Nullátor-norátor páros hálózatok megoldhatóságáról

DR. PÁVÓ IMRE
MTA Automataelméleti Tanszéki Kutató Csoport

A szerző e dolgozatban RLC-elemekből és független generátorokból felépített nullátor-norátor páros hálózatok egyértelmű megoldhatóságával foglalkozik. A hálózatmodell magjának definiálása után bevezeti a hálózat normál, inverz normál, kitüntetett és reaktancia fája fogalmát. [6] irodalomból kiindulva az egyértelmű megoldhatóságnak szükséges és elegendő feltételeit fogalmazza meg. Előállít egy topológiai formulát, amelynek felhasználásával az egyértelmű megoldhatóság számos elegendő feltétele felírható az RLC elemek paraméterei közötti numerikus összefüggés formájában. Az elmondottak illusztrálását bemutató példák után megad egy olyan blokksémát, amely lehetővé tesz egyértelmű megoldhatóságot vizsgáló komplex számítógépes program szerkesztését.

PÁVÓ IMRE

matematika-fizika szakos tanári oklevelét 1955-ben a Szegedi Tudományegyetemen, villamosmérnöki oklevelét 1967-ben a Budapesti Műszaki Egyetemen szerezte. 1968-ban a JATE-n egyetemi doktori címet, 1973-ban pedig a műszaki tudomány kandidátusa fokozatot nyerte el. Kandidátusi disszertációjának témája lineáris hálózatok tervezése topológia formulákkal. Az MTA Automataelméleti Tanszéki Kutató Csoport tudományos főmunkatársa, ahol alkalmazott gráfelméleti módszerek kutatásával foglalkozik, különös tekintettel absztrakt lineáris rendszerek számítógépen implementálható tervezésére. A JATE címzetes egyetemi docense, oktatómunkát az egyetemen biológus, programozó matematikus és fizikus képzésben fejt ki.

Bevezetés

Lineárisnak tekinthető elektronikus hálózatok számításának egyik módszere azok nullátor-norátor páros modelljének analízisén alapul. Feladat ilyenkor a megoldhatóság eldöntése. Ez általában nem könnyen dönthető el. Példaként tekintsük az első ábrán látható, ideális tranzisztorból és *RLC* elemekből felépített három kapcsolást. Jóllehet mindegyik kapcsolás ugyanazokat az áramköri elemeket tartalmazza, analízisük igen eltérő eredményeket szolgáltat. Az (a) kapcsolásban lévő ideális tranzisztort nullorral modellezve elemi úton belátható, hogy a kapacitás feszültségét és az induktivitás áramát állapotváltozóknak választva a hálózat egyértelműen megoldható. A kapcsolásban szereplő parallel R_3L és soros R_2C tagok helyzetét megváltoztatva a (*b*) kapcsoláshoz juthatunk, amely nem oldható meg egyértelműen. Ez utóbbi kapcsolásból R_2 ohmos ellenállás áthelyezésével a (c) kapcsolást nyerjük, amely hálózat ismét egyértelműen megoldható, ós (egyetlen) állapotváltozóként az induktivitás árama választható.

Nagy elemszámú, bonyolult hálózatmodellek analízise elemi úton általában nem végezhető el. Problémát okoz az egyértelmű megoldhatóság feltétele teljesülésének megállapítása, a hálózat komplemexitás rendjének becslése, az állapotváltozók alkalmas megválasztása. *RLC* hálózatok esetében az egyértelmű megoldhatóság feltétele a normálfa létezése [3]. A normálfában szereplő kapacitások feszültsége és az abban nem szereplő induktivitások árama a megoldáshoz gyakran alkalmas állapotváltozókként választható.

E dolgozatban megmutatjuk, hogy a normálfa fogalma nullátor-norátor páros hálózatokra úgy definiálható, hogy annak az *RLC* hálózatokbeli normálfa speciális esete. Az így általánosított normálfára nullátor-norátor páros hálózatoknál hasonló tételek érvényesek, mint az *RLC* hálózatok esetében. Ismertetésre kerülnek nullátor-norátor páros hálózatok egyértelmű megoldhatóságához szükséges és elegendő feltételeket biztosító tételek. A tételek alkalmazhatóságát példákon mutatjuk meg. Végül utalunk az egyértelmű megoldhatóság vizsgálatának számítógépes implementációjára.

Beérkezett: *1987*. III. 30. (H)

Jelölések, definíciók

Tekintsünk egy nullátor-norátor páros *RLC* hálózatot. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy a hálózat gráfja összefüggő. Jelölje U, I, R, L, C, A és B rendre a hálózat feszültségforrásainak, áramforrásainak, ohmos ellenállásainak, induktivitásainak, kapacitásainak, nullátorainak valamint norátorainak halmazát. A továbbiakban a hálózat elemeinek halmazát és e halmaznak a hálózatgráfban megfelelő részgráfot ugyanazzal a szimbólummal fogjuk jelölni, ha ez a jelölés nem vezet félreértésre.

Megállapodunk abban, hogy ha R_i, L_j ós C_k rendre az R, L, és C halmaz elemei, úgy a megfelelő elemparamétereket az r_i, l_j ós c_k szimbólumok jelöljék.

Legyenek $\underline{R} \subseteq R$, $\underline{L} \subseteq L$ és $\underline{C} \subseteq C$ tetszőleges (esetleg üres) halmazok. Akkor mondjuk, hogy $M = \underline{R} \cup \underline{L} \cup \underline{C}$ a hálózat *mag*ja, ha $U \cup M \cup A$ és $U \cup M \cup B$ a hálózat gráfjának egyaránt kifeszítő fája. Az $\underline{R} \cup \underline{L}$ magot a hálózat *induktív*, az $\underline{R} \cup \underline{C}$ magot pedig *kapacitív mag*jának nevezzük.

Jelölje $\bar{L}$ az $\underline{L}$ halmaz (L-re vonatkozó) komplementerét. Az M mag $\delta(M)$ *fokszámán* a $|\bar{L}| + |\underline{C}|$ számot értjük. Világos, hogy $0 \leq \delta(M) \leq$

$\leqq |L|+|C|$, továbbá $\delta(M)=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha M induktív mag, $\delta(M)=|L|+$ $+|C|$ pedig és csak akkor áll fenn, ha M kapacitív mag.

A hálózat M magját *maximális mag*nak nevezzük, ha fokszáma maximális, *minimális mag*nak, ha fokszáma minimális. Speciálisan a kapacitív mag mindig maximális, az induktív mag mindig minimális.

Tekintsük a hálózat összes magjainak $\mathcal{M}$ halmazát. Osztályozzuk $\mathcal{M}$ elemeit a következő módon: két M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$ tartozzék egy osztályba, ha fokszámuk megegyezik. Akkor mondjuk, hogy a $\mathcal{M}(M) \subseteq \mathcal{M}$ halmaz az *M mag által reprezentált osztály*, ha $M \in \mathcal{M}(M)$ teljesül. Az M magot *kitüntetett mag*nak nevezzük, ha az $\mathcal{M}(M)$ osztály pontosan egyelemű.

Legyen $M \in \mathcal{M}$. Az $U \cup M$ halmazt a hálózat M magjához tartozó fájának nevezzük. Ha M maximális, a hozzátartozó fa neve *normálfa*, ha minimális, *inverz normálfa*. A normálfa és inverz normálfa közös neve *extrémális fa*. Kapacitív maghoz tartozó fa *kapacitív fa*, induktív maghoz tartozó fa neve *induktív fa*. A kapacitív és induktív fa közös neve *reaktancia fa*. Végül a kitüntetett maghoz tartozó fa neve *kitüntetett fa*.

Vegyük észre, hogy $|A|=|B|=0$ esetén a hálózat RLC hálózattá redukálódik, és a magfüggvény definíciója miatt a hálózat normálfája az RLC hálózat klasszikus normálfája; így a nullátor-norátor páros hálózat normálfája az RLC hálózat normálfájának valóban általánosítása.

Vegyük észre, hogy a hálózat egy magja a feszültséggenerátorok rövidre zárása után a hálózatgráf közös k-fája, ahol $k=|A|+1=|B|+1$. Így hozzá előjelet rendelünk. Jelentse $\text{sgn}M$ az M maghoz az [5] szerint rendelt relatív előjelet.

$$f_M = \sum_{M_n \in \mathcal{M}(M)} \text{sgn}(M_n) \frac{\prod\limits_{C_k \in M_n} c_k}{\prod\limits_{R_i \in M_n} r_i \cdot \prod\limits_{L_j \in M_n} l_j}$$

kifejezést az *M mag által generált formulá*nak nevezzük, ahol a produktum képzés az M_n összes megfelelő elemére, az összegképzés pedig az $\mathcal{M}(M)$-et alkotó összes M_n magra vonatkozik. Világos, hogy a hálózat minden magja generál egy formulát, valamint, hogy ugyanahhoz az osztályhoz tartozó magok által generált formulák megegyeznek.

Az egyértelmű megoldhatóság tételei

1. tétel. Ha a nullátor-norátor páros RLC hálózat egyértelműen megoldható, akkor létezik $U \cup M$ normálfája. A hálózat komplexitásának rendje nem lehet nagyobb, mint az M fokszáma.

2. tétel. Tetszőleges (azaz határozatlan) paraméterű nullátor-norátor páros RLC hálózat akkor és csak akkor egyértelműen megoldható, ha létezik $U \cup M$ normálfája. A hálózat komplexitásának rendje pontosan M fokszáma. A normálfában szereplő kapacitások feszültségei és az abban nem szereplő induktivitások áramai az analízis lefolytatásához a független állapotváltozók egy (lehetséges) teljes rendszerét szolgáltatják.

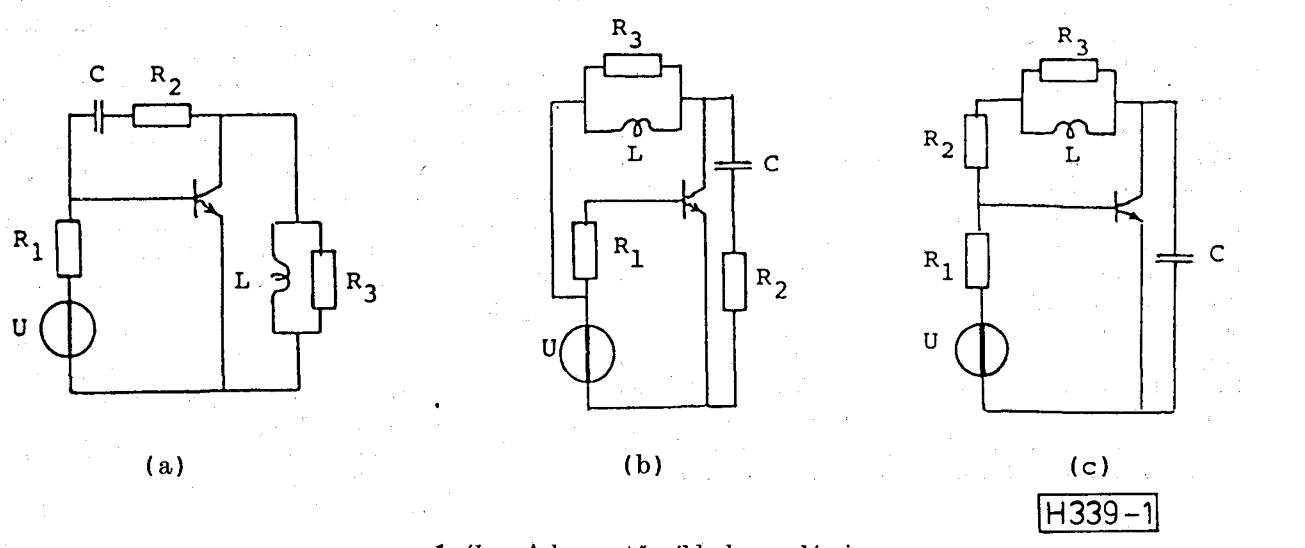
3. tétel. A nullátor-norátor páros RLC hálózat akkor és csak akkor egyértelműen megoldható, ha létezik olyan M magja, amely által generált f_M formula zérustól különböző.

Speciálisan: (a) a hálózat egyértelműen megoldható, ha létezik kitüntetett fája (ez lehet pl. egyetlen fa, vagy egyetlen egyféle extrémális vagy reaktáns fa);

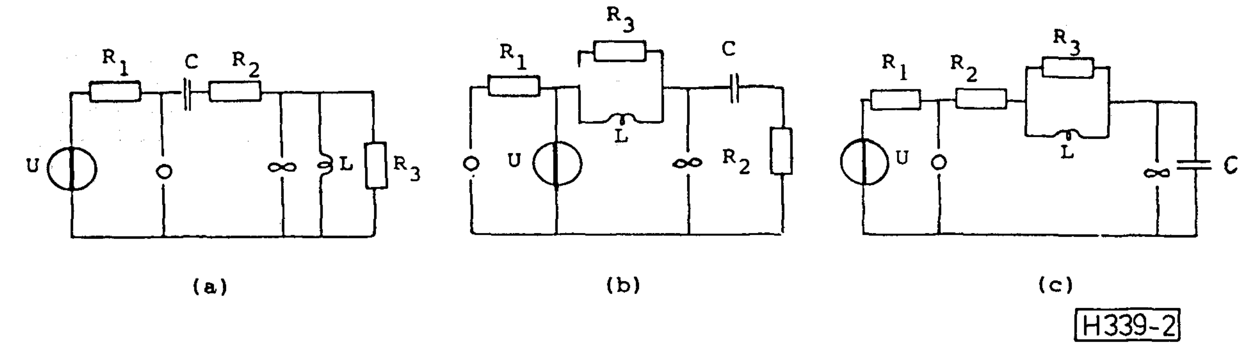
(b) RLC hálózat akkor és csak akkor megoldható, ha létezik magja.

E tételek birtokában az 1. ábrán látható kapcsolások egyértelmű megoldhatósága igen könnyen diszkutálható. A 2. ábra rendre szemlélteti a kapcsolások nullátor-norátor páros modelljét.

Az (a) kapcsolás modelljében a hálózatnak $\{R_2, C\}$ egyetlen magja, így $\{U, R_2, C\}$ egyetlen kapacitív fa, a 3. tétel folytán az egyértelmű megoldhatóság teljesül. $\delta(\{R_2, C\})=2$ folytán a hálózat komplexitásának rendje legfeljebb 2, jelen esetben pontosan 2. Mivel pedig $\{U, R_2, C\}$



1. ábra. A bevezető példa kapcsolásai



2. ábra. A kapcsolások nullátor-norátor páros modellje

egyben normálfa is, lehetséges az állapotváltozóknak a bevezetésben említett megválasztása.

A (*b*) kapcsolás modelljének nincsen magja, így az 1. tétel folytán a hálózat egyértelműen nem megoldható.

A (c) kapcsolás modelljének összesen két magja van: $\{R_3, R_2\}$ és $\{L, R_2\}$; az utóbbi egyetlen induktív mag, így $\{U, L, R_2\}$ a hálózat egyetlen induktív fája, következésképp a hálózat egyértelműen megoldható. $\delta(\{R_3, R_2\})=1$ folytán a komplexitás rendje 1-nél nem lehet nagyobb, jelenleg pontosan 1. Végül mivel $\{U, R_3, R_2\}$ normálfa, lehetséges az analízis számára az állapotváltozó bevezetésben említett megválasztása.

Topológiai következmények

Hálózatanalízisnél gyakran hasznosak az alábbi az 1. tételből következő tulajdonságok:

Ha a nullátor-norátor páros *RLC* hálózat egyértelműen megoldható, akkor a hálózatgráfban:

(*a*) $U \cup A$ és $U \cup B$ halmazok egyszerre körmentesek;
$I \cup A$ és $I \cup B$ halmazok egyszerre vágatmentesek.

Megjegyezzük, hogy ez a tulajdonság reláció elemet tartalmazó nullátor-norátor páros hálózatokra az [1]-ből is következik.

(*b*) Mindig létezik az $R \cup L \cup C$ halmaznak olyan M, $\overline{M}$ diszjunkt felbontása, amely lehetővé teszi a hálózat elemeinek az alábbi kétféle osztályozását:

I. $U \cup A \cup M$ elemei faágaknak, ugyanakkor $I \cup B \cup \overline{M}$ elemei kötőágaknak, és
II. $U \cup B \cup M$ elemei faágaknak, ugyanakkor $I \cup A \cup \overline{M}$ elemei kötőágaknak feleltethetők meg.

Azaz a kétféle osztályozás során ugyanazok az *RLC* elemek tekinthetők faágnak, ill. kötőágnak.

Ez utóbbi tulajdonság kihasználását találjuk [7]-ben a hálózatok egyenletrendszerének általános megoldásánál.

Megjegyezzük, hogy nullátor-norátor páros *PLC* hálózatok analízisénél az előző fejezetben ismertetett tételek a klasszikus hálózatanalízis szemléletét kissé módosítják. Klasszikus esetben ugyanis az analízis „fő eszköze" a hálózatgráf normálfája. A hálózatgráfnak ez a fontos részgráfja általános esetben a vizsgálathoz elegendő a 2. tétel szerint. Speciális esetben azonban, ha a hálózat elemeinek paraméterei között megkötés van, előtérbe kerül az inverz normálfa, a kitüntetett fa és a reaktáns fa. Erre vonatkozóan konkrét példákat fogunk mutatni az alkalmazás fejezetben.

A tételek bizonyítása

Először bizonyítjuk, hogy a nullátor-norátor páros *RLC* hálózatban egyértelmű megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy a hálózatnak létezzék magja. Evégből legyenek $\underline{L} \subseteq L$ és $\underline{C} \subseteq C$ tetszőleges (esetleg üres) halmazok. Vezessük be a hálózat elemeinek halmazára a következő jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
D &= U \cup \underline{L} \cup \underline{C} \\
H &= I \cup \overline{\underline{L}} \cup \overline{\underline{C}} \\
E &= H \cup B \\
F &= D \cup B
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ahol „$^-$" megfelelő komplementer halmazokat jelöl.

Írjuk ezután a hálózategyenletek rendszerét a következő formában:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} D^u & E^u & A^u & R^u & R^i & A^i & F^i & H^i \end{array} \\
N & \left[\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{4}{c}{\mathbf{B}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{4}{c}{\mathbf{Q}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}^{-1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} u_D \\ u_E \\ u_A \\ i_R \\ i_R \\ i_A \\ i_F \\ i_H \end{bmatrix} = 0
\qquad (2)
$$

(2)-ben u_D, u_E, u_A és u_R az (1)-ben definiált továbbá A és R halmazok megfelelő elemeinek feszültségéből, i_R, i_A, i_F és i_H pedig az áramokból alkotott vektorok, B és Q a hálózatgráf ugyanazon fundamentális fáján alapuló (összetartozó) kör illetve vágatmátrixok, R pedig az ohmos ellenállások paramétereiből alkotott diagonálmátrix. N a (2) mátrixának jelölés szerinti részmátrixát, a fejlécen feltüntetett D^u, E^u, A^u, R^u, R^i, A^i, F^i és H^i pedig rendre a mátrix oszlopainak szimbólumai. E szimbólumokat értelemszerűen használjuk B, Q és N (rész)mátrixok oszlopainak jelölésére is.

Jelentse továbbá $\mu(B)$, $\mu(Q)$ és $\mu(N)$ a megfelelő mátrixok mátrix-matroidját. Akkor B és Q összetartozása miatt

$$
\mu^*(B) = \mu(Q) \qquad (3)
$$

nyilvánvalóan teljesül, ahol a „*” a duális matroid jele.

Bevezetve a $b = E^u \cup A^u \cup R^u \cup R^i \cup A^i \cup F^i$ jelölést, [1] szerint, léteznek olyan $L \subseteq L$ és $C \subseteq C$ (esetleg üres) halmazok, amelyekre b bázisa a

$$((G^u, \mu(B)) \otimes (G^i, \mu(Q)) V (G^u \cup G^i, \mu(N)) \qquad (4)$$

matriodnak. (4)-ben G^u a B, G^i a Q, $G^u \cup G^i$ pedig az N mátrix oszlopainak jole, W matroidok direkt összegét, V pedig matroidok összegét jelöli. A továbbiakban feltesszük, hogy (2) ilyen L és C halmazokra vonatkozik.

B, Q és N mátrixok definíciója folytán b-nek létezik (legalább egy) olyan b'_1, b''_1, b_2 diszjunkt felbontása, amelyre teljesül:

$$\begin{aligned} &b'_1 \text{ bázis } (G^u, \mu(B))\text{-ben,} \\ &b''_1 \text{ bázis } (G^i, \mu(Q))\text{-ban, és} \\ &b_2 \text{ bázis } (G^u \cup G^i, \mu(N))\text{-ben.} \end{aligned} \qquad (5)$$

(2)-ből látszik, hogy $(G^u \cup G^i, \mu(N))$ grafikus matroid, amelynek képe a 3. ábrán szemléltethető.

Definiáljuk ezután az ohmos ellenállások egy R részhalmazát a következőképpen:

$$R = \{R_j \mid B^u_j \in b_2 \cup R^u,\ B_j \in B\} \qquad (6)$$

(6)-ból és a 3. ábrából tüstén következik:

$$b_2 = R^u \cup \bar{R}^i \cup A^u \cup A^i$$

ahonnét (5) és (2) tekintetbe vételével

$$b'_1 = \bar{R}^u \cup E^u \text{ és } b''_1 = B^i \cup F^i \qquad (7)$$

adódik. Azonban (1) figyelembe vételével (7) így írható:

$$b'_1 = \bar{R}^u \cup I^u \cup \bar{L}^u \cup \bar{C}^u \cup B^u$$

és

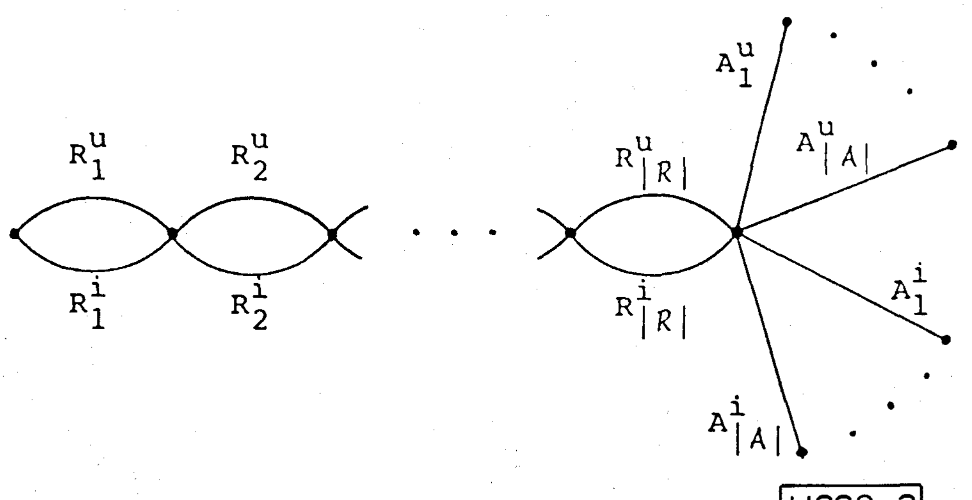
$$b''_1 = B^i \cup U^i \cup L^i \cup C^i \cup B^i \qquad (8)$$

Bevezetve az $M = R \cup L \cup C$ jelölést (8) jobboldala szerint $U \cup M \cup B$ a hálózatgráf kifeszítő fája, baloldala szerint $I \cup \bar{R} \cup \bar{L} \cup \bar{C} \cup B$ komplementer fája, azaz $U \cup M \cup A$ kifeszítő fája. Nyertük, hogy M a hálózatnak magja. Ezzel az 1. tételnek a normálfa létezésére vonatkozó állítását bebizonyítottuk. Az 1. tétel hálózat komplexitás rendjére vonatkozó állítása nyilvánvaló.

Figyeljük meg, hogy az 1. tétel bizonyítása közben az derült ki, hogy (2) egyenletrendszer determinánsának N mátrix sorai szerinti Laplace kifejtése során adódott egy zérustól különböző tag. Ez a tag éppen az M magban szereplő ohmos ellenállások paramétere reciprokainak (előjeles) szorzata. Innen adódik az a tény, hogy ha az áramköri elemek paraméterei határozatlanok, akkor (2) egyenletrendszer determinánsa legalább egytagú polinom, tehát lehetséges nullátor-norátor páros hálózatokra is az [1]-ben ismertetett „hibrid immittancia leírás”. Alkalmazva [1]-nek az „általános esetben” követett eljárását, felírhatók a hálózat állapotegyenletei a 2. tételben kimondott állapotváltozókkal, ezzel lényegében a 2. tétel bizonyítást nyert.

Amennyiben azonban a hálózat RLC elemeinek paraméterei nem tekinthetők határozatlanoknak (köztük létezik algebrai összefüggés), úgy a normálfa létezése az égyértelmű megoldhatóságot nem biztosítja. Mindenesetre (2) egyenletrendszer determinánsában mindenegyes mag eredményez egy tagot, a magban szereplő ohmos ellenállások paramétere reciprokainak szorzatát, és a determináns éppen az ilyen szorzatok algebrai összege. Ha ez zérustól különböző (és ez máris a paraméterek között egy algebrai megkötés), a hálózat még mindig nem biztos, hogy egyértelműen megoldható. Az egyértelmű megoldhatósághoz még annak is teljesülnie kell, hogy a „hibrid immittancia leírás” egyenletrendszere is megoldható legyen. Ez általában újabb megkötést jelent az elemparamóterek között, amelyben most már a kapacitások és induktivitások paraméterei is előfordulnak.

A 3. tétel bizonyításához tegyük fel, hogy a hálózatnak létezik olyan M magja, amely által generált f_M formula zérustól különbözik. Írjuk fe- a (2) egyenletrendszerek mellé még az induktivitál



3. ábra. A $\mu(N)$ matroid grafikus képe sokra és feszültségekre teljesülő differenciálegyenleteket

$$u_L = L\dot{i}_L$$
$$i_C = C\dot{u}_C \tag{9}$$

formában, ahol u_L, u_C valamint i_L, i_C az induktivitások és kapacitások feszültsége illetve árama, L az induktivitások, C pedig a kapacitások paramétereiből alkotott diagonál mátrixok (csatolt reaktanciák esetét kizártuk).

(2) ós (9) egyenletrendszereket (azaz a hálózat egyenletek teljes rendszerét) Laplace transzformálva könnyen belátható, hogy az egyenleteknek valamint B és Q mátrixok oszlopainak alkalmas permutálása után az áramok és a feszültségek Laplace transzformáltjaira a (2)-höz hasonló mátrixegyenlet írható fel, amelyben R^{-1} diagonálmátrix szerepét az y ugyancsak diagonálmátrix veszi át, amelynek elemei most az RLC elemek operátoros admittanciái. A kezdeti feltételek figyelembevétele azt eredményezi, hogy az így nyert Laplace transzformáltakra felírt egyenletrendszer baloldala általában nem zérus vektor. Az 1. tétel bizonyításánál látottak megismétlésével nyerjük, hogy ez utóbbi egyenletrendszer determinánsában a hálózat egy magja a magban szereplő operátoros admittanciák előjeles szorzatával szerepel. Pontosabban ha R_i, L_j és C_k elemek paramétere rendre r_i, l_j és c_k, akkor az $M = RULUC$ mag által generált tag a következő topológiai formulával adható meg:

$$\pm \frac{\prod\limits_{C_k \in M} c_k}{\prod\limits_{R_i \in M} r_i \cdot \prod\limits_{L_j \in M} l_j} s^{\delta(M) - |L|} \tag{10}$$

ahol „s" a komplex frekvencia jele.

Az okoskodást az M mag által reprezentált $M(M)$ magosztály minden M_n elemére megismételve és figyelembe véve, hogy $\delta(M_n) = \delta(M)$ nyerjük, hogy az egyenletrendszer determinánsában a $\delta(M) - |L|$ fokszámú tag együtthatója

$$\sum_{M_n \in M(M)} \pm \frac{\prod\limits_{C_k \in M_n} c_k}{\prod\limits_{R_i \in M_n} r_i \cdot \prod\limits_{L_j \in M_n} l_j} \tag{11}$$

ahol az egyes tagok előjelét B illetve Q mátrixok megfelelő fődeterminánsainak értéke dönti el.

Rögzítsük (11)-ben a tagok előjelét $\mathrm{sgn}(M_n)$ értékének megfelelően. Akkor (11) egyrészt megegyezik f_M kifejezéssel, másrészt [5] folytán a hálózat csomóponti egyenletrendszer determinánsa $(\delta(M) - |L|)$-ed fokú tagjának együtthatójától legfeljebb előjelben térhet el, így a hálózat csomóponti potenciáljainak Laplace transzformáltja egyértelműen előállítható. De akkor a hálózat összes elemének feszültsége, sőt az R, L ós C elemek árama is egyértelműen meghatározott. Végül figyelembe véve, hogy $UUMUB$ a hálózatgráf kifeszítő fája, a feszültséggenerátorok és a norátorok árama is egyértelmű. Ezzel a 3. tétel feltételének elegendőségét igazoltuk. A feltétel szükségessége abból adódik, hogy a (2)-beli hálózategyenletrendszer és a csomóponti potenciálok egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága egyszerre áll fenn.

A tétel (*a*) speciális esete azért igaz, mert most (11) egytagú, a (*b*) eset pedig abból következik, hogy RLC hálózatoknál a közös k-fák [5] szerinti relatív előjele azonos.

Megjegyezzük, hogy a 3. tétel bizonyításánál hallgatólagosan feltételeztük, hogy a hálózatban szereplő összes feszültséggenerátor a csomóponti potenciálok meghatározásánál Thevenin generátornak tekinthető. Ez a gyakorlati analízis számára nem jelent megkötést. Amennyiben valamelyik feszültséggenerátor mégsem tekinthető Thevenin generátornak, úgy a hálózatot egészítsük ki egy feszültséggenerátorral sorbakötött r_0 paraméterű ohmos ellenállással. Ezután az eljárást folytassuk le az így keigészített hálózatmodellre. A kapott $f_M = 0$ feltételben $r_0 \to 0$ határátmenet figyelembe vétele után az egyértelműség megoldhatóság elegendő feltételét nyerhetjük.

Vegyük észre, hogy a 3. tétel folytán számos, az egyértelmű megoldhatóságot biztosító topológiai formula képezhető. Pontosan annyi, amennyi a magosztályok száma. Így konkrét analízis esetén lehetőség nyílik elegendő feltételek közül a legpraktikusabbat (pl. legrövidebbet, vagy legkönnyebben ellenőrizhetőt) előállítani. Erre a körülményre a példák során rá fogunk világítani.

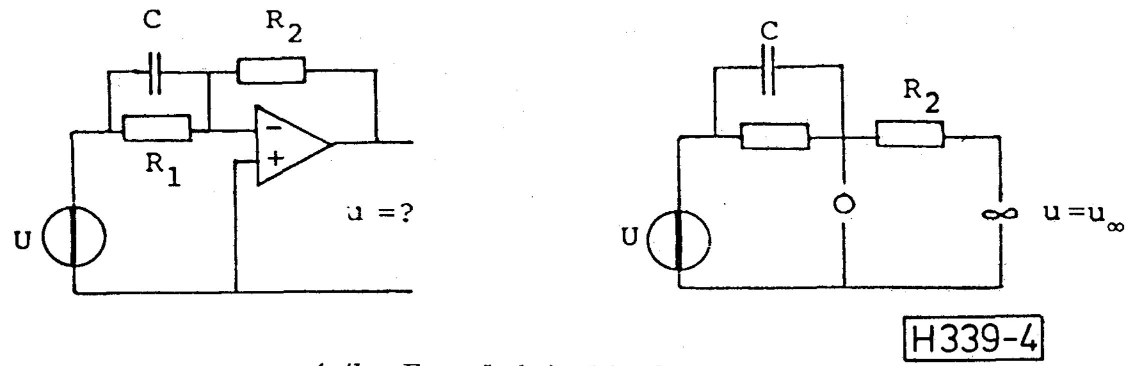
Alkalmazás

1. példa. Tekintsük a 4. ábrán látható, egy ideális műveleti erősítős kapcsolást. A kapcsolás nullátor-norátor páros hálózatmodellje ugyancsak az ábrán szemlélhető. A modellből azonnal látszik, hogy a hálózatnak egyetlen magja van (az R_2 ohmos ellenállás), így a hálózat triviálisan egyértelműen megoldható.

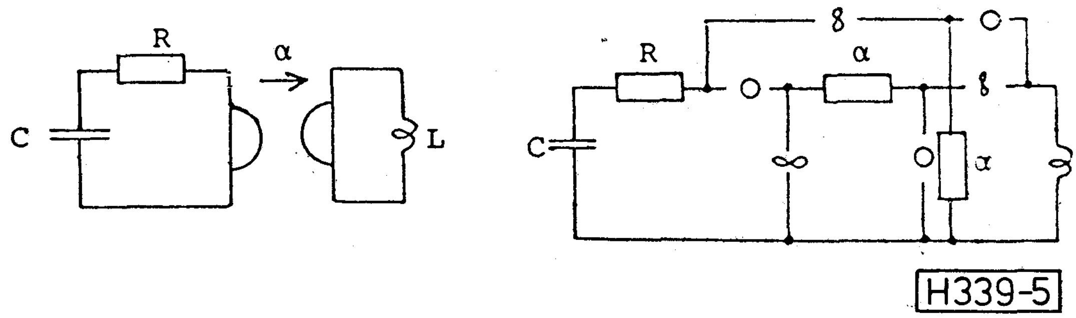
2. ábra. Zárjuk le az α ellenállású girátort primer oldalán soros RC taggal, szekunder oldalán L induktivitással az 5. ábra baloldala szerint. Feltételezve, hogy a lezárás pillanatában a kapacitás feszültsége zérustól különbözik, az induktivitásban áram ébred (bekapcsolási jelenség!). Egyértelmű-e az induktivitás árama?

A kapcsolás hálózatmodellje ([7]) az ábra jobb oldalán található. Mivel a hálózat pontjainak száma 7, a nullátor-norátor párok száma pedig 3, így a hálózat magja 3 elemű. A hálózatnak kapacitív magjában nem szerepelhet R, tehát az egyetlen kapacitív mag csak $\{C, \alpha, a\}$ lehet. Az ábrából ellenőrizhető, hogy ez tényleg mag. Következésképp a hálózat egyértelműen megoldható.

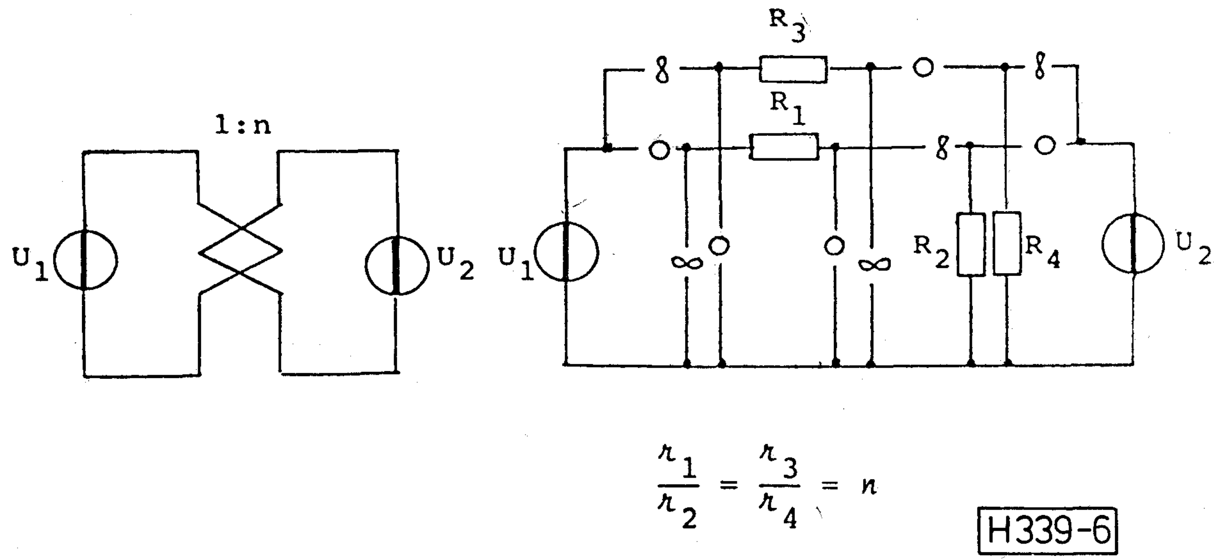
3. példa. A 6. ábrán mindkét oldalán feszültségforrással lezárt ideális transzformátort és annak [7]-beli hálózatmodelljét látjuk. A hálózat biztosan



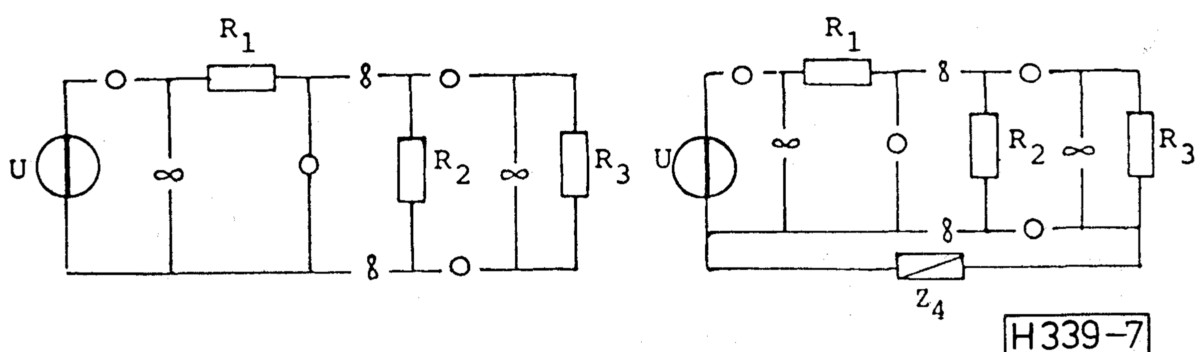
4. ábra. Egy műveleti erősítős kapcsolás



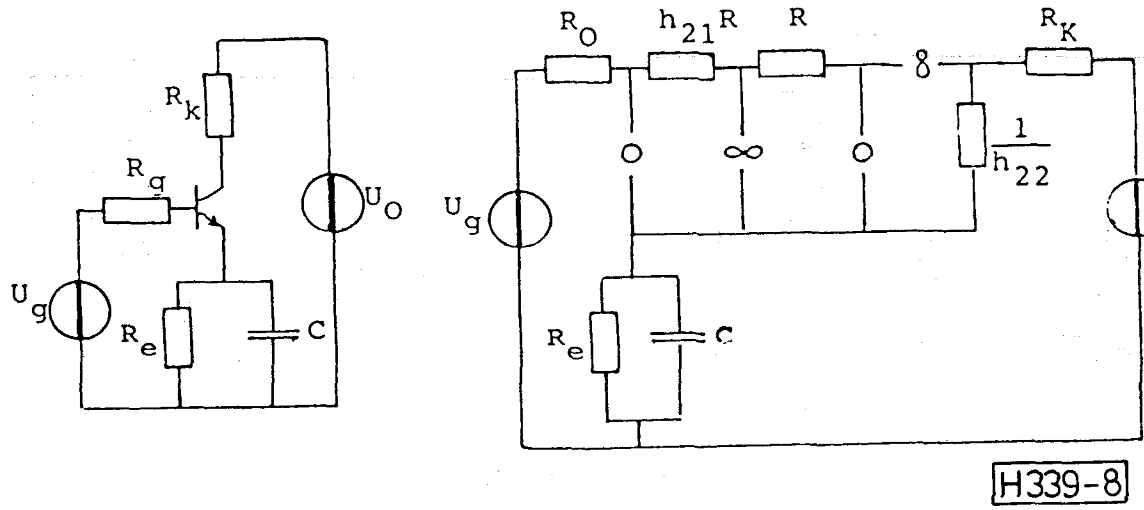
5. ábra. Girátoros példa



6. ábra. Feszültséggenerátorokkal lezárt ideális transzformátor



7. ábra. Átmenő földes vezérelt generátor



8. ábra. Tranzisztoros erősítő

nem egyértelműen megoldható, mivel mag számára egyik ohmos ellenállás sem választható. Ha viszont a szekunder oldal lezárására áramforrás, az egyértelmű megoldhatóságot az egyetlen $\{R_2, R_4\}$ mag létezése biztosítja. A feladat egyébként a hálózatanalízis klasszikus példájának számít. Az viszont már nem triviális, hogy a diszkusszióban az ideális transzformátor paramétereire vonatkozó megkötés nem játszik szerepet, és hogy a kapott eredmény általánosítható például negatív impedancia konverterre is.

4. példa. A 7. ábra baloldalán látható hálózatmodell egyértelműen nem megoldható, mert benne norátorok (és nullátorok) egy halmaza vágatot alkot. Az analízisből kiderül, hogy a vágatot alkotó norátorok feszültsége határozatlan, de összege mindig $U \cdot R_2/R_1$. A többi elem feszültsége és az összes elem árama azonban egyértelmű. Egyértelműen megoldható hálózathoz jutunk további Z_4 áramköri elem felvételével az ábra jobboldala szerinti kiegészítéssel, ahol Z_4 tetszőleges ohmos ellenállás, induktivitás vagy kapacitás. Ugyanis most a hálózatmodell egyetlen magja az $\{R_2, Z_4\}$. A 7. ábra baloldali hálózata az irodalomban átmenő föld nélküli vezérelt generátort modellez [2].

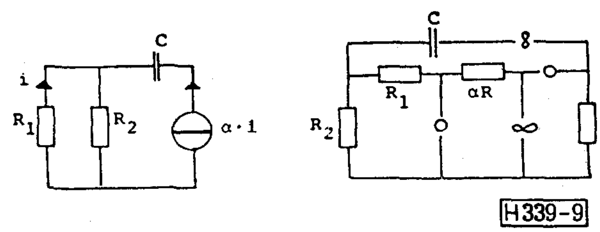
5. példa. A 8. ábra baloldala egy tranzisztoros erősítő kapcsolást mutat. Figyelembe véve a tranzisztor hibrid paraméteres helyettesítő képét, $h_{12}=0$ feltételezéssel élve az ábra jobboldalán a kapcsolás nullátor-norátor páros modelljét látjuk, amelyben $R_0=R_g+h_{11}$ [7].

A hálózatmodellnek nincs kitüntetett fája. Könnyű azonban előállítani kapacitív magjait. Mivel a mag elemeinek száma 3, és C mellett a magnak nem lehet eleme R_e és R_0, így a mag két hiányzó eleme $h_{21}R$, R, R_k és $\frac{1}{h_{22}}$ közül választhat De $(R,\ R_k)$ és $\left(R, \frac{1}{h_{22}}\right)$ a norátorok, $(R,\ h_{21}R)$ a nullátorok, végül $\left(R_k, \frac{1}{h_{22}}\right)$ az U_0 feszültséggenerátor helyzete miatt nem jöhet számításba. A lehetséges magok tehát $\{C,\ h_{21}R,\ R_k\}$ és $\left\{C, h_{21}R, \frac{1}{h_{22}}\right\}$. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ezek valóban magok is. E két mag magosztályt alkot. Az általuk generált formula:

$$\frac{C}{h_{21}RR_k}+\frac{Ch_{22}}{h_{21}R};$$

azaz az egyértelmű megoldhatóságnak elegendő feltétele az $1+h_{22}R_k \neq 0$ kikötés.

6. példa. A 9. ábra baloldalán egy áramvezérelt áramgenerátort tartalmazó kapcsolást látunk. Az ábra jobb oldalán megrajzoltuk annak nullátor-norátor páros [7] szerinti hálózatmodelljét.



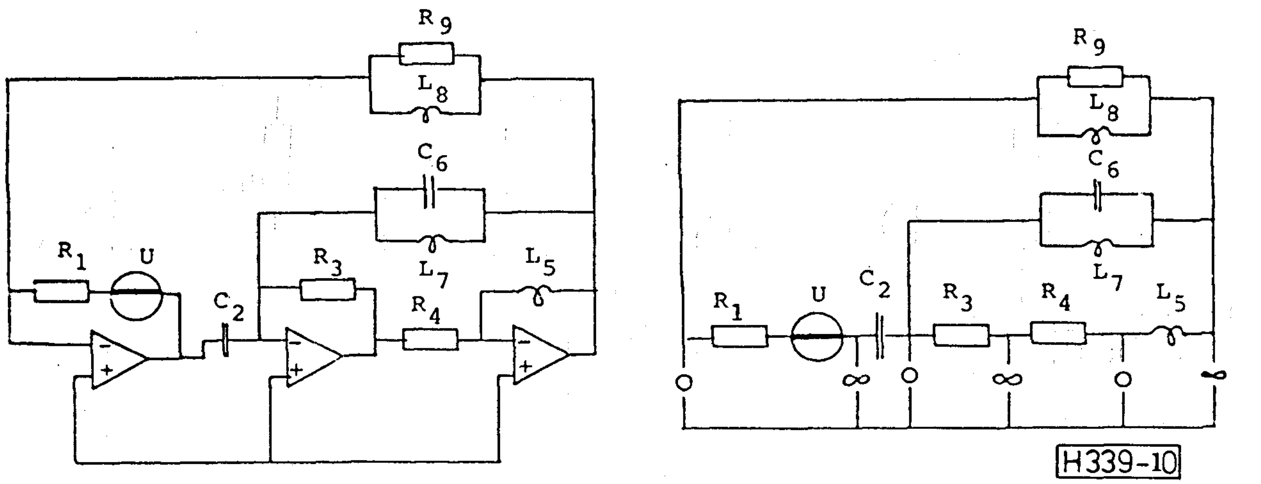
9. ábra. Vezérelt generátoros kapcsolás

Mivel a hálózatmodellben szereplő kapacitás egy norátor elemhez csatlakozik, így, a hálózat magjának a C elemet tartalmaznia kell. A négy ohmos ellenállás közül elvileg 6 pár választható ki mag további elemeként, de (R_1, R_2) és $(R, \alpha R)$ a nullátorok, (R_2, R) pár pedig egy norátor helyzete miatt nem jöhet számításba. Tehát a lehetséges magok $\{R_1, R, C\}$, $\{R_1, \alpha R, C\}$, $\{R_2, \alpha R, C\}$ és ezek valóban azok is. Így az egyértelmű megoldhatóság szükséges feltétele teljesül. Mivel mindhárom mag egy osztályba tartozik, így a megoldhatóságnak az

$$-\frac{C}{R_1R_2}+\frac{C}{R_1\alpha R}+\frac{C}{R_2\alpha R}\neq 0$$

elegendő feltétele; azaz a hálózat biztosan megoldható, hacsak

$$\alpha=1+\frac{R_1}{R_2}$$



10. ábra. Három műveleti erősítős példa

nem áll fenn. Jelen esetben ez a feltétel az egyértelmű megoldhatósághoz szükséges is, mert a három kapacitív mag egyben a hálózatnak összes magja [6].

7. példa. Tekintsük a 10. ábrán látható, három ideális műveleti erősítőt tartalmazó kapcsolást a nullátor-norátor páros hálózatmodelljével együtt. Mivel a hálózat mag elemeinek száma három, és a degenerált elemek helyzete miatt nem létezhet olyan mag, amely vagy két kapacitást vagy két induktivitást tartalmaz, a magfüggvény értéke 2, 3, vagy 4 lehet. csupán. Vizsgáljuk meg a $\delta=3$ értékhez tartozó osztály magjait. Ilyen mag vagy tiszta ohmos ellenállásból áll, vagy „vegyes", azaz kapacitást, induktivitást és ohmos ellenállást egyaránt tartalmaz. Az első eset kizárt, mert a mag a norátorok miatt nem tartalmazhatja egyszerre R_1-et és R_9-et, a nullátorok miatt pedig R_3-at és R_4-et. Maradt a „vegyes eset". C_6 nem lehet magelem, mert mellé egyik induktivitás sem választható. C_2 mellé az ohmos ellenállások közül nullátorok miatt R_1, norátorok miatt R_3 nem választható. De nem választható R_9 sem, mert a (C_2, R_9)-párhoz magelemként egyik induktivitás sem társítható. Egyetlen szóba jöhető mag csupán a $\{C_2, R_4, L_8\}$, és ez valóban az is, egyben kitüntetett mag. Ezért a hálózat egyértelmű megoldhatósága garantált.

Számítógépes implementáció

Az előző fejezetben bemutatott példák azt a meglepő tényt szemléltetik, hogy egy hálózat egyértelmű megoldhatóságának vizsgálata viszonylag bonyolultabb struktúra esetén is tisztán logikai úton lefolytatható. Természetesen más, még bonyolultabb hálózatok esetén ez a logikai vizsgálat igen nehézkes, áttekinthetetlen lehet. Problémát okoz már annak eldöntése is, hogy a hálózatnak van-e magja; még inkább probléma a hálózatanalízis számára a normálfa kiválasztása.

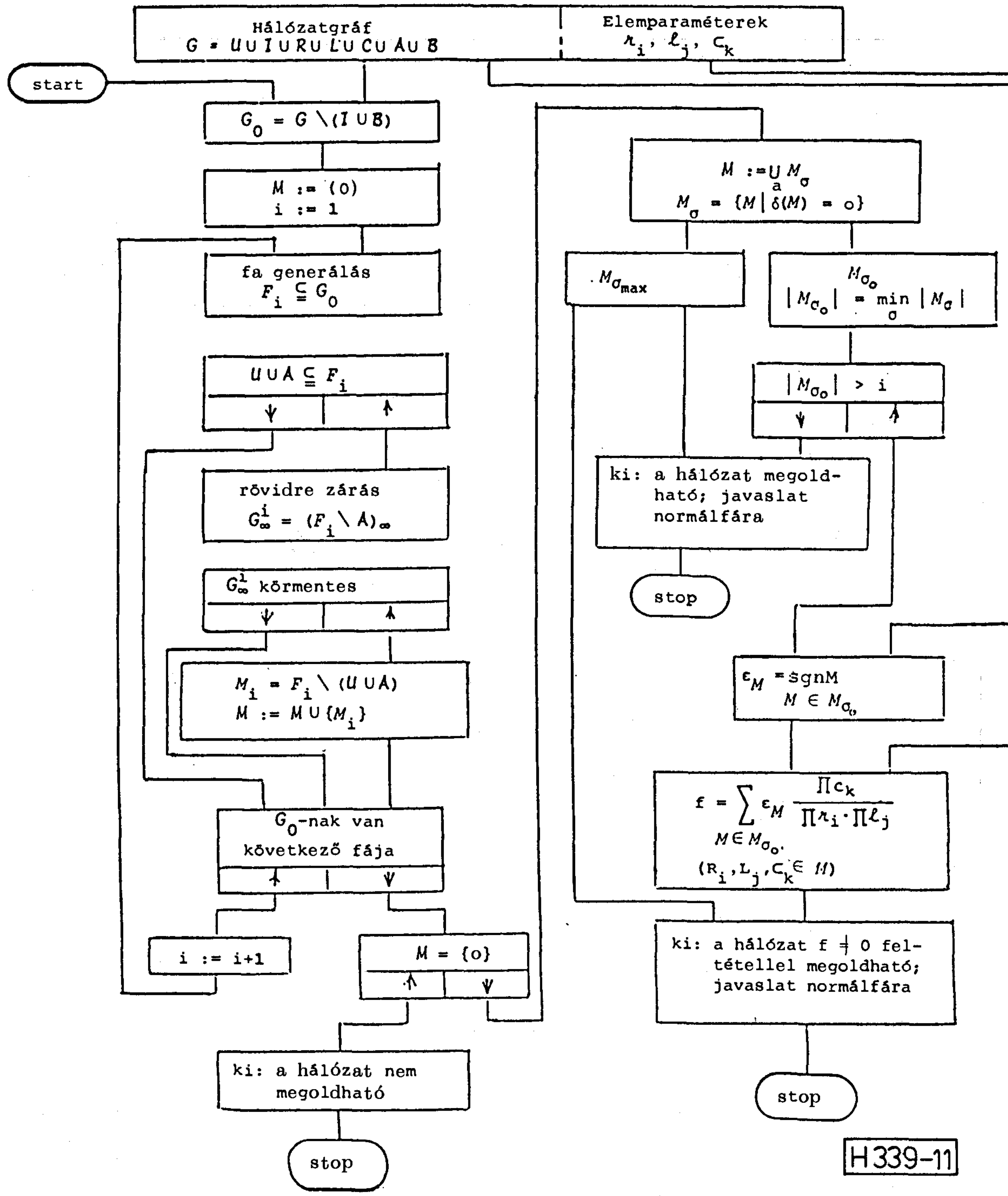
Az egyértelmű megoldhatóság vizsgálata alapjában véve kombinatorikus eljárás; lefolytatásához ajánlható a 11. ábrán látható blokksémára épített komplex számítógépes program. E program elsősorban azt dönti el, hogy a megoldhatóság szükséges feltétele teljesül-e. Ha igen, kell-e a paraméterek között valamilyen összefüggésnek teljesülnie az egyértelmű megoldhatósághoz. Ha igen, úgy a program generál egy, a megoldhatósághoz elegendő numerikus feltételt. „Megoldható esetben" a normálfa választására ajánlás születik a numerikus analízis lefolytatásához.

A hálózat magját „fa generálás" útján keressük. Ennek a blokknak implementálására alkalmas eljárás [4]-ben található. Első részében a program hálózatgráfnak kifeszítő nullátorfáit keresi meg (F_i). Ilyen fa maghoz vezet, ha belőle a nullátorélek elhagyása és a norátorélek rövidzárása után nyert G^i_∞ gráf körmentes. Az eljárás a 11. ábra bal felén követhető.

A 11. ábra jobb fele összefoglalja a további vizsgálatokat. Nevezetesen az így generált magok halmazát a magfüggvény értékei szerint osztályozza. Majd egyrészt keresi a maximális függvényértékhez tartozó magot (a normálfa választásnak ajánlásához), másrészt a minimális elemet tartalmazó magosztályt (M_{σ_0}). Ez utóbbi elemeihez relatív előjelet számol. Erre alkalmas topológiai módszer pl. [5]-ben található. A relatív előjelek birtokában előállított „f" formula zérustól különböző volta a megoldhatóságnak egy elegendő feltétele. Természetesen elegendő feltétel generálható volna bármelyik M_σ elemeiből; a jelen program végrehajtása során tulajdonképpen az egyik „legrövidebb formula" adódik. A feltétel ellenőrzése nem a program feladata, ez konkrét esetben külön numerikus eljárást kíván. A feltétel teljesülése esetén a hálózat numerikus megoldásához a program most is ajánl normálfát.

Amennyiben a program által generált legrövidebb feltétel nem teljesülne, úgy lehetséges a program olyan kiegészítése, amelynek segítségével további elegendő feltételek lennének generálhatóak.

Vegyük észre, hogy a 11. ábra blokksémája numerikus adatokat csak a program végén „igényel" (a feltétel generálásához), azaz az így szer-



11. *ábra.* Blokkséma a számítógépes implementációhoz

vezett számítógépes program tisztán topológiai, ezért alkalmazása a áhlózatanalízis numerikus lefolytatása előtt javasolt.

IRODALOM

[1] *Braunling, D. R.:* Analysis and synthesis of electrical networks eontaining nullators and norators; disszertáció, The University of Wiscosin, 1971.

[2] *Hollós E.:* Nullátort és norátort tartalmazó kótkapu modellek, Híradástechnika XXXIII. óvf. 11. szám, 493—496 (1982).

[3] *Mark, S. K., Swany, M. N. S.:* The generalized tree for state variables in linear active networks; Int. J. Cir. Theor. Appl. *4*, 87 (1976).

[4] *Pávó, I.:* Generation of the k-trees of a graph. Acta Cyb. Tom. 1, Fasc. 2, Szeged, 57—68 (1971).

[5] *Pávó, I.:* The sign of a k-tree in the nullator-norator pairs network; 26. IWK, TH. Iimenau, 59—62 (1981).

[6] *Recski, A.:* Unique solvability and order of complexity for linear networks eontaining memoryless n-ports, CT. and Appl., Vol. 7, 31—42 (1979).

[7] *Vágó I.:* A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1976.