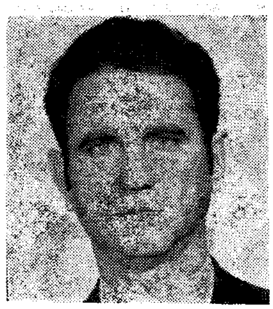
A diszkrét konvolúció alkalmazásáról

DR. KERPÁN ISTVÁN
Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola



DR. KERPÁN ISTVÁN

A Budapesti Műszaki Egyetemen 1958-ban villamosmérnöki oklevelet, 1966-ban átviteltechnikai szakmérnöki oklevelet, 1970-ben pedig műszaki doktori címet szerzett. Hat éven át volt a BHG Híradástechnikai Vállalat mérnöke, majd tanári kinevezést kapott a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolára, ahol hosszabb ideig a Vezetékes Híradástechnikai Tanszék vezetője volt. Jelenleg a Híradásipari Intézet igazgatója. Szakmai munkásságának főbb területei: a légnedvességgel összefüggő technológiai és konstrukciós kérdések: vizsgálati technológiák és eszközök: a jel- és információelmélet egyes kérdései. Egy találmánynak, több főiskolai jegyzetnek, mintegy kéttucat szakcikknek, számos publikációnak a szerzője, ill. társszerzője.

ÖSSZEFOGLALÁS

A közlemény, gyakorlati szempontokat követve, a diszkrét konvolúció (a) egyértelműségének és (b) kiszámíthatóságának a problémáihoz kapcsolódik: (*a*)-hoz két, a híradástechnika számára is érdekes modelljének a bemutatásával, (b)-hez (a függelékben található) alkalmazási segédletekkel.

Bevezetés

A híradástechnikában (is) számos gyakorlati feladatban felmerül a konvulenciószámítás (kon lució, dekonvolució) alkalmazása. Rendszerint (és hagyományosan) ezt mégis kikerülik. Bizonyára azért, mert „...dekonvoluciót...végrehajtani... nem mindig egyértelmű, és végrehajtása körülményes is..." (Ld. [1], 1007. old.)

A „körülményesség" problémáján a gépi számításokra alkalmas numerikus módszerek használatával segíthetünk. A konvolucióval kapcsolatban a gyors Fourier tranformációról (FFT), mint a diszkrét Fourier transzformáció (DFT) „gazdaságos" algoritmusáról kell elsősorban említést tennünk. Ezzel számos közlemény foglalkozott. (Szerzőtől ld. [2].) Az FFT és alkalmazásia iránt mélyebb érdeklődésű gyakorlati szakembereknek ajánljuk [3]-t, ami a szerző munkáját is sokban segítette.

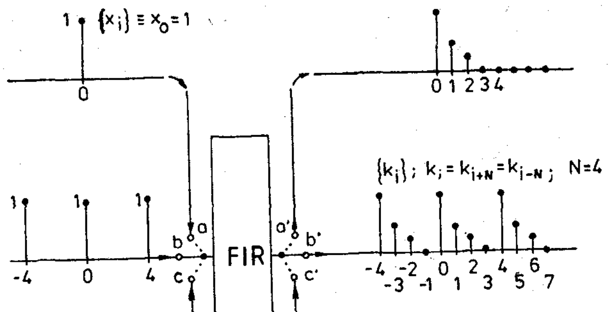
A „nem mindig egyértelmű" problémáját kellő körültekintéssel általában megoldhatjuk. Ennek bemutatása és segítése ennek az írásnak a fő célja.

Témánk tárgyalása során megkísérlünk felvázolni egy, a kitűzött cél elérését szolgáló terminológiát; a diszkrét konvolúció több (egyenértékű) alakjából az adott feladathoz legjobban illeszkedőt választjuk; előtérbe állítjuk a dekonvoluciót, ehhez a konvolució mintáinak és a mérési eredményeknek a világos összerendelését, a dekonvolució eredményének értelmezését.

1. *Két, periodikus mintatorozat diszkrét konvolúciója* (Bevezetés a FIR szűrő példáján)

Az ún. véges impulzusválasztú szűrő — szokásos nevén: FIR szűrő — a diszkrét idejű (mintavett) jeleket feldolgozó eszközök egyik tipikus válfaja. Jelátviteli tulajdonságát jól jellemezhetjük az egységimpulzusra adott válaszimpulzusokkal (ld. 1. ábra, a FIR szűrő bemenetén/kimenetén lévő kapcsoló a/a' állásában). Itt jegyezzük meg, hogy az 1. ábrán a vízszintes tengelyek pontjaihoz rendelt számok a minták sorszámai. Az i. sorszámhoz egyben a $t=iT$ időpontot rendelhetjük, a minták nagysága (x_i, stb.) a jel iT időpontbeli intenzitását (pillanatértékét) jellemezheti. FIR szűrő egységimpulzusra adott válaszimpulzusainak száma véges — kisebb vagy egyenlő a megfelelően megválasztott véges N számnál.

Ha tetszés szerinti, N szerint periodikus mintasorozatra adott választ keressük, akkor jó szolgálatot tesz, ha előbb megállapítjuk: az N periodicitással megismételt egységimpulzusokra adott választ kapjuk, ha az egyetlen egységimpulzusra adott válaszimpulzusokat N szerinti periodicitással megismételgetjük. (Ld. 1. ábra, a kapcsolók b/b' állásában.) Nevezzük ezt a választ a FIR



1. ábra. Az $\{x_i\}$ és $\{k_i\}$ periódikus mintasorozatok $\{y_i\}$ konvolúciója FIR szűrő példáján

Beérkezett: 1987. V. 6. (#)

szűrő periódikus, mintavett súlyfüggvényének. Értékei a

$$\{k_i\},\ i=-\infty, \ldots, -(N-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots (N-1), \ldots, \infty$$

(i szerint) rendezett halmaz elemei. Periódikus volta azt jelenti, hogy

$$k_i = k_{i+N} = k_{i-N}$$
$$(i=-\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty)$$

tetszés szerinti i-re. S mert periódikus, egyetlen periódusának (pl. az egységimpulzus válasza k_0, $k_1 \ldots k_{N-1}$ értékeinek) az ismerete minden információt tartalmaz a

$$\{k_i\}$$

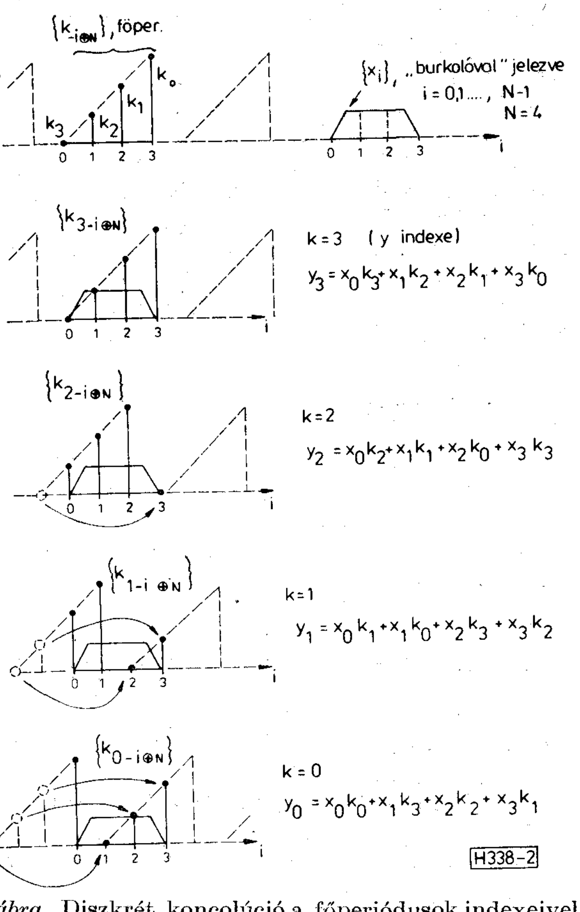
periódikus számsorozatról.

Az N szerint periódikus, egyébként tetszés szerinti $\{x_i\}$, $i=-\infty, \ldots, -N(-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (N-1), \ldots, \infty$

$(x_i = x_{i+N} = x_{i-N}$, bármely i-re)

mintasorozattal „gerjesztve" a FIR szűrőt, válaszként az $\{y_k\}$, $i=-\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty$ sorozatot kapjuk. (Ld. 1. ábra, a kapcsolók c/c' állása.) $y_k = y_{k+N} = y_{k-N}$ bármely k-ra, azaz $\{y_k\}$ is periódikus N szerint.

Bármelyik y_k kimenő minta (legfeljebb) N db bemenő minta hatására alakul ki. Ezek: x_k, $x_{k-1}, \ldots, x_{k-(N-1)}$. Ez abból következik, hogy — mint már kikötöttük — *egy* bemenő impulzusra legfeljebb N db (nem nulla értékű) kimenő impulzus a felelet. Így az aktuális kimenő minta szempontjából, az aktuális bemenő mintánál N-nél kisebb indexű minta és az ennél „még régebbiek"



2. ábra. Diszkrét koncolúció a főperiódusok indexeivel. Jelölés $+N=$„dodulo N" összegezés

már nem játszanak szerepet. (Ez az 1. ábrán megfigyelhető.)

Az y_k-t befolyásoló bármelyik x_i minta k_{k-i}-vel *súlyozva* vesz részt y_k értékében. ($\{k_i\}$ a *mintavételes súlyfüggvény.*)

Egy periódikus sorozat (mint már jeleztük) jellemezhető egyetlen periódusával. Válasszuk ki a 0, 1, ..., N—1 indexű mintákat tartalmazó periódusokat. Nevezzük ezeket „*főperiódusnak*". (Csupán a reájuk utalást megkönnyítendő!)

Adjuk meg $\{y_k\}$ főperiódusának a mintáit, majd kifejezéseiket hozzuk olyan alakra, amelyben $\{x_i\}$ főperiódusának a mintái szerepelnek. (Felhasználva az $x_i = x_{i+N} = x_{i-N}$; $k_i = k_{i+N} = k_{i-N}$ egyenlőségeket.)

$$y_0 = x_0k_0 + x_{-1}k_1 + x_{-2}k_2 + x_{-3}k_3 =$$
$$= x_0k_0 + x_1k_{-1} + x_2k_{-2} + x_3k_{-3}$$

$$y_1 = x_1k_0 + x_0k_1 + x_{-1}k_2 + x_{-2}k_3 =$$
$$= x_0k_1 + x_1k_0 + x_2k_{-1} + x_3k_{-2}$$

$$y_2 = x_2k_0 + x_1k_1 + x_0k_2 + x_{-1}k_3 =$$
$$= x_0k_2 + x_1k_1 + x_2k_0 + x_3k_{-1}$$

$$y_3 = x_3k_0 + x_2k_1 + x_1k_2 + x_0k_3 =$$
$$= x_0k_3 + x_1k_2 + x_2k_1 + x_3k_0$$

Fentieket tömörebb (általánnos) alakba kifejezve az (1) egyenlőségek első egyenlőségéhez jutunk:

1
$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i k_{k-i} = \sum_{i=0}^{N-1} x_{k-i} k_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} x_i k_{(N+k-i) \bmod N} \qquad (1)$$

(A k index értékei: 0,1,...,N—1)

A *másodi egyenlőséghez* hasonló úton jutunk, mint az elsőhöz, azzal a különbséggel, hogy most $\{k_i\}$ főperiódusának a mintáit szerepeltetjük a 0, 1, ..., N—1 „természetes rendben".

Végül a *harmadik egyenlőséget* is leszármaztathatjuk az elsőből, ha

a) bármely k_j helyébe k_{j+N} kerül, ami a $\{k_i\}$ mintasorozat N szerinti periodicitása alapján jogos, továbbá

b) a k súlyozó minták index-változóit $j=N+k-i$ értékről ezen szám „modulo N" kifejezésével helyettesítjük. Ez esetünkben csupán annyit jelent, hogy ha $j<N-1$, akkor marad a $j=N+k-i$ index, ha viszont $j\geqq N$, akkor $(j)_{\mathrm{mod}\,N}=j-N=k-i$ (mint eredetileg). Az eljárás jogosságát a 2. ábrán ellenőrizhetjük. U. o. láthatjuk, hogy az x_k értékek ilyen formában való megadása azt eredményezi, hogy a konvolúciót mind az $\{x_i\}$ periódikus mintasorozat, mind pedig a $\{k_i\}$ periódikus mintasorozat tekintetében csakis a főperiódus indexeit viselő mintákból állíthatjuk elő. Valójában a $\{k_i\}$ sorozat főperiódusának *ciklikus léptetéseit* végezzük (y_k kiszámításához k lépéssel). Innen a megnevezése: *„ciklikus konvolúció”*. (E megoldás a diszkrét konvolúció egyszerű grafikus áttekintését teszi lehetővé: mindig az adott i-hez tartozó x és k mintákat kell egymással összeszorozni, s a szorzatokat összegezni. Áttekinthetőbb ábrára törekedve nem a tényleges x_i értékeket tüntettük fel, csak jeleztük — az egyszerűsített, sematikus „burkolóval” —, hogy mely i indexek x_i értékeivel kell számolnunk.)

Ha egy $\{x_k\}$ periódikus mintasorozatot két másik, periódikus mintasorozatból, mint $\{x_i\}$ és $\{k_i\}$ az (1/a) összefüggés alapján származtatunk, akkor $\{y_k\}$-t $\{x_i\}$ és $\{k_i\}$ *diszkrét konvolúciójának (konvolúció szorzatának)* nevezzük, és tömörebb formában így jelöljük:

$$\{y_k\}=\{x_i\} * \{k_i\} \tag{1/a}$$

Tehát (1) és (1/a) *ugyanazt jelentik, más-más jelöléssel*$_1$

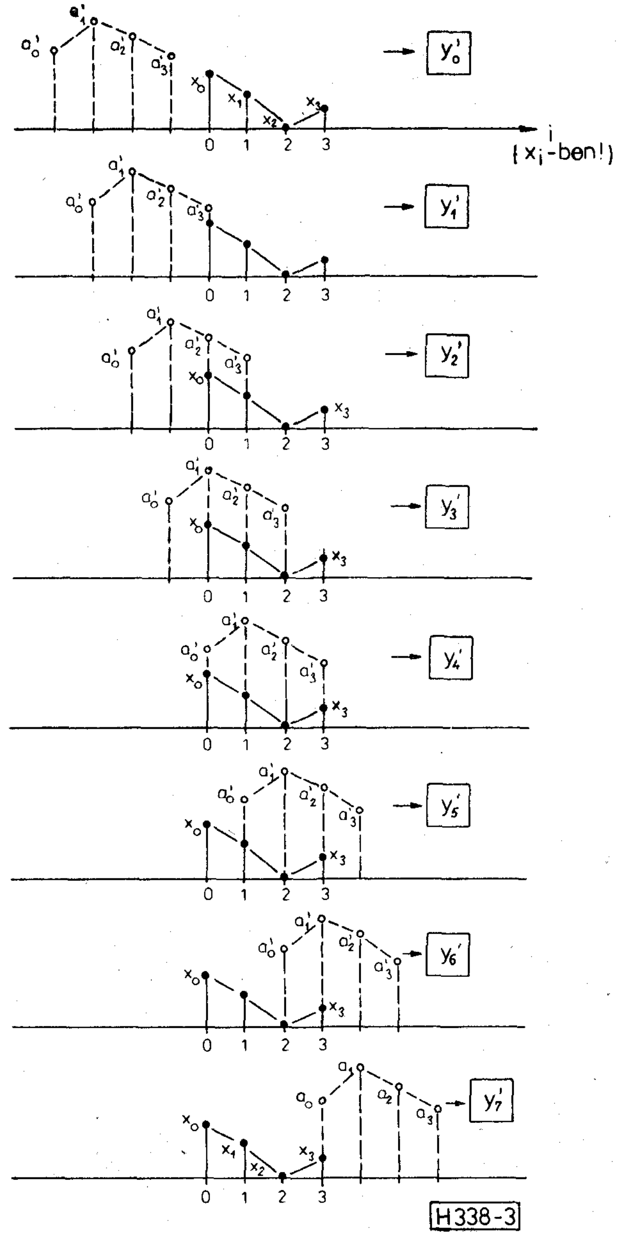
(1)-re a továbbiakban, mint a *diszkrét konvolúció „szabályos alakjaira”* fogunk hivatkozni. Azt a modellt, amelyen megfigyeléseket végezve, az $\{y_k\}$ megfigyelési eredmények (az N szerinti periodicitás ismeretében) *közvetlenül* a konvolúció eredményét szolgáltatják, nevezzük a *diszkrét konvolúció szabályos alakját szolgáltató modellnek.* Jellegzetessége ennek, hogy mindenegyes (y_k) megfigyelt értékhez $\{x_j\}$ és $\{k_j\}$ egy-egy teljes periódusának mindenegyes értéke (a megfelelő párosítású értékpárok szorzatával) hozzájárul. A diszkrét konvolúció *ilyen* modelljével összefüggésben fogunk egy súlyozó mintasorozatot, mint $\{k_i\}$ *mintavett súlyfüggvénynek* nevezni. (Később bemutatunk olyan modellt, is, amelyik nem rendelkezik fenti jellegzetességgel, s a rajta végzett megfigyelési eredmények *közvetlenül* nem szolgáltatják a konvolúció eredményét. Az ilyen modellben szerepet játszó súlyozó értékek összességét *„mintavett ablakfüggvénynek”* nevezzük. A *modell sajátosságára* utalva ezzel is.)

2. Nemperiódikus minták „szabályos alakú„ diszkrét konvolúciójának megkonstruálása „ablakfüggvénynyel” való letapogatás megfigyeléseiből

(Véges diszkrét spektrumú jel szelektív teljesítménymérésének a példáján.)

A **3.** ábrára hivatkozunk.

Az $\{x_i\}$ minták egy véges sávú, diszkrét spektrumú (de nem periódikus spektrumú) jel teljesítményeit képviselik a $(b+i\ f_0)$ frekvenciákon. A „b” alsó határfrekvenciát már megismertük, és a spektrum f_0 frekvenciaközeit is.



3. ábra. A szelektív teljesítménymérés modelljéhez

Az $\{a_j\}$ minták a hangolható, szelektív teljesítménymérő teljesítményátvitelének (kimenő teljesítmény/bemenő teljesítmény) az értékeit adják, meg, f_0 egész számú többszöröseinél, a $(c+j\ f_0)$ frekvenciákon, azaz mintavett alakban. A „c” értéket, s ezzel $\{a_j\}$ elemeinek frekvenciatengelymenti helyét hangolhatjuk (s a hangolószerv beállításáról le is olvashatjuk). (Ha egy adott beállításban a sávközép frekvencia, $f_s=c+s\ f_0$, ebből a „c” frekvencia megállapítható.

Ha a mérőműszer (frekvenciában folytonos és nem periódikus) teljesítményátvitelét egy diszkrét spektrumra állítjuk, akkor ezzel (mintegy automatikusan) a mintavett alakhoz, $[a'_j\}$-hez jutunk.

Az $\{a'_j\}$ minták (f_0 frekvenciaközű) léptetéseivel — mint egy változó áteresztőképességű „ablakkal” — letapogatjuk az $\{x_i\}$ mintákat.

A teljesítménymérő-mű (a hangolástól függően) különböző y'_k értékeket fog mutatni. Mint az a **3.** ábrából követhető:

összefüggéssel az

$$
\begin{aligned}
y'_0 &= x_0 a'_3 \\
y'_1 &= x_0 a'_2 + x_1 a'_3 \\
y' &= x_0 a'_1 + x_1 a'_2 + x_2 a'_3 \\
y'_3 &= x_0 a'_0 + x_1 a'_1 + x_2 a'_2 + x_3 a'_3 \\
y'_1 &= x_1 a'_0 + x_2 a'_1 + x_3 a'_2 \\
y'_6 &= x_2 a'_0 + x_3 a'_1 \\
y'_6 &= x_3 a'_0 \\
y'_7 &= 0
\end{aligned}
$$

Az $\{a'_j\}$ minták ismeretében állítsuk elő az

$$a_j = a'_{N-1-j} \qquad (2)$$

összefüggéssel az

$\{a_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$

mintasorozatot, a *„tükrözött albakfüggvény”* mintavett alakját. Ezzel az y'_k mérési eredmények a következő alakban is kifejezhetők:

$$
\begin{aligned}
y'_0 &= x_0 a_0 \\
y'_1 &= x_0 a_1 + x_1 a_0 \\
y'_2 &= x_0 a_2 + x_1 a_1 + x_2 a_0 \\
y'_3 &= x_0 a_3 + x_1 a_2 + x_2 a_1 + x_3 a_0 \\
y'_4 &= x_1 a_3 + x_2 a_2 + x_3 a_1 \\
y'_5 &= x_2 a_3 + x_3 a_2 \\
y'_6 &= x_3 a_3 \\
y'_7 &= 0
\end{aligned}
$$

Írjuk fel az (1) összefüggés alapján a négy mintás „ciklikus konvolúció” y_k értékeit („szabályos alakban”), majd fejezzük ki azokat az y'_k mérési eredmények értékeivel (a kifejezések ill. a 2. és a 3. ábrák egybevetésére támaszkodva):

$$
\begin{aligned}
y_0 &= x_0 a_0 + x_1 a_3 + x_2 a_2 + x_3 a_1 = y'_0 + y'_4 \\
y_1 &= x_0 a_1 + x_1 a_0 + x_2 a_3 + x_3 a_2 = y'_1 + y'_5 \\
y_2 &= x_0 a_2 + x_1 a_1 + x_2 a_0 + x_3 a_3 = y'_2 + y'_6 \\
y_3 &= x_0 a_3 + x_1 a_2 + x_2 a_1 + x_3 a_0 = y'_3 + y'_7
\end{aligned}
$$

A *tárgyalt példára* vonatkozó eredményeinket tömörebben így írhatjuk:

$$y_k = y'_k + y'_{k+N} \qquad (3)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

Ezzel a problémát *visszavezettük* az 1. pontban tárgyalt modellre ($k_{-i} \to a_{-i}$ helyettesítéssel).

Feltételeztük: $\{a'_j\}$ és $\{x_i\}$ egyaránt N-mintásak. Ez mindig elérhető (kiegészítés nullamintákkal!).

Ha a diszkrét konvolúció „szabályos modelljének” megfelelő $\{y_k\}$ mintasorozatot megszerkesztettük, alkalmazhatjuk a dekonvolúció matematikai eszközeit az $\{x_i\}$ „valódi” teljesítmény spektrum kiszámítására. (Nem feledve: az ablakfüggvény-minták „tükörképével” kell dekonvolválni a tárgyalt modell esetén).

A *dekonvolúció*, azaz $\{y_k\}$ és $\{a'_j\}$ — vagy $\{k_i\}$ — ismeretében $\{x_k\}$ kiszámítása a lineáris egyenletrendszer megoldásával történhet. Azonban rendelkezünk más, „műveletttakarékosabb” (és gépi számításra szintén alkalmas) eszközzel is. Ez a (diszkrét Fourier-transzformáltakra vonatkozó) konvolúció tételen és a gyors Fourier-transzformáció alkalmazásán alapszik. (Nagyobb, kb. 10^2 nagyságrendű mintaszám esetén a konvolúció kiszámítására is előnyösen alkalmazható.) A részletekre vonatkozóan a Függelékek-re utalunk.

F 1. A diszkrét konvolúció számítási módszereiről

Nagyon fontos tény, hogy a konvolúcióval összefüggésben érvényesek a *konvolúció tételek*. Közülük a tárgyalt *diszkrét konvolúcióra az alábbi tétel:* Ha

$$\{y_k\} = \{x_i\} * \{k_i\}$$

és

$$\mathrm{DFT}\{y_k\} = \{y_n\};\ \mathrm{DFT}\{x_i\} = \{X_n\};\ \mathrm{DFT}\{k_i\} = \{K_n\},$$

akkor DFT mintasorozatok azonos indexű mintái között egyszerű szorzatkapcsolat van:

$$Y_n = X_n K_n \qquad (4)$$

(„A DFT-re vonatkozó diszkrét-konvolúció tétel!”) A diszkrét Fourier-transzformációt (DFT) a főperiódus mintáin végezzük. Ha (mint kikötöttük) $\{x_i\}$, $\{k_i\}$ és $\{y_k\}$ egyaránt N-szerint periódikusak, akkor *DFT-jük is N-szerint periódikus,* és főperiódusaik mintáinak indexei, azaz n lehetséges értékei: 0, 1, ..., N−1.

Érdekes és gyakorlatilag fontos feladat a *diszkrét dekonvolúció:* $\{k_i\}$ és $\{y_k\}$ ismeretében $\{x_i\}$ meghatározása. Ezt rendszerint kerülő úton, a konvolúció tétel (és a DFT, valamint inverze, az IDFT) segítségével célszerű megoldani. Nevezetesen:

$$\{x_i\} = \mathrm{IDFT}\{X_n\} = \mathrm{IDFT}\left\{\frac{Y_n}{K_n}\right\} \qquad (5)$$

ahol

Y_n az n-indexű minta DFT $\{y_k\}$-ban,
K_n az n-indexű minta DFT $\{K_i\}$-ben.

A diszkrét dekonvölúciónak tehát jól kidolgozott eljárása van (s abban a DFT, s hatékony kiszámításához az FFT fontos szerepet játszanak).

(5) *alkalmazhatóságának feltétele,* hogy minden olyan n-nél, amelyre $Y_n \neq 0$, egyben a $K_n \neq 0$ feltétel is teljesüljön. (A nullával való osztás elkerülésére!) Ez a feltétel biztosan teljesül, ha pl. az ($0 \leq n \leq N-1$ értéktartományban) bármely $K_n \neq 0$ teljesül. Ez várható akkor, ha a (főperiódus) k_j értékei nem „tükörképei” egymásnak az első N/2 és a második N/2 között húzható függőlegesre nézve. Másként: ha $\{k_j\}$-nek aszimmetrikus a burkolója, azaz van (legalább egy) olyan j, mellyel $k_j \neq k_{N-1-j}$. (E megfontolások a DFT definícióján alapszanak:

$$\{A_n\} = \mathrm{DFT}\{k_j\},$$

ha

$$A_n = \sum_{j=0}^{N-1} k_j e^{\frac{-2\pi}{N} nj}$$

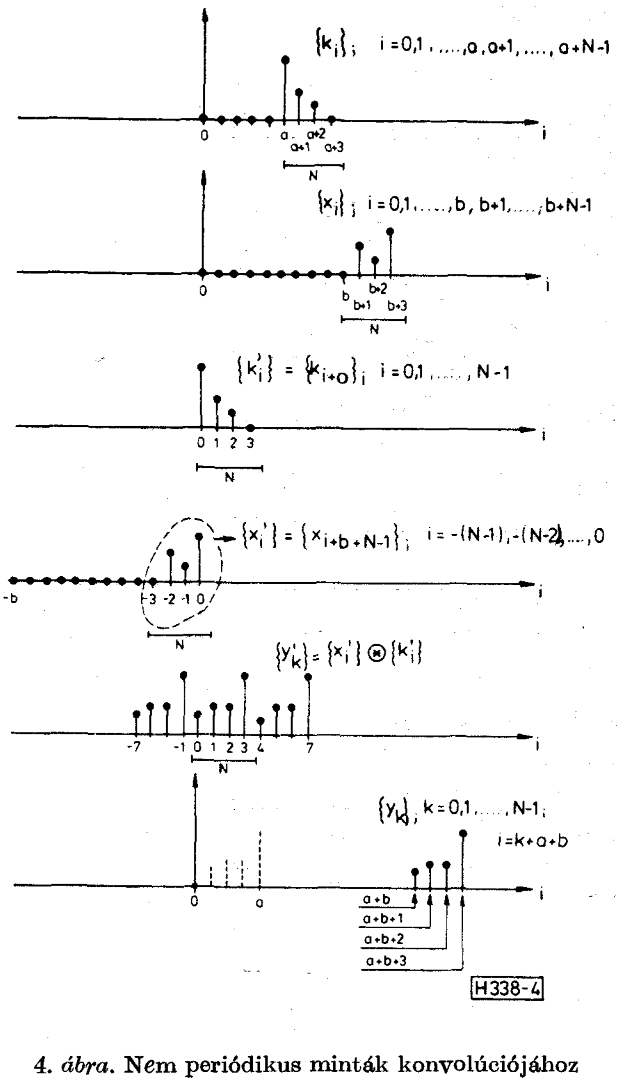
$n = 0, 1, \ldots, N-1$).

A diszkrét dekonvolució (az áttekintett eszközökkel) egyszerűen, „receptszerűen" megoldható akkor, ha a konvolúció az (1) összefüggésekkel megadott, „szabályos" alakban áll rendelkezésünkre. Előfordul, hogy olyan „elsődleges" adatokkal rendelkezünk (pl. mérések eredményeként), amelyekből — némi megfontolással — megkonstruálható a „szabályos alak". (Ezt — a szelektív teljesítménymérés példáján — bemutattuk.)

Nemcsak a dekonvolúció, de már a konvolúció kiszámítása is indokolttá teheti a DFT-s „kerülőút" alkalmazását, az N mintaszám nagyobb értékeinél — a „műveletszámtakarókos" FFT alkalmazásának köszönhetően. Ilyenkor y_k kiszámítására, (1) helyett, az alábbi utat választjuk:

$$\{y_k\}=\mathrm{IDFT}\{Y_n\}=\mathrm{IDFT}\{X_nK_n\} \tag{6}$$

A (4), (5) és (6) összefüggéseket és a velük kapcsolatos tételeket *közvetlenül*, „receptszerűen" alkalmazhatjuk akkor, ha a diszkrét konvolúció valamelyik — (1) -beli — *„szabályos alakjával"* dolgozunk.



4. *ábra.* Nem periódikus minták konvolúciójához

F2. Nemperiódikus, véges minták diszkrét konvolúciója

A diszkrét konvolúció matematikailag csak periódikus számsorozatokra értelmezhető. Nem periódikus, véges minták esetében követendő eljárás:

a) Gondoskodunk arról, hogy a két, konvolválandó sorozat mintaszáma egyforma (N) legyen. Ehhez — ha szükséges — a rövidebb sorozatot kellő számú nulla-mintával kiegészítjük;

b) Elvégezzük — „szabályos módon" — a konvolúciót;

c) Az eredményből a főperiódust — mint nemperiódikus véges mintát — emeljük ki.

Előfordul, hogy a konvolválandó minták *hosszú nullasorozatokkal* kezdődnek: $\{k_i\}$ „a" darab, $\{x_i\}$ „b" darab nullával (ld. 4. ábra). Ekkor az (eleve tudottan) nulla eredményeket adó számítási lépéseket megtakaríthatjuk a következő eljárással

a) A $\{k_i\}$ súlyfüggvény mintákat $a\to 0$, $a+1\to 1$, $\ldots$, $a+\mathrm{N}-1\to\mathrm{N}-1$ „átindexeléssel eltoljuk az „origóba". Így jutunk $\{k'_i\}$-höz.
Viszont „észben tartjuk", hogy ennek „ellentételeként" a konvolúció végső eredményét az i index-változó pozitív irányában, majd „a"-val el kell tolnunk. (Ezt — FIR szűrős példánkon — úgy értelmezhetjük, hogy az egységimpulzusra adott k_i válasz olyan jelfeldolgozót jellemez, amelyik a beadott jelet — egyebek mellett — a T idővel késleltetve továbbítja);

b) $\{x_i\}$ egy periódikus minta főperiódusának tekintjük, s a konvolúcióhoz előállítjuk belőle a közvetlenül előtte levő periódust, azaz az $\{x_{i-(b+N)}\}$-t.

c) Tekintve, hogy $\{x'_i\}$ első $(\mathrm{b}+\mathrm{N})=\mathrm{N}=\mathrm{b}$ darab mintája nulla, a konvolúció y_0, y_1, $\ldots$, y_b mintái is nulla értéket adnak. Ezeket nem kell kiszámítanunk. Elegendő, ha az $\{X_{i-(b+N)}\}$ sorozat utolsó N darab mintájával, amit $\{x_i'\}$-vel jelöltünk, végezzük a konvolúciót. „Emlékezzünk" azonban arra, hogy a konvolúció „végső" eredményének főperiódusa b db nullával kell, hogy kezdődjék. Az első, nem nulla y_k-t jelöljük y_0-val.

d) A $\{k'_i\}$ és $\{x'_i\}$ mintákkal elvégezzük a „szabályos", N mintás konvolúciót, aminek az eredménye $\{y'_i\}$.

e) $\{y'_i\}$ főperiódusát kiemelve és i mentén (a + b)-vei „jobbra" eltolva (ld. az *a)* és *c)* pontokat), végül is $\{y_i\}$ (ld. 3. ábra) szolgáltatja a keresett végeredményt.

A *dekonvolúciót* azaz $\{y_k\}$ és $\}k'_i\}$ ismeretében $\{x_i\}$ meghatározását csak akkor tudjuk elvégezni ha külön-külön ismerjük „a"-t és „b"-t, s tudjuk, hogy $\{x_i\}$ nemperiódikus mintasorozat.

A dekonvolúció lépései:

a) $\{y_k\}$-ból $\{y'_k\}$ („a" és „b" ismeretében);

b) $\{y_k'\}$-ból és $\{k'_i\}$-ből dekonvolúcióval $\{x'_i\}$ meghatározása;

c) $\{x'_i\}$-ből $\{x_i\}$ („b" és a nemperiódikus jelleg ismeretében).

F3. Alkalmazás a folytonos konvolúció számítására

A diszkrét konvolúciót kétféle módon alkalmazhatjuk folytonos függvények konvolúciójának/dekonvolúciójának számítására.

1. A folytonos függvényeket — ha lehetséges — véggesszámú (N) lépcsőt alkalmazva lépcsősen közelítjük, s numerikusan számolunk. E módszer elvben is csak közelítés. A pontosság (és a számítás-igény) N-nel növekszik.
2. A folytonos függvényeket mintavételezhetők. Viszonylag (1.-hez képest) kis N mellett is elvileg pontos (gyakorlatilag kerekítési-számolási hibákkal itt *is* terhelt) eredményekhez jutunk — ha sikerül betartanunk a *mintavételezés követelményeit.* (E követelmények gyakran csak közelítően tarthatók, s így eljárásunk elvileg is csak közelítő pontos lesz.)

N. B.: „Eleve" diszkrét mintasorozatok esetében fenti problémák nem jelentkeznek — kivéve a kerekítési-számítási hibákat.

F4. Számítógépprogram

A diszkrét konvolúcióval kapcsolatos számítások elvégzésére (ld. 5. ábra programlista).
A program neve: dekonv

A programot *elsősorban a dekonvolúció* elvégzésére dolgoztuk ki. Így (a DFT és IDFT számításokhoz) tartalmazza az (1000. sorral kezdődő) FFT szubrutint és a konjugált mintákat előállító (1945 sorral kezdődő) szubrutint. A DFT (és FFT) kérdésével más írásainkban (ld. pl. [2]) foglalkoztunk.

A dekonvolúció az (5) összefüggés alapján történik. Az osztáshoz a komplex osztandót és osztót abszolút értékeikkel és fázisszögeikkel írjuk le. Ilyen alakra hozza a valós és képzetes részekkel megadott mintákat az arc (y, z) nevű szubrutin (1960 sortól). Ez utóbbit az FFT program is használja.

```
 100 REM dekonv
 120 INPUT "n?",n
 122 LET h=INT (.5+LN n/LN 2)
 130 DIM a(n): DIM b(n): DIN y(n
): DIN z(n): DIM c(n): DIM d(n)
 132 DIM r(n): DIN i(n)
 134 STOP
 140 FOR k=1 TO n
 142 PRINT "a(";k;")?",: INPUT a
(k): PRINT a(k)
 144 NEXT k
 146 STOP
 150 FOR k=I TO n
 152 PRINT "y(";k;")?",  INPUT y
(k): PRINT y(k)
 154 NEXT k
 156 STOP
 170 FOR k=1 TO n
 172 LET r(k)=a(k): LET i(k)=b(k
)
 174 NEXT k
 I50 GO SUB 1000
 190 CLS : PRINT "DFT {a} kesz":
 GO SUB 515
 195 STOP
 200 FOR k=1 TO n
 202 LET c(k)=r(k)
 204 LET d(k)=i(k)
 206 NEXT k
 210 FOR k=1 TO n
 212 LET r(k)=y(k): LET i(k)=z(k
)
 214 NEXT k
 220 GO SUB 1000
 230 CLS : PRINT "DFT {y} kesz"
 GO SUB 5I5
 235 STOP
 240 FOR k=1 TO n
 242 LET y(k)=r(k)
 244 LET z(k)=i(k)
 246 NEXT k
 250 FOR k=1 TO n
 260 LET y=c(k): LET z=d(k)
 270 GO SUB 1960
 280 LET c(k)=SQR (ABS y↑2+ABS z
↑2)
 290 LET d(k)=f1
 300 NEXT k
 310 FOR k=1 TO n
 320 LET y=y(k)
 330 LET z=z(k)
 340 GO SUB 1960
 350 LET y(k)=SQR (ABS y↑2+ABS z
↑2)
 360 LET z(k)=f1
 370 NEXT k
 400 FOR k=1 TO n
 410 LET r(k)=(y(k)/c(k))*COS (z
(k)-d(k))
 420 LET i(k)=(y(k)/c(k))*SIN (z
(k)-d(k))
 430 NEXT k
 440 CLS : PRINT "DFT {x} kesz"
 GO SUB 515
 445 STOP
```

```
 460 LET o=n
 470 GO SUB 1945
 480 GO SUB 1000
 490 LET o=1
 500 STOP
 507 GO SUB 1945
 510 GO SUB 515
 512 STOP
 515 REM subr. print
 520 PRINT "j";TAB 4;"Re x(j)";T
AB 18;"Im x(j)"
 525 FOR j=1 TO n
 530 PRINT j;TAB 4;r(j);TAB I8;i
(j)
 540 NEXT j
 545 RETURN
1000 REM subr. fft
1210 FOR l=1 TO h: LET s=n/2↑l
1220 FOR g=0 TO 2↑l-1. STEP 2
1240 FOR k=1 TO s: LET a=k+g*s:
LET b=a+s
1260 LET x=R(a): LET y=R(b): LET
 w=I(a): LET z=I(b)
1280 GO SUB, 1960
1300 LET m=INT ((a-1)/2↑(h-l)):
GO SUB 1800
1320 LET f=-2*PI*p/n+f1
1340 LET q=SQR (ABS y↑2+ABS z↑2)
1360 LET R(a)=x+q*COS f
1380 LET R(b)=x-q*COS f
1400 LET I(a)=w+q*SIN f
1420 LET I(b)=w-q*SIN f
1440 NEXT k: NEXT g: NEXT l
1450 FOR j=2 TO n-1: LET m=j-1
1455 GO SUB 1800
1460 IF p<=j-1 THEN GO TO 1480
1470 LET i=p+1: LET t1=R(j): LET
 t2=I(j)
1475 LET R(j)=R(i): LET I(j)=I(i
): LET R(i)=t1: LET I(i)=t2
1480 NEXT j
1490 CLS
1520 RETURN
1800 REM reverzalas szubrutin
1820 LET p=0
1840 FOR c=0 TO h-1
1860 LET v=h-c-1: LET dv=INT (m/
2↑v)
1880 LET p=p+2↑c*dv
1900 IF dv=1 THEN LET m=m-2↑v
1920 NEXT c
1940 RETURN
1945 REM subr. konjugalt
1950 FOR j=I TO n: LET R(j)=R(j)
/o: LET I(j)=-I(j)/o
1955 NEXT j
1957 RETURN
1960 REM subr. arc(y,z)=f1
1962 IF y=0 THEN LET f1=SGN z*PI
/2: GO TO 1968
1964 IF z=0 THEN LET f1=(1-SGN y
)*PI/2: GO TO 1968
1966 LET f1=SGN y*SGN z*ATN (ABS
 z/ABS y)+(1-SGN y)*PI/2
1968 RETURN
```

H338-5

5. ábra. Ad F4; Program lista

A program — kis módosítással — a konvolúció kiszámítására is felhasználható. A számítás a (6) összefüggés alapján történik.

A szükséges módosítás ehhez: a 410. és a 420. sorokban osztás (/) helyett szorzást (×), kivonás (—) helyett pedig összeadást (+) kell elhelyezni.

A programot (ZX-Spectrum) BASIC-ben írjuk. Ez előnyös a módszer demonstrálása vonatkozásában, de a végrehajtás viszonylag lassú. (Csak az FFT szubrutin lefutása 32 mintával néhány percet igénybe vesz.) A programnyelv egyik sajátossága az, hogy egy n-elemű tömb elemeinek a jelölésére („indexelésére") az 1, 2 ... n számokat használjuk (a szokásosabb 0, 1, ..., n−1 nem használható).

A program használata

a) Program-módosítás (konvolúcióhoz — dekonvolúcióhoz nem szükséges — a fentebb megjelölt módon).

b) Előkészítendő adatok:
n mintaszám (2-nek egész kitevőjű hatványa kell, hogy legyen!);
a(n) tömb elemei, amelyek a konvolúció „szabályos alakjában" — ld. (1)-szereplő k_j súlyozó minták (a „főperiódus" mintái), természetes rendben, — ha azok valós konstansok. Ha nem valósak, akkor a képzetes részeik a b(n) tömbben helyezhetők el (LET utasításokkal, pl. 146 STOP alkalmával).
y(n) tömb elemei: a konvolúció mintái (dekonvolúciónál) vagy a konvolválandó mintaelemek konvolúciónál) — ha azok valósak. A képzetes elemek a z(n) tömbbe helyezhetők (LET utasításokkal, pl. a 156 STOP alkalmával).

c) Futtatás során a beiktatott STOP utasítások lehetővé teszik a bevitt adatok módosítását (kiegészítését), a számítási részeredmények megismerését, továbbá a program szubrutinjainak (pl. FFT) a teljes programtól független használatát is. (Ha *dekonvolúciót* végzünk, akkor a 195 STOP-nál *ellenőrizzük*: DFT $\{a\}$-nak *nincs-e* olyan mintája, melynek mind a Re része, mind az Im része *nulla.* Ha van, akkor ez a 410. és 420. programsorokban nullával való osztáshoz vezetne. Ehhez vezető súlyozó mintákkal a program nem képes végrehajtani a dekonvolúciót!)
STOP után folytatás CONT utasítással — a program végéig. A számítás (dekonvolúció vagy konvolúció) eredményeinek a kinyomtatása, az 520. sorban látható fejléccel, az 525—540. ciklusban, (512. STOP-nál végződik a program). A számítás eredményeként kapott minták sorszámát j, valós részét Re $x(j)$, a képzetes részét Im $x(j)$ adja meg. A program lefutása után az $a(n), b(n)$ tömbökben a súlyozó minták, a $c(n)$, $d(n)$ tömbökben a dekonvolválandó (konvolválandó) minták DFT-je található, a DFT-k abszolút érték és fázis (rad) alakban.

Példák:

1. Végezzünk *konvolúciót* (a program megfelelő módosítása után) az alábbi, n=4 mintás sorozatokkal:

$\{a_k\}$: 2; 4; 1; 0
$\{y_k\}$: 9; 3; 1; 0

Eredmény:

Re×(1)=19; Re×(2)=42; Re×(3)=23; Re×(4)= =7 Im $x(j)=0$; (10^{-9} nagyságrend!)

2. Végezzünk *dekonvolúciót* (a program visszaalakítása után), n=4 mintás sorozattal.

$\{a_k\}$: 2; 4; 1; 0
$\{y_k\}$: 19; 42; 23; 7

Eredmény:

Re x(I)=9; Re x(2)=3; Re x(3)=1; Re x(4)=0 Imx(j)=0; (10^{-9} nagyságrend$_1$)
(Bizonyára felismertük: az 1. és 2. példák egymás próbái...)

A program felhasználása *DFT számítására* (az $\{y\}$ mintákból) a következő programsorok beiktatása után történhet:

```
136 GO TO 150
160 GO TO 210
216 LET 0=1
(235 STOP a számítás vége.)
```

IDFT számításához még a következő programsorokat is be kell vinnünk:

```
216 LET 0=n
218 GO SUB 1945
224 LET 0=1
226 GO SUB 1945
(Most is a 235 STOP a számítás vége.)
```

DFT és IDFI számítás után az eredmény valós része az R(n), képzetes része az I(n) tömbben található.

Mint már jeleztük, a program elsősorban dekonvolúcióhoz készült. Konvolúcióra, DFT-re és IDFT re való felhasználását *kényelmesebbé tehetjük*, ha az összes szükséges kiegészítő programsort beiktatjuk, az éppen nem szükségeseket pedig (IF—THEN feltételes elágazásokkal ill. ugrásokkal) átugortatjuk egy (pl. u$ string-) változónak a program elején történő beállításától függően.

IRODALOM

[1] *Dr. Schnell László* (főszerkesztő): Jelek és rendszerek méréstechnikája. (Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1985.)
[2] *Dr. Kerpán István:* A Fourier-transzformáció és a híradástechnika. (Híradástechnika XXVIII. évf. 9. sz.)
[3] *E. Oran Brigham:* The Fast Fourier Transform (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nem Yersey, 1974.)