Végeselem-analizis alkalmazása a Helmholtz egyenlet megoldására

PROF. DIPL. ING. GERHARD NEUKAMM
DR. NAGY JÁNOS
Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Pőiskola

PROF. DIPL.-ING. GERHARD NEU-GERHARD NEUKAMM

Gerhard Neukamm professzor 1960-ban fejezte be tanulmányait a Stuttgarti Műszaki Egyetem híradástechnikai tagozatán. 1967-ig az AEG-Telefunkennél dolgozott Backnangban a mikrohullámú összeköttetések tématerületén. 1967-től a Wilhelmshaveni Szakfőiskola professzora. Szakterülete a nagyfrekvenciás technika és a mikrohullámú technika. Neukamm professzor tevékenyen részt vesz a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola és a Wilhelmshaveni Szakfőiskola közötti együttműködésben.

ÖSSZEFOGLALÁS

Tetszőleges kialakítású mikrohullámú planár alakzatok analízise csak numerikus módszerekkel lehetséges. Ez a közlemény a planár áramkörök mezőeloszlásának a Helmholtz egyenlet által leírt közelítése alapján mutat be egy személyi számítógépen végzett analízis módszert. A végeseiemek módszerével végzett analízis felépítését alapvető lépéseiben ismertetjük és az elért eredményt numerikus példán mutatjuk be.

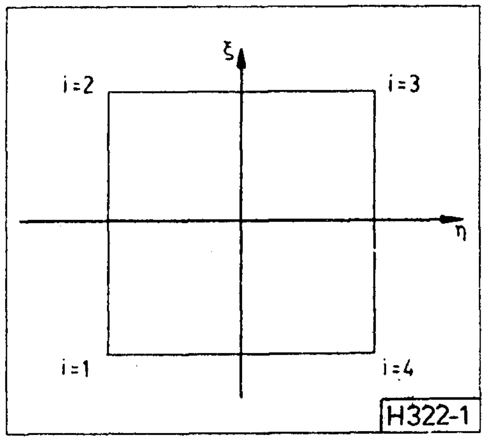
Bevezetés

Mikrohullámú planár elrendezések mezőeloszlása általános alakzatokban numerikus módszerekkel határozható meg. Ezen feladat megoldására a végeselemek módszere előnyösen alkalmazható. Ez a közlemény egyfelől bemutatja a módszer alkalmazásának alapvető lépéseit, másfelől példát ad a mikrohullámú planár elrendezések egy lehetséges numerikus analízisére

Az adatbeviteli eljárás célszerű kidolgozásával tetszőleges alakzatformák és peremfeltételek könynyen kezelhetők. A módszer hatékony alkalmazásának feltétele, hogy a feladathoz jól illeszkedő problémamegfogalmazást találjunk. Az ismertetett eljárásban a probléma alapegyenletének integrál megfogalmazását használtuk fel. A végeselemek módszerének a mechanika területén kidolgozott kiforrott módszereit vettük át.

A végeselemek módszerének alapelemei

A végeselemek módszeréhez a vizsgálandó tartományt tetszőleges alakú meghatározott tulajdonságú résztartományokra kell osztani. Tekintettel arra, hogy a mikrohullámú planár áramkörök síkproblémát képviselnek, kétdimenziós feladatot kell megoldani. Az analízis elvégzésére kétdimenziós „Serendip" típusú végeselemet alkalmaztunk [1]. Az alapelemet az 1. ábra mutatja



1. ábra. „Serendip" típusú nógysarokpontos alapelem

A csomópontokat az ábrában bejelölt módon az óramutató járásával megegyező értelemben láttuk el növekvő indexekkel. Az elemre a következő közelítő függvényt alkalmaztuk

$$\Phi = \sum_{i=1}^{4} N_i \Phi_{i_0} \qquad (1)$$

A végeselemek módszerével meghatározandó paraméterek a sarokpontokban érvényes $\mathbf{H}_{io}$ értékek. Az (1) egyenletben szereplő alakfüggvényeket a (2) egyenlet adja meg.

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$$

$i=1$	$\xi_1=-1$	$\eta_1=-1$
$i=2$	$\xi_2=-1$	$\eta_1=1$
$i=3$	$\xi_3=1$	$\eta_2=1$
$i=4$	$\xi_4=1$	$\eta_4=-1$ (2)

Az N_i alakfüggvény jellemzője, hogy az i-ik sarokpontban értéke 1, az összes többi sarokpontban értéke 0. Figyelemre méltó, hogy az alakfüggvény értékét bármely oldalél mentén csupán az adott oldalélhez csatlakozó két csomópont paramétere határozza meg.

A választott végeselem alapfüggvény azélek mentén biztosítja a függvény folytonosságát. Az alkalmazott integrál alapösszefüggés legfeljebb elsőrendű differenciálhányadosokat tartalmazhat. [2]

Az eljárás egyszerűsítése végett a vizsgált tartomány tetszőleges elemét az alapelemre vonat-

Beérkezett: 1987. III. 30. #

koztatva analizáljuk. Ez az eljárás a szakirodalomban izoparametrikus leképzés néven ismert. A (3) egyenletben megadott leképező függvények — az alapelem közelítő függvényekkel való alaki egyezőségük indokolja az izoparametrikus megjelölést — segítségével egy tetszőleges végeselem pontjai ós e pontokban az első differenciálhányadosok az alapelemből származtathatók.

$$X=\sum_{i=1}^{4} N_i X_{i_0}$$
$$Y=\sum_{i=1}^{4} N_i Y_{i_0} \qquad (3)$$

A (3) egyenletben X_{io} és Y_{io} a tetszőleges végeselem sarokpontkoordinátái.

Az első differenciálhányadosokat a tetszőleges elemben és az alapelemben a Jacobi mátrix (4) kapcsolja össze.

$$J=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Ez a transzformáció az alkalmazott számítógép programmban rutinként szerepel.

A számításoknak az egyes elemeken való elvégzéséhez, valamint a rendszeregyenlet összeállításához az elemeket és a csomópontokat meg kell számozni. A rendszer topológiai tulajdonságait célszerűen egy kétméretű tömbben tároltuk. A tömb első indexe a végeselem sorszáma, a második indexe a csomópontok sorszáma.

A rendszeregyenlet összeállításának alapja a csatlakozó végeselemek közös csomópontjaiban a csomóponti paraméterek azonos értéke [1]. Ezen az alapon az egyes végeselemekre érvényes egyenletekből csatolt egyenletrendszer jön létre. A megoldásnál figyelembe vettük mind az együtthatómatrix szimmetriáját, mind annak részleges kitöltöttségét. Ezáltal a probléma méretéhez a lehető legkisebb tárterületet használtuk fel. Ez különösen fontos személyi számítógépek alkalmazásánál.

A felsorolt elvek minden olyan kétdimenziós problémára érvényesek, melyeknél csupán a megoldás folytonossága követelmény. A probléma kezelhetőségét nagyban megkönnyíti a differenciálegyenlet integrál megfelelőjének alkalmazása. Ennek előállítását mutatja be a következő fejezet.

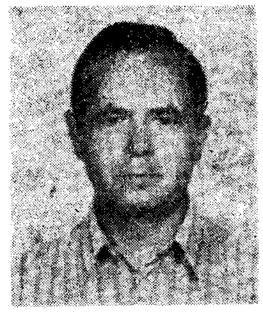
A Helmholtz egyenlet integrális alakja

Mikrohullámú planár alakzatokban a mezőeloszlást a skalár Helmholtz egyenlet határozza meg [3].

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+k^2\Phi=0 \qquad (5)$$

ahol $k^2=\varepsilon\mu\omega^2$

Az integrálegyenletet a súlyozott maradékok módszerével állítjuk elő [1]. Az (1) egyenletben



DB. NAGY JÁNOS

A Budapesti Műszaki Egyetemen 1957-ben villamosmérnöki oklevelet, 1968-ban mikrohullámú szakmérnöki oklevelet és Dr. tech. fokozatot szerzett. 1972-ig a Távközlési Kutató Intézetben dolgozott, 1972 óta főiskolai tanár a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolán, a Mikrohullámú Szakcsoport vezetője. 1979—80-ban a Berkeley Egyetemen ösztöndíjasként dolgozott, 1985—86-ban a Wilhelmshaveni Szakfőiskolán vendégprofesszor volt. Szakmai érdeklődési köre a híradástechnikai elektronika területén belül a személyi számítógépek tudományos és mérnöki alkalmazási lehetőségei köré csoportosul.

definiált alapösszefüggés szerint az integrálegyenlet a következő alakú lesz

$$\int N_i\cdot\left[\frac{\partial^2\left[\sum_{i=1}^{4} N_i\Phi_{i_0}\right]}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left[\sum_{i=1}^{4} N_i\Phi_{i_0}\right]}{\partial y^2}+k^2\Sigma N_i\Phi_{i_0}\right]\cdot$$
$$\cdot d\Omega=0 \qquad (6)$$

Az i index értéke 1, 2, 3, 4.

A (6) egyenlet által előállított egyenletrendszer a problémához tartozó elemkarakterisztika. A második differenciálhányadosok az alkalmazott alapfüggvényekre az elemek éle mentén végtelenné válnának, ezért a differencilálhányadosok rendjét parciális differenciálással csökkentjük [1]. Ennek megfelelően az egyenletrendszer első tagja a következő alakú lesz

$$\int_\Omega N_i\left[\frac{\partial^2\left(\sum_{i=1}^{4} N_i\Phi_{i_0}\right)}{\partial x^2}\right]d\Omega=$$
$$=\int_\Omega \left[N_i\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{4} N_i\Phi_{i_0}\right]\right]n_x d\Gamma-$$
$$-\int_\Omega \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{4} N_i\Phi_{i_0}\right]d\Omega \qquad (7)$$

ahol Γ az Ω elemtartomány peremét, n- a kifelé mutató egységvektort jelöli.

Az integrál értéke a peremen 0_x mert

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0.$$

Ez a feltétel fizikailag azt jelenti, hogy a planár alakzaton a kapuk kivételélével be- illetve kifolyó áramok nem léphetnek fel [3]. A kapukon, ahol a mezőintenzitás előírt,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}$$

kiadódik.

A peremfeltételeket a következő fejezetben leírt módon vettük figyelembe. Ezek után az elemkarakterisztikában a következő tagok maradtak vissza

$$-\int_{\Omega}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{4}N_i\Phi_{i_0}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial Nt}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{4}N_i\Omega_{i_0}\right]\right]\mathrm{d}\Omega+$$

$$+\int_{\Omega}N_ik^2\left[\sum_{1=i}^{4}N_i\Phi_{i_0}\right]\mathrm{d}\Omega=0 \tag{8}$$

Ismeretes, hogy ez az egyenlet a Helmholtz egyenlethez rendelt variációs integrálból is származtatható [1]. Az itt bemutatott származtatása rámutat azonban arra, hogy az ún. természetes peremfeltételeknek mi a fizikai jelentése.

A (8) elemkarakterisztikából a négydimenziós lineáris egyenletrendszer együtthatóira a következő összefüggés adódik

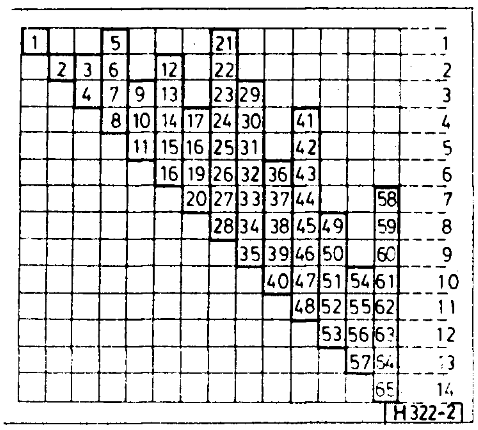
$$S_{ij}=\int\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}-k^2N_iN_j\right]\mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

ahol az i és j a sor illetve oszlopindexek és értékük az alkalmazott elemre 1,2,3,4. Figyelemre méltó, hogy az elemkarakterisztika szimmetrikus és ennek következtében a rendszeregyenlet is szimmetrikus. Ez a tulajdonság a másodrendű variációsintegrál extrémizálásakor mindig fennáll [1].

Megjegyezzük, hogy a végeselem analízis alkalmazásakor csupán az elemkarakterisztika (9) alakja problémafüggő, ezért a más területeken kifejlesztett módszerek megfelelő módon alkalmazhatók.

A peremfeltételek figyelembe vétele

Az egyenletrendszer méretét az előírt értékű csomópontok számának megfelelően csökkentettük. Az együtthatómátrix kitöltési alakját ugyanis már az egyenletrendszer összeállítása során meg lehet határozni. A tényleges kitöltöttséget egy mutató megadásával vettük figyelembe [1]. Ennek segítségével az együtthatók egyetlen egyméretű tömbben tárolhatók. A mutató a diagonalelemek sorszámára mutat az együttható tömbben. Szemléltető példát mutat a 2. ábra.

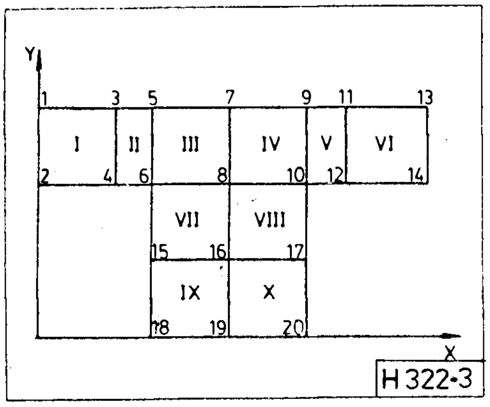


2. ábra. Példa 14 csomópontos rendszer együtthatómátrixának kitöltöttségére

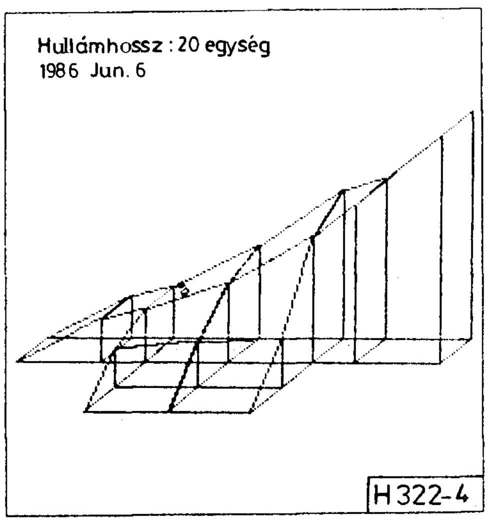
A példában az együtthatók száma 65, a mutató mérete 14 és értékei: 1, 2, 4, 8, 11, 16, 20, 28, 35, 40, 48, 53, 57, 65. A mutató utolsó értéke egyben az együtthatók számát is megadja.

A mutató előállításakor a topológiai tulajdonságokat és a peremelőírásokat vettük figyelembe. A kétméretű topológiai változó indexei az elem sorszáma és a megfelelő lokális csomópontsorszámok, értékei a megfelelő globális csomópontszámok. A peremórtékváltozó indexe a globális csomópontszám, értéke pedig vagy az előírt peremérték egy megkülönböztethetőséget biztosító nagyon kis számmal (10^{-20}) megszorozva, vagy maga a globális csomópontszám. Ezeknek a változóknak a segítségével a diagonálemelek feletti oszlopok magassága meghatározható és ebből a mutató már közvetlenül származtatható [1]. Az egyenletrendszer jobboldala az elemkarakterisztikák rendszeregyenletbe építésekor kiadódik.

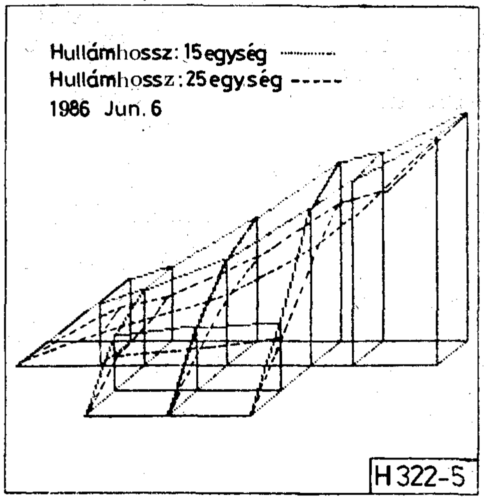
Az egyenletrendszert egy megfelelően módosított Gauss eljárással oldottuk meg [1]



3. ábra. A numerikus példában szereplő alakzat adatai



4. ábra. Mezőeloszlás $\lambda_2=20$ koordinátaegységre



5. ábra. Mezőeloszlás $\lambda_1 = 15$ koordináta egységre és $\lambda_3 = 25$ koordinátaegységre-

A számítógép programm felépítése

A program két részből áll. Az első részben a koordinátákat, a topológiai adatok és a peremfeltételeket valamint peremértékeket állítottuk elő illetve a programm által adott keretek között generáltuk. A második részben történik a mutató előállítása, az egyenletrendszer együtthatómátrixának és az egyenletrendszer jobboldalának az összeállítása, majd az egyenletrendszer megoldása. Ilyen felépítés mellett lehetséges volt hatásos beviteli segédprogrammok beépítése az első részbe.

Mivel az első részben csupán adatbevitel történik, megfelelő Basic nyelven könnyen programozható. A programm futási idejét a második rész határozza meg, ezért itt már célszerű valamilyen gépi kódra fordítható magasszintű programmnyelvet alkalmazni.

Numerikus példa

A 3. ábrában megadott alakzat analízisét mutatja különböző peremfeltételekre a 4. és 5. ábra.

Az alakzat 10 elemből áll, a csomópontok száma 20. A peremfeltételek a következők: az 1, 2, 18, 19, 20-ik csomópontok az alaplemezhez kötöttek ($\Phi = 0$), a 13, 14-ik csomópontok potenciálja előírt: $\Phi = 10$ egység. A hullámhosszat koordináta egységekben adtuk meg. A 4. ábrában $\lambda_2 = 20$ egység, az 5. ábrában $\lambda_1 = 15$ illetve $\lambda_3 = 25$ egység. A különböző hullámhosszadatok a frekvenciafüggés bemutatását szolgálják. A programm második részének futási ideje (Commodore 128 gépen, Basicben írt programmal) kb. 3 perc. Ez az eredmény is azt sugallja, hogy kb. 50 csomópontszám felett érdemes ezt a programrészt fordítható programmnyelven megírni.

Végkövetkeztetések

Ebben a munkában a más területeken kiérlelt végeselem analízist alkalmaztuk mikrohullámú planár alakzatok vizsgálatára személyi számítógép felhasználásával. A munkát a Wilhelmshaven-i Szakfőiskolán, a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolával való együttműködés keretében végeztük. Az elért eredmények azt mutatták, hogy a módszert érdemes a személyi számítógép segítségével a mérnöki tervezés területére bevonni. Az eljárást a mikrohullámú planár alakzatok áramköri karakterisztikáinak meghatározására célszerű továbbfejleszteni.

IRODALOM

[1] *Zienkiewicz, O. C.:* The Finite Element Method. McGraw Hill, 1977

[2] *Chari, M. V. K., Silvester, P. P.:* Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems. John Wiley & Sons, 1980

[3] *Gupta, K. C., Garg, R., Chadha, R.:* Computer—Aided Design of Microwave Circuits. Artech House, Inc, 1981