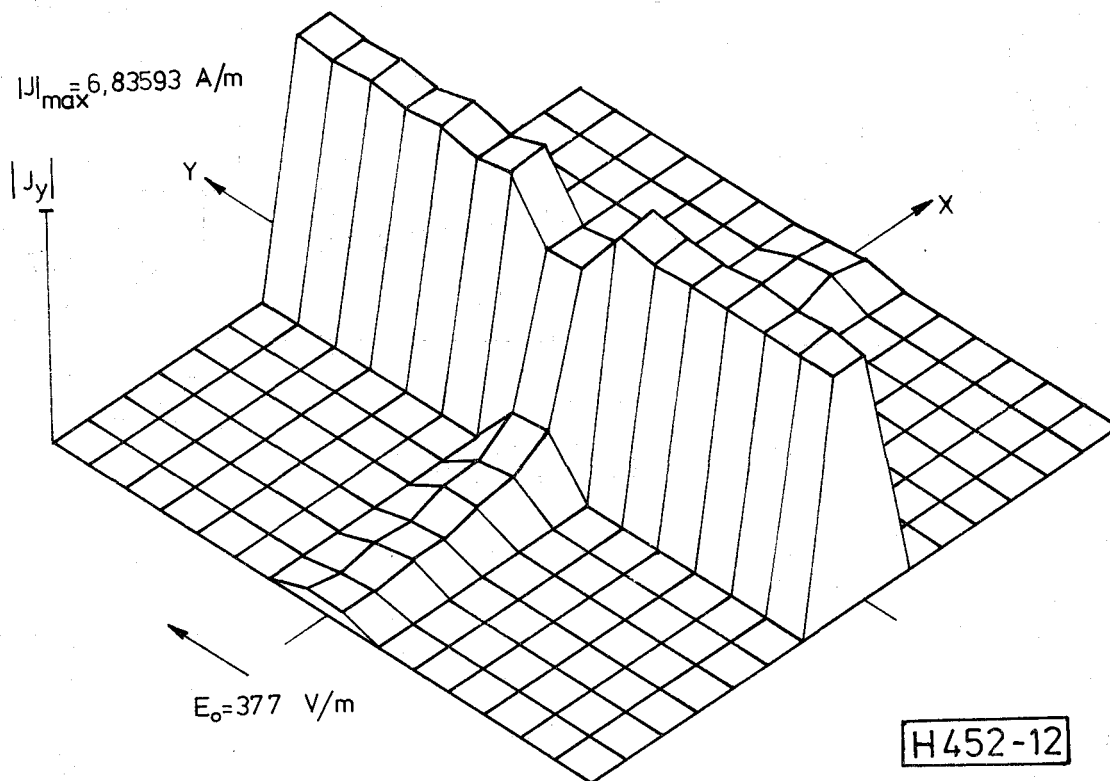
10. ábra. Teljesítményre vonatkozó szórás paraméter és P_d/P_i értékek az R_{\square} függvényében

$$|J|_{\max} = 1.79708 \text{ A/m}$$



11. ábra. Az indukált áram $|J_x|$ eloszlása egy periódikus cellán belül, TM-mód, $a/\lambda=0,25$, $\theta=0^\circ$, $\phi=90^\circ$
 $R_{\square}=30 \text{ ohm}$

$$|J|_{\max} = 6,83593 \text{ A/m}$$



12. ábra. Az indukált áram $|J_y|$ eloszlása egy periódikus cellán belül, TM-mód, $a/\lambda=0,25$, $\theta=0^\circ$, $\phi=90^\circ$,
 $R_{\square}=30 \text{ ohm}$

ohm). A gerjesztő polarizáció TM módosú, $\theta=0^\circ$, és $\phi=90^\circ$.

Az ábrán látható, hogy a P_a/P_i görbének jól definiált maximuma van, ami a belső csillapítás tekintetében optimumnak vehető. Ez az érték körülbelül $R_{\square}=30 \text{ ohm}$.

A 11. és 12. ábrán szintén az $a/\lambda=0,25$ értékhez tartozó árameloszlást rajzoltuk meg, de ellentétben

a 6. és 7. ábrán láthatóval, most $R_{\square}=30 \text{ ohm}$. Az ábrán jól látszik, hogy az áram abszolút értéke mind a két komponens esetén lényegesen lecsökkent a veszteségmentes esethez képest.

Megjegyezzük, hogy a [12] közleményben vizsgált elrendezésekre mi is végeztünk futtatásokat és eredményeink csak 1%-nál kisebb mértékben tértek el egymástól.

7. Értékelés

E cikk összefoglalásaként megállapíthatjuk, hogy a BiCGM—FFT módszer hatékonyan alkalmazható periódikus veszteséges geometriák részletes analízisére.

A prekondicionálás dolgozatban bemutatott változata csak a rezonancia környezetében hozott lényeges javulást. Ennek oka elsősorban az, hogy az operátor itt nagyon rosszul kondicionált és az alkalmazott transzformáció ezen a helyen radikálisan csökkenteni tudta az operátor kondíciószámát. A rezonancia környezetén kívül az adott pontossághoz szükséges iterációk száma mindenhol meghaladta a hagyományos CGM—FFT-módszerhez tartozó értékeket.

A BiCGM—FFT-módszer ezzel szemben mindenhol gyorsabb konvergenciát biztosított, mint a másik két eljárás, ami IBM—PC/AT-gépen már elfogadható, 20—30 perces futási időt jelent geometriától és veszteségtől függően.

Érdeemes megjegyezni, hogy a mintavételi tétel érvényesítésével mind a CGM—FFT, mind a BiCGM—FFT-módszer használható véges kiterjedésű sík problémák megoldására is [16].

Köszönetnyilvánítás

Köszönetünket fejezzük ki Szekeres Béla adjunktusnak a dolgozat elkészítése során nyújtott szakmai segítségért, valamint Nagy Lajos nappali szakmérnök-hallgatónak a programok írásánál nyújtott önzetlen segítségéért.

IRODALOM

- [1] C. J. Larson—B. A. Munk: The Broad-Band Scattering Response of Periodic Arrays, IEEE Trans. Antennas and Propagat. Vol. AP—31. No. 2., pp: 261—267, 1983.
- [2] S. W. Lee—G. Zarrillo—C. L. Law: Simple Formulas for Transmission Through Periodic Metal Grids or Plates, IEEE, Trans. Antennas Propagat, Vol. AP—30, No., 5., pp: 904—909, 1982.
- [3] M. Ando—K. Takei: Reflection and Transmission Coefficients of a Thin Strip Grating for Antenna Application, IEEE Trans. Antennas Propagat, Vol. AP—35, No. 4., pp.: 367—371, 1987.
- [4] W. L. Ko—B. Mittra: A New Approach Based on a Combination of Integral Equation and Asymptotic Techniques for Solving Electromagnetic Scattering Problems, IEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—25, No. 2., pp. 187—197, 1977.
- [5] C. H. Tsao—R. Mittra: A Spectral-Iteration Approach for Analysing Scattering from Frequency Selective Surfaces, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—30, No. 2., pp: 303—308, 1982.
- [6] C. H. Tsao—R. Mittra: Spectral-Domain Analysis of Frequency Selective Surface Comprised of Perio-

dic Arrays of Cross Dipoles and Jerusalem Crosses, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—32, No. 5., pp: 478—486, 1984.

- [7] R. Mittra—R. C. Hall—C. H. Tsao: Spectral-Domain Analysis of Circular Patch Frequency Selective Surfaces, IEEE Trans Antennas Propagat. Vol. AP—32, No. 5., pp: 533—536, 1984.
- [8] R. C. Hall—R. Mittra: Scattering from a Periodic Array of resistive Strips, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—33, No. 9., pp: 1009—1011, 1985.
- [9] K. Uchida—T. Noda—T. Matsunaga: Numerical Analysis of Plane Wave Scattering by an Infinite Plane Grating Using Weighted Fourier Series, The Transactions of the IECE of Japan, Vol. E 69, No. 2., pp: 132—138, 1986.
- [10] K. Uchida—T. Noda—T. Matsunaga: Spectral Domain Analysis of Electromagnetic Wave Scattering by an Infinite Plane Metallic Grating, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—36. No. 1., pp: 46—52, 1987.
- [11] T. K. Sarkar—B. Arvas: On a Class of Finite Step Iterative Methods for the Solutions of an Operator Equation in Electromagnetics, IEEE Trans. Antennas Propagat, Vol. AP—33, No. 10., pp: 1058—1066, 1985.
- [12] R. S. Zich: Special Issue on Frequency Selective Surfaces, Electromagnetics. Vol. 5., No. 4., 1985.
- [13] C. O. Christodoulou—J. F. Kauffman: On the Electromagnetic Scattering from Infinite Rectangular Grids with Finite Conductivity, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. Ap.—34., No. 2, pp: 144—154, 1986.
- [14] T. K. Sarkar—E. Arvas—S. M. Rao: Application of FFT and the Conjugate Gradient Method for the Solution of Electromagnetic Radiation from Electrically Large and Small Conducting Bodies, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—34, No. 4., pp: 535—640, 1986.
- [15] D. T. Borup—O. P. Candhi: Comments on „Application of FFT and the Conjugate Gradient Method for the Solution of Electromagnetic Radiation from Electrically Large and Small Conducting Bodies”. IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—35., No. 6., pp: 607—609, 1987.
- [16] R. Kastner—R. Mittra: Iterative Analysis of Finite-Sized Planar Frequency Selective Surfaces with Rectangular Patches or Perforations, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—35, No. 4., pp: 372—377., 1987.
- [17] A. Kas—E. L. Yip: Preconditioned Conjugate Gradient Methods for Solving Electromagnetic Problems, IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—35. No. 2., pp: 147—152, 1987.
- [18] T. K. Sarkar: On the Application of the Generalized BiConjugate Gradient Method, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 1. No. 3. pp: 223—242, 1987.
- [19] D. J. Evans: Sparsity and its Applications, Cambridge, 1985.
- [20] P. L. E. Uslenghi: Electromagnetic Scattering, Academic Press, 1978.
- [21] Szekeres Béla: Antennák és hullámterjedés. Egyetemi jegyzet. (Házi sokszorosítás)
- [22] P. Petre—L. Zombory: Application of the generalized biconjugate gradient FFT method for analysing planar frequency selective surfaces, Electronics Letters, 28 th April 1988. Vol 24. No. 9. pp: 565—566.