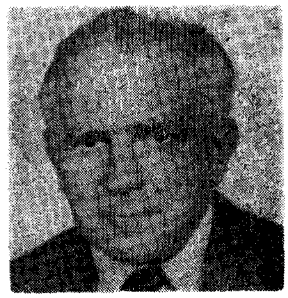
# A TM és a TE módusú elektromágneses tér számításáról

DR. VÁGÓ ISTVÁN

Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola



ÖSSZEFOGLALÁS

Ismeretes, hogy elektromágneses tórszámítási feladatok megoldását olyan **A** mágneses és **F** elektromos vektorpotenciálból szokás származtatni, amelyeknek kizárólag longitudinális komponense van. Ekkor az **A**-ból származtatott tér TM, az **F**-ből származtatott pedig TE módusú.

A cikk megmutatja, hogyan lehet mind a TM, mind a TE módusú teret akár az **A** mágneses, akár az **F** elektromos potenciálból származtatni. Ilyen az **A**, ill. **F** vektorpotenciál két skaláris mennyiséggel adható meg. A cikk megadja az olyan **A** és **F** vektorpotenciál kapcsolatát, amelyek ugyanazt az elektromágneses teret írják le.

*DR. VÁGÓ ISTVÁN*

*1944-ben végezte el a Mechanikai és Elektromosipari Szakiskola Felsőtagozatát, 1950-ben a BME Villamosipari Karát. 1965-ben lett a műszaki tudomány kandidátusa, 1970-ben pedig a műszaki tudomány doktora. Dolgozott műszerész segédként, műszaki tisztviselőként, hadmérnökként és fejlesztő mérnökként. 1958-ban lett a BME Elméleti Villamosságtan Tanszéken adjunktus, 1963-ban docens, 1972-ben egyetemi tanár. 1967-től 1973-ig és 1975-től 1979-ig a Villamosmérnöki Kar dékánhelyettese, 1979—85-ig dékánja, 1986-tól a KKVMF főigazgatója.*

*Tudományos munkaterülete az elektromágneses terek analitikus és numerikus számítása, távvezetékrendszerek elmélete, és a gráfelméletek villamos hálózatok számítására történő alkalmazása.*

*Számos publikációja mellett 5 könyvet ill. könyvrészletet írt. Ebből egy angol nyelven is megjelent (az Elsevier és az Akadémiai Kiadó kiadásában). Irányításával 7 kandidátusi disszertáció készült, amelyek megvédésre kerültek.*

## 1. Bevezetés

Ismeretes, hogy elektromágneses térszámítási feladatok megoldását olyan **A** mágneses és **F** elektromos vektorpotenciálból szokás származtatni, amelyeknek kizárólag longitudinális komponense van. Ekkor az **A**-ból származtatott tér TM, az **F**-ből származtatott pedig TE módusú.

A következőkben megmutatjuk, hogyan lehet mind a TM, mind a TE módusú teret akár az **A** mágneses, akár az **F** elektromos potenciálból származtatni. Számításainkban az **A**, ill. az **F** vektorpotenciál két skaláris mennyiséggel adható meg. Megadjuk az olyan **A** és **F** vektorpotenciál kapcsolatát, amelyek ugyanazt az elektromágneses teret írják le.

## Elektromágneses tér számítása mágneses és elektromos vektorpotenciálból

Az **A** mágneses vektorpotenciált a

$$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \tag{1}$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol **B** a mágneses indukció vektor. Kimutatható, hogy az **A** vektorpotenciál eleget tesz a

$$\Delta\mathbf{A}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0 \tag{2}$$

hullámegyenletnek, ahol $\mu$ a közeg permeabilitása, $\varepsilon$ a permittivitása, $\sigma$ a fajlagos vezetése.

Az **E** elektromos térerősség és az **A** vektorpotenciál kapcsolatára a

$$\mu\sigma\mathbf{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{3}$$

egyenlet írható fel, amiből az előbbi hullámegyenlet felhasználásával

$$\mu\sigma\mathbf{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\left(\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)+ +\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} \tag{4}$$

Árammentes térrészben

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{5}$$

Az elektromágneses tér levezethető a

$$\mathbf{D}=\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \tag{6}$$

összefüggéssel definiált **F** elektromos vektorpotenciálból is, ahol **D** az eltolási vektor. **F** is eleget tesz a hullámegyenletnek:

$$\Delta\mathbf{F}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2}=0. \tag{7}$$

A **H** mágneses térerősségre a

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu\varepsilon}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \tag{8}$$

összefüggés írható fel.

Ha a vektorpotenciálnak csak egy kitüntetett irányba — hullámterjedés esetén a hullám terjedési irányába — eső komponense nem azonosan zérus, akkor a vektorpotenciál longitudinális irányú és

$$\mathbf{A}=A_l\mathbf{e}_l \tag{9}$$

ill.

$$\mathbf{F}=F_l\mathbf{e}_l \tag{10}$$

alakban írható, ahol $\mathbf{e}_l$ a longitudinális irányú egységvektor. Az ilyen **A**-ból származtatott térben a mágneses tér erre merőleges, azaz tranzverzális irányú, a megoldás TM módusú:

Beérkezett: 1988. VI. 10 (H)

$$\mathbf{B}_{TM} = \mathrm{rot}(A_l\mathbf{e}_l) = \mathrm{grad}\ A_l \times \mathbf{e}_l \tag{11}$$

A (10) szerinti F-ből számítható elektromos tér tranzverzális irányú. Ebből TE módusú megoldást kapunk:

$$\mathbf{D}_{TE} = \mathrm{grad}\ F_l \times \mathbf{e}_l \tag{12}$$

A TM ós a TE módusú tér szuperpozíciója az általános megoldás, vagyis az általános megoldás két skaláris mennyiségből: $A_l$-ből és $F_l$-ből származtatható.

A következőkben megvizsgáljuk, hogyan származtatható TE módusú megoldás az **A**, TM módusú pedig az **F** vektorpotenciálból. Ehhez felbontjuk az **A** vektorpotenciált $\mathbf{A}_\tau$ tranzverzális és $\mathbf{A}_l$ longitudinális részre.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\tau + \mathbf{A}_l \tag{13}$$

(11) értelmében $\mathbf{A}_l$-ből TM módosú megoldás származtatható. $\mathbf{A}_\tau$ -t úgy választjuk, hogy abból TE módusú tér legyen számítható. Ez (4) alapján biztosan teljesül, ha

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A}_\tau = 0 \tag{14}$$

Ilyen választás nem jelenti a megoldás korlátozását, egymástól eltérő div $\mathbf{A}_\tau$ választás mellett ugyanis (1) és (5) alapján ugyanaz a tér kapható meg. Így (4) értelmében

$$\mathbf{F}_{TE} + \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial \mathbf{E}_{TE}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}_\tau}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\alpha}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\tau}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Minthogy időben változó mennyiségek közötti kapcsolatot vizsgálunk, az időben állandó rész zérus. $\mathbf{A}_\tau$ tranzverzális irányú, így idő szerinti deriváltja is tranzverzális, vagyis a kapott tér TE módusú.

(14) alapján írható, hogy

$$\mathbf{A}_\tau = \mathrm{rot}\ \mathbf{V} \tag{16}$$

$\mathbf{A}_\tau$ tranzverzális irányú. Ez (16) szerint biztosan teljesül, ha **V** longitudinális irányú, vagyis

$$\mathbf{V} = V\mathbf{e}_l \tag{17}$$

Ekkor ugyanis

$$\mathbf{A}_\tau = \mathrm{rot}(V\mathbf{e}_l) = \mathrm{grad}\ V \times \mathbf{e}_l \tag{18}$$

(17) nem jelenti az általánosság korlátozását, a (14)-nek eleget tevő és a koordináták szerint integrálható $\mathbf{A}_\tau$ -ból (18) alapján $V$ meghatározható.

(18) szerint a TE módusú tér a $V$ skaláris mennyiségből számítható. A mágneses indukciót a

$$\mathbf{B}_{TE} = \mathrm{rot\ rot}(V\mathbf{e}_l) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ V\mathbf{e}_{xl}) \tag{19}$$

összefüggés adja meg.

Az eddigiek alapján a következőket mondhatjuk. Az **A** vektorpotenciált — az általánosság korlátozása nélkül — két részre bonthatjuk:

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad}\, V \times \mathbf{e}_l + A_l\mathbf{e}_l \tag{20}$$

Az első tag divergenciája, a második tag rotációja nulla. A jobb oldal első tagjából TE, a második tagjából TM módusú tér számítható. Végeredményben a teljes tér két skaláris mennyiségből: V-ből ós $A_l$-ből származtatható.

Az előbbiekhez hasonlóan kimutatjuk, hogy **F**-ből nemcsak TE, hanem TM módusú tér is származtatható. Ehhez **F**-et a tranzverzális irányú $\mathbf{F}_\tau$ és a longitudinális irányú $\mathbf{F}_l$ összegeként írjuk fel:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_l \tag{21}$$

A TE módusú megoldás $\mathbf{F}_l$-ből kapható meg. $\mathbf{F}_\tau$ -ból TM módusú tér származtatható, ha

$$\mathrm{div}\mathbf{F}_\tau = 0 \tag{22}$$

Ekkor

$$\mathbf{H}_{TM} = \frac{\sigma}{\mathbf{F}}\mathbf{F}_\tau + \frac{\partial \mathbf{F}_\tau}{\partial t} \tag{23}$$

(22) értelmében írható, hogy

$$\mathbf{F}_\tau = \mathrm{rot}\mathbf{W} \tag{24}$$

ahol

$$\mathbf{W} = W\mathbf{e}_l \tag{25}$$

Így

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, W \times \mathbf{e}_l + F_l\mathbf{e}_l \tag{26}$$

vagyis **F**-et két skaláris mennyiséggel: $W$-vel és $F_l$-lel adhatjuk meg. $W$-ből TM, $F_l$-ből pedig TE módusú megoldás származtatható. (26)-ban a jobb oldali első tag divergenciája, a második tag rotációja nulla.

## A két megoldás azonosságának feltételei

A következőkben megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolatnak kell **A** és **F** között fennállnia, hogy mindegyikből ugyanaz az elektromágneses tér legyen származtatható.

A TE módusú megoldás a két vektorpotenciálból azonos, ha

$$\frac{1}{\varepsilon}F_l = -\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{27}$$

a TM módusú megoldás pedig akkor, ha

$$\frac{1}{\mu}A_l = \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{28}$$

A TE módusú elektromos térerősség kifejezése (15), (16) és (17) alapján:

$$\mathbf{F}_{TE} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\ V \times \mathbf{e}_l = -\mathrm{grad}\frac{\partial V}{\partial t} \times \mathbf{e}_l \tag{29}$$

ill. (6) és (26) alapján

$$\mathbf{E}_{TE} = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\ F_l \times \mathbf{e}_l \tag{30}$$

vagyis (27) teljesülése esetén (29) ós (30) egymással egyenlő. Hasonlóképpen a mágneses térerősség kifejezése (19) alapján:

$$\mathbf{H}_{TE} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ V \times \mathbf{e}_l) \tag{31}$$

ill. (8) és (26) alapján:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{TE}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\varepsilon}\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ F \times \mathbf{e}_l) \tag{32}$$

(31)-ből:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{TE}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\frac{\partial V}{\partial t} \times \mathbf{e}_l\right) \tag{33}$$

vagyis (32) és (33) egyenlő, ha (27) teljesül.

Hasonlóképpen igazolható, hogy (28) teljesülése esetén az $A_l$-ből ós a $W$-ből származtatott TM módusú tér megegyezik egymással.

(9) és (10) értelmében $A_l$ és $F_l$ teljesíti a skaláris hullámegyenletet, vagyis

$$\Delta A_l - \mu\sigma\frac{\partial A_l}{\partial t} - \frac{\partial^2 A_l}{\partial t^2} = 0 \qquad (34)$$

$$\Delta F_l - \mu\sigma\frac{\partial F_l}{\partial t} - \frac{\partial^2 F_l}{\partial t^2} = 0 \qquad (35)$$

teljesül.

Így (27), ill. (28) teljesülése esetén $V$, ill. $W$ kielégíti a

$$\Delta V - \mu\sigma\frac{\partial V}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \qquad (36)$$

ill.

$$\Delta W - \mu\sigma\frac{\partial W}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \qquad (37)$$

hullámegyenletet. Ha tehát az elektromágneses teret $V$-ből és $A_l$-ből, vagy $W$-ből és $F_l$-ből származtatjuk, mindegyik esetben olyan skaláris függvényekből történik a számítás, amelyek teljesítik a hullámegyenletet.

## IRODALOM


[1] P. *M. Morse, H. Feshbach:* Methods of Theoretical Physics Mc GRAW — HILL BOOK COMPANY, INC 1953.

[2] *S. Flügge:* Handbueh der Physik XVI. kötet. SPRINGER — VERLAG 1958.

[3] *Simonyi K.:* Elméleti villamosságtan. TANKÖNYVKIADÓ 1967.

[4] *Vágó I.:* Villamosságtan II. Elektromágneses terek. TANKÖNYVKIADÓ, 1988.