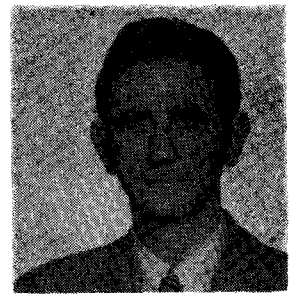


A diszkrét Fourier-transzformációhoz

DR. KERPÁN ISTVÁN

Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola



ÖSSZEFOGLALÁS

A közlemény a diszkrét Fourier-transzformáció alapján bevezeti a „DFT-spektrum”-ot, mint periodikus jel előírt helyettesítési értékeit előállító véges trigonometrikus sort, és összehasonlítja azt a csonkított Fourier-sorral. Az összehasonlítás útbizonyítást ad a sávkorlátozott jelnek a detektálás szempontjából kedvező spektrum formálásához.

A Fourier-analízis gazdag története nem zárult le [1]. Az újabb fejezetek közé sorolható diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) a jelekkel és rendszerekkel foglalkozó korszerű munkák standard anyagává vált (ld. pl. [2], [3]).

A témakörünkkel összefüggő irodalomban (a Híradástechnika hasábjain is) a legbősegebben az FFT-vel foglalkoztak a szerzők.

Úgy látjuk, hogy a DFT néhány, a híradástechnikus nézőpontjából fontos vonását élesebb kontúrral meghúzni még napjainkban sem felesleges. Mindenek előtt az ÖSSZEFOGLALÁS-ban kiemeltre gondolunk.

A DFT (és inverze) az (1) összefüggésekkel jellemzett kapcsolat két, azonos páros (N) számú elemből álló számsorozat között.

Jelölje az egyik sorozatot \bar{A} (A_r elemekkel), a másik sorozatot \bar{x} (x_k elemekkel). E jelöléssel:

$$A_r = (T) \sum_{k=0}^{N-1} x_k W^{-rk}; \quad (r=0, 1, \dots, N-1); \quad (1a)$$

$$x_k = \frac{1}{N(T)} \sum_{r=0}^{N-1} A_r W^{rk}; \quad (k=0, 1, \dots, N-1); \quad (1b)$$

$$W = e^{j \frac{2\pi}{N(T)} (T)}$$

(T valós konstans. Értékének megválasztása az (1) transzformáció jellegét nem érinti. Ebben a pontban a továbbiakban $T=1$.)

Igazolni kívánjuk az alábbi (1) TÉTEL-t: \bar{A} és \bar{x} közül az egyiknek az elemeit a véges komplex számokból bárhogy választva az (1) transzformáció kölcsönösen megfordítható és egyértelmű.

Gondolatmenetünk (a könnyen rekonstruálható részletek nélkül):

(1) egy-egy „korrekt” (kellő számú, lineárisan független) egyenletről álló lineáris egyenletrendszert konstruál a

W^{-rk} elemeket tartalmazó $\bar{W}_{(-)}$ és a

DR. KERPÁN
ISTVÁN

A Budapesti Műszaki Egyetemen 1958-ban villamosmérnöki oklevelet, 1966-ban átviteltechnikai szakmérnöki oklevelet, 1970-ben pedig műszaki doktori címet szerzett. Hat éven át volt a BHG Híradástechnikai Vállalat mérnöke, majd tanári kinevezést kapott a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolára, ahol hosszabb ideig a Vezeté-

kes Híradástechnikai Tanszék vezetője volt. Jelenleg a Híradásipari Intézet igazgatója. Szakmai munkásságának főbb területei: a légmedvességgel összefüggő technológiai és konstrukciós kérdések; vizsgálati technológiák és eszközök; a jel- és információelmélet egyes kérdése. Egy találmánynak, több főiskolai jegyzetnek, mintegy két tucat szakcikknek, számos publikációnak a szerzője, ill. társszerzője.

W^{rk} elemeket tartalmazó \bar{W} együtttható-mátrixokból.

A két lineáris egyenletrendszer (ha a jelölésben nem teszünk különbséget sor- és oszlop-mátrix között, a mátrixalgebra szabályaira bízva a „jelölést”)

$$\bar{A} = \bar{W}_{(-)} \bar{x} \quad (2)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \bar{W} \bar{A} \quad (3)$$

(2) és (3) ugyanazt a kapcsolatot fejezi ki \bar{A} és \bar{x} között akkor, ha

$$\bar{W}_{(-)}^{-1} = \frac{1}{N} \bar{W},$$

vagy (más formában), ha

$$\bar{W} \bar{W}_{(-)} = N \bar{E}. \quad (4)$$

A \bar{W} és $\bar{W}_{(-)}$ mátrixokat felírva és összeszorozva egy olyan $N \times N$ mátrixot kapunk, amelyiknek a főátlójában minden elem $NW^0 = N$ értékű, az összes többi elem pedig nulla. Ez utóbbi megállapításában segíthet az alábbi (2) TÉTEL: Ha a komplex számsíkon a $(0+j0)$ középpontú, $|r|=1$ sugarú körön N db W^{rk} komplex szám (vagy N db W^{-rk} komplex szám) helyezkedik el úgy, hogy mindegyik azonos (a körívén mért) távolságra helyezkedik el a szomszédaitól, akkor ezen komplex számok összege nulla. E tétel igazsága $N=2^n$ páros szám esetén közvetlenül belátható. U.i. mindegyik számnak lesz egy, a $(0-j0)$ pontra szimmetrikus párja, amellyel nulla összeget ad. A nulla részösszegek pedig nulla teljes összeget adnak.

(4) igazolásával (2) és (3) tartalmi azonosságát, ezzel pedig az (1) TÉTEL-t is igazoltnak tekintjük.

Beérkezett: 1988. VI. 6. (H)

Figyelembe véve, hogy

$$W^{-k(N-r)} = W^{-k(-r)} = (W^{-kr})^*; \quad (0 < r < N/2)$$

$$W^{-k(N-N/2)} = (-i)^k; \quad (r = N/2) \quad (5)$$

az (1) összefüggésekből egyszerű helyettesítéssel igazolható a (3) TÉTEL: Ha \bar{x} valós sorozat, akkor az első $N/2$ darab A_r elem \bar{A} -ra vonatkozóan a teljes információt tartalmazza — (6) szerint.

$$A_{N-r} = A_r^*; \quad (0 < r < N/2)$$

$$A_{N/2} = (T) \sum_{k=0}^{N-1} x_k (-1)^k; \quad (r = N/2) \quad (6)$$

Jelölje az \bar{x} ill. \bar{A} ismételtetésével nyert periodikus sorozatokat $\dots, \bar{x}_{-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots$ ill. \dots ,

$\bar{A}_{-1}, \bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots$ Periodikus esetben $\bar{x} = x_0$ ill. $\bar{A} = \bar{A}_0$. A nullás vektorindex a $0, 1, \dots, N-1$ indexű elemeket tartalmazó főperiódusra utal. Az (1)-gyel definiált DFT nem követeli meg, de lehetővé teszi, hogy mindkét sorozat vagy az egyik sorozat periodikus sorozatból származzék. Pl. (1) fontos alkalmazásai:

- a) \bar{x}_0, \bar{A}_0 és
b) \bar{x}_0, \bar{A} .

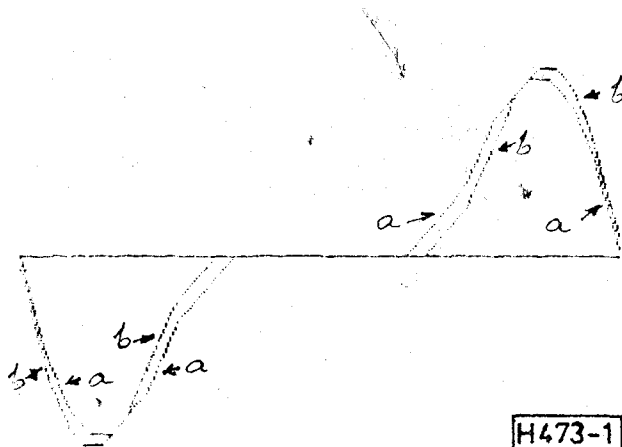
a) jelenik meg olyan fontos esetekben, mint — periodikus sorozatok diszkrét konvolúció/dekonvolúció számítása, támaszkodva a DFT-re vonatkozó konvolúció-tételre (ld. [7]), vagy — sávkorlátozott periodikus jelből mintavételezéssel nyert jel (Dirac-impulzus sorozat) és annak periodikus és diszkrét spektruma közötti kapcsolat leírása.

A következő (II.) pontban részletesebben bemutatunk egy, b)-nek megfelelő modellt.

Vegyük \bar{x}_0 elemeit egy folytonosidejű, NT szerint periodikus x jel főperiódusának a $0, T, 2T, \dots, (N-1)T$ időpontokhoz tartozó, valós és (N nagyságának köszönhetően, teljességükkel „kellően”) jellemző helyettesítési értékeiből. (A megengedett véges szakadási helyeken a „közepes értékkel” helyettesítünk.) Nem követeljük meg x -től, hogy sávkorlátozott legyen. Ezzel együtt nyitva hagyjuk még azt, hogy a helyettesítési értékek között milyen interpolációt kapjunk. (A helyettesítési értékekhez most nem rendelünk Dirac-impulzus sorozatot, mint a mintavett jel leírása esetében.) A fentiek szerint nyert és értelmezett \bar{x}_0 -hoz DFT-vei egy N -elemű, nem periodikusnak tekintett \bar{A} -t rendelünk. Megmutatjuk, hogy ez az \bar{A} és az (1/b) formula egy véges trigonometrikus sort rendel a kiinduló x függvényünkhöz, amit „DFT-spektrum”-nak nevezünk.

Használjuk fel (6)-ot (1)-ben, s az exponenciális párokat írjuk fel trigonometrikus alakban:

$$x_k = \frac{1}{NT} \times$$



1. ábra. DFT spektrum (a) és csontított Fourier-sor (b) időfüggvénye ($N=8$)

$$\times \left[A_0 + \frac{A_N}{2} (-1)^k + \sum_{r=1}^{\frac{N}{2}-1} A_r W^{kr} + A_r^* W^{-kr} \right] =$$

$$= \frac{1}{NT} \left\{ A_0 + \frac{A_N}{2} \cos \frac{2\pi}{NT} k + \sum_{r=1}^{\frac{N}{2}-1} 2 |A_r| \left[\cos \left(r \frac{2\pi}{NT} k + \text{arc} A_r \right) \right] \right\} \quad (7)$$

Az átalakításhoz kihasználtuk, hogy

$$\cos \frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} k = \cos nk = (-1)^k. \quad (8)$$

(7)-ben a második egyenlőség jobboldala fejezi ki (explicit alakban) x DFT-spektrumát, melynek $t = kT$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) helyettesítési értékei előállítják \bar{x}_0 elemeit, s interpoláló formulát ad a „köztes” értékekre.

A DFT-spektrum $1/NT$ frekvenciaközönként a $0 \leq f \leq 1/2T$ sávon egy véges (max. $N/2$ tagú) trigonometrikus sor tagjait, s velük a fizikailag is realizálható spektrumot írja le. Ez az x periodikus jel kT pillanatokhoz tartozó helyettesítési értékeit pontosan előállítja. k értékkészlete (a $\dots, \bar{x}_1, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots$ sorozatban) a valós egész számok halmaza.

A Fourier-sorról tudjuk (ld. [8]), hogy az átlagos négyzetes eltérés minimalizálása tekintetében a legjobb konvergencia tulajdonságú trigonometrikus sor. Viszont a csontított Fourier-sortól nem várható, hogy pontosan előállítsa mindazokat a helyettesítési értékeket, mint a DFT-spektrum — tekintet nélkül x sávkorlátozottságára.

Ha az x jel eleve korlátozva van az $f < 1/2T$ fizikai sávra (ami a trigonometrikus összetevők exponenciális párokra bontása esetén azt jelenti, hogy $-1/2T < f < 1/2T$, $(f_{\max} - f_{\min}) < 1/T$, akkor: — a DFT-spektrum átmege a Fourier-sorba és — annak konvolúciója a mintavételező Dirac-impulzus sorozat spektrumával (az exponenciális felbontásokat feltételezve) előállítja a periodikus és mintavett jel periodikus és diszkrét spektrumát. (Ekkor tekinthetjük úgy, hogy az \bar{x}_0 -ból DFT-vei nyert $\bar{A} = \bar{A}_0$ a $\dots, \bar{A}_{-1}, \bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots$ periodikus sorozatból.)

A sávkorlátozott impulzusjelek detektálásának a módjától és feltételeitől függ, hogy a csonkított Fourier-sor vagy a DFT-spektrum vezet-e a megbízhatóbb detektáláshoz. A DFT bemutatott tulajdonságai segíthetnek a jel detektálás javítását célzó spektrum-manipulációkkal kapcsolatos (számtógépes) jelszimulációs kísérletekben. A kísérlethez természetesen meg kell konstruálni a jel elfogadható periodikus modelljét.

Illusztrációként: Modellezzük a $P(0)=P(1)=0,5$; $P(0 \rightarrow 0)=P(0 \rightarrow 1)=P(1 \rightarrow 1)=P(1 \rightarrow 0)=0,25$ statisztikai tulajdonságokkal rendelkező PCM-AMI kódú vonali jelet a periodikusan ismétlődőnek tekintett $-1, 0, 0, +1$ sorozattal (amit az Olvasó joggal tarthat túlzottan leegyszerűsítettnek). Az $N=8$ mintás DFT-spektrumot és a (felülről) a bitfrekvenciára csonkított Fourier egybevetve kiolvashatók és ellenőrizhetők az „emelt koszinusz”-hoz hasonló karakterisztikával végrehajtott spektrum-manipuláció jelimpulzus kiszélesítő hatása (mint előny) és a szünetimpulzusok időszakaira jutó nagyobb lengések (mint hátrány).

(A példával kapcsolatos adatok részletesebb ismertetése)

Ha a T a bit-idő, akkor $1/T$ a bitfrekvencia, s az addig terjedő spektrumösszetevők azzal normált értéke:

$$fT = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1.$$

DFT-spektrummal való átfogásához $N_{\min} = 8$.

A következő táblázatban megadjuk (3 értékes jegyre csonkítva) a felsorolt spektrumösszetevők amplitúdóit

- 8 mintás DFT-spektrumra
(0; -1 ; $-0,5$; $0(3x)$; $0,5$; 1 mintákkal),
- 64 mintás DFT-spektrumra
(0; $-1(15x)$; $-0,5$; $0(31x)$; $0,5$; $1(15x)$ mintákkal) és
- a Fourier-sorra.

rel. frekv. fT:	DFT-spektrum		Fourier-sor:
	N=8:	N=64:	
0	0	0	0
0,25	0,602	0,636	0,636
0,5	0,500	0,634	0,636
0,75	0,102	0,210	0,212
1	0	0	0

Megállapítható, hogy esetünkben a 8 mintás DFT-spektrum a Fourier-sorból előállítható a következő súlyozó karakterisztikával:

$$0,95 \frac{1 + \cos.(fT - 0,25)}{2}$$

$$(0,25 \leq fT \leq 0,75),$$

(kb. 3% max. eltéréssel).

Végül az ábrán feltüntetettük a 8 mintás DFT-spektrumhoz tartozó („a” görbe) és a bitfrekvenciától felfelé csonkított Fourier-sorhoz tartozó („b” görbe) időfüggvényeket. Utóbbit 0,84-gyel súlyozva, a két jel kb. azonos teljesítményének a beállítására (1. ábra).

IRODALOM

- [1] Davis, Ph. I.—Hersh, R.: A matematika élménye (Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1984).
- [2] Bendat, J. S.—Piersol, A. G.: Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis (John Wiley & Sons, New York, etc., 1980).
- [3] Hamming, R. W.: Digital Filters (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliff, New Jersey, 2nd ed. 1983).
- [4] Brigham, E. O.: The Fast Fourier Transform (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliff, New Jersey, 2nd ed. 1974).
- [5] Gebe L.: A diszkrét és a gyors Fourier-transzformáció (BHG-ORION-TERTA Műszaki Közlemények, 1981. 4. sz.).
- [6] Dr. Lovass-Nagy Viktor: Matrikszámítás (Tankönyvkiadó, Bp., 1986).
- [7] Kerpán I.: A diszkrét konvolúció alkalmazásáról (Híradástechnika, 1988. 2. sz.).
- [8] Bermant, A. F.: Matematika Analízis II. rész (Tankönyvkiadó, Bp., 1951).