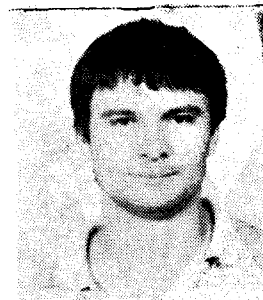


Hullámterjedés egydimenziós inhomogén közegben. Analízis vége-selem módszerrel

PETRE PÉTER

BME Mikrohullámú Híradástechnika Tanszék



ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a cikkben egy hatékony numerikus módszer segítségével a síkhullámok terjedését vizsgáljuk egydimenziós, tetszőlegesen változó anyagállandójú inhomogén közegben.

A problémára megfogalmazzunk egy peremérték-feladatot, majd erre alkalmazzuk a súlyozott reziduum formulát és a kapott egyenlet numerikus kiértékeléséhez a vége-selem módszert hívjuk segítségül. A cikk végén néhány a gyakorlatban is előforduló feladatra (inhomogén tápvonal, reflexiómentesítő inhomogén réteg) adunk numerikus megoldást.

1. Bevezetés

A valóságban előforduló hullámterjedési problémák egy részét rendszerint leírhatjuk egy egydimenziós inhomogén réteget tartalmazó modell segítségével. Az ilyen modell számos gyakorlati feladat megoldására használható. Ilyen többek között az elektromágneses hullámok ionoszférában való terjedésének leírása [1], a különböző plazmatípusok reflexiós és átviteli tulajdonságainak vizsgálata [2, 3], az inhomogén tápvonalak és tápvonalátmenetek analízise és szintézise [4], vagy a reflexiómentesítő anyagok csillapítási tulajdonságainak vizsgálata.

Az egydimenziós inhomogén közeg analízisére a szakirodalomban számtalan módszer található, közülük némelyik csak speciális profilú rétegre használható. Néhány eljárás a teljesség igénye nélkül: a Wentzel—Kramers—Billouin (WKB), a fázisintegrál módszere, a homogén rétegekkel való közelítés [5], az általánosított WKB módszer [2], [5], az integrálegyenletre való visszavezetés módszere [6], továbbá a véges differenciák módszere [7] és a variációs elv [7]—[9]. Az általunk használt súlyozott reziduum módszer [7], [8] ez utóbbi kettőhöz áll legközelebb. Mint már említettük, választott módszerünk előnye, hogy tetszőlegesen változó inhomogén közeg esetén is használható.

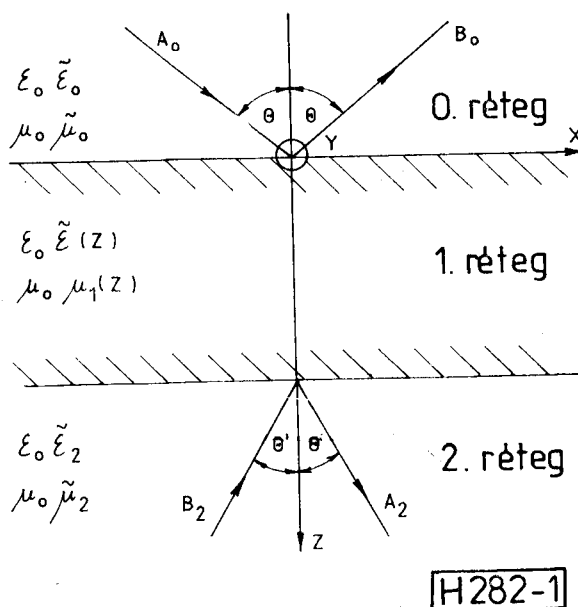
A véges differenciák módszerének hátránya, többdimenziós feladat esetén többek között az, hogy nem ad pontos eredményt, ha a vizsgált tartomány határvonala görbe, vagy ha a határon a peremfeltétel ún. „kevert határfeltétel” [8]. Ezt az eljárást főleg az időtől függő rendszerek leírására használják. A variációs elv lényege, hogy az adott peremérték-feladathoz egy funkcionált rendel és a funkcionál szélsőértékéhez tartozó függvényt határozza meg. Ez a módszer az elektromágneses térelméletben az utóbbi időben igen

PETRE PÉTER

1985-ben végzett a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karán. Diplomatervében az elektromágneses hullámok terjedésének elméleti leírását dolgozta ki rétegzett közegben, mellyel a HTE

1985. évi diplomaterv pályázatán III. helyezést ért el. Jelenleg a BME Mikrohullámú Híradástechnika Tanszékén tudományos segédmunkatársként dolgozik. Kutatási területe: hullámterjedés elvi és kísérleti vizsgálata homogén és inhomogén közegekben.

népszerűvé vált és ezzel együtt rendkívüli mértékben megszorodott az ide vonatkozó szakirodalom is [10]—[16]. A [15] és [16] egydimenziós inhomogén réteget vizsgál a variációs elv segítségével. A feladat tehát lényegében ugyanaz mégis lényeges különbség van a két megoldás között. Azért érezzük szükségesnek a feladat megoldását a súlyozott reziduum módszer segítségével, mert ez az eljárás általánosabb, mint a variációs elv [7], [8], ugyanis a variációs elv csak akkor használható, ha az adott peremérték-feladathoz hozzárendelhető egy megfelelő funkcionál. Ez a hozzárendelés viszont csak bizonyos típusú differenciál-egyenletekhez lehetséges. A súlyozott reziduum formula ezzel szemben tetszőleges peremérték-feladat esetén is megadható, és semmiféle megkötést sem kíván a vizsgált differenciálegyenlettől (differenciálegyenletektől) és a hozzá tartozó határfeltételtől (határfeltételektől).



1. ábra. Egydimenziós inhomogén közegben történő hullámterjedés modellje

Beérkezett: 1986. XI. 5. (H)

Mint minden numerikus módszernél természetesen itt is felmerül a megoldás pontosságának kérdése. Ezért a későbbiekben még visszatérünk a [15] [16] által is használt energiamegmaradás tételén alapuló hibabecslési módszerhez.

2. A feladat megfogalmazása

A feladat geometriája az 1. ábrán látható.

A 0. és a 2. réteg homogén izotróp az egyik irányban végtelen kiterjedésű. Az 1. inhomogén

réteg anyagállandói $\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_1(z)$, $\mu_0 \tilde{\mu}_1(z)$ és a $z \in [0, a]$ tartományban helyezkedik el. Itt μ_0 és ε_0 a szabadtéri permittivitás és permeabilitás, míg a $\tilde{\mu}_i$ és $\tilde{\varepsilon}_i$ ($i=0, 1, 2$) az i . réteg komplex relatív permittivitása és permeabilitása.

Az inhomogén réteg anyagállandói csak a z irányban változnak. Az időfüggés $e^{j\omega t}$ alakú, amit a következőkben elhagyunk. Ismeretes, hogy ferdeszögű beesés esetén a beesés síkjára merőleges (TE mód) és a beesés síkjával párhuzamos (TM mód) polarizációt meg kell különböztetni. A következőkben ahol lehet a kétféle polarizációt együtt kezeljük, ahol erre nincs mód, ott mind a két módusra külön felírjuk a megfelelő egyenletet.

Merőleges (TE mód) polarizáció esetén az elektromos vektornak (\vec{E}) csak y irányú komponense van.

$$\vec{E}_y^1(x, z) = E_y^1(z) \cdot e^{-\gamma_0 \sin \Theta \cdot x} \cdot \vec{e}_y \quad (1)$$

ahol \vec{e}_y — az y irányú egységvektor, a terjedési

tényező $\gamma_0 = j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{\mu}_0 \tilde{\varepsilon}_0}$ a 0. rétegben, λ_0 — a szabadtéri hullámhossz, Θ a beeső hullám és a beesési merőleges által bezárt szög.

Párhuzamos (TM mód) polarizáció esetén a mágneses vektornak (\vec{H}) csak y irányú összetevője van, ezért írhatjuk, hogy

$$\vec{H}_y^1(x, z) = H_y^1(z) e^{-\gamma_0 \sin \Theta \cdot x} \cdot \vec{e}_y \quad (2)$$

Mivel a 0. és a 2. közeg homogén izotróp, ezért itt a Maxwell egyenletek megoldása az alábbi formában írható [5], [16]

$$\Phi(z) = H_y^1(z) = E_y^1(z) = A_0 e^{-\gamma_0 \cos(\Theta) z} + B_0 e^{\gamma_0 \cos(\Theta) z}, \quad z < 0 \quad (3)$$

$$\Phi(z) = H_y^1(z) = E_y^1(z) = A_2 e^{-\gamma_2 \cos(\Theta')(z-a)} + B_2 e^{\gamma_2 \cos(\Theta')(z-a)}, \quad z > a \quad (4)$$

A $\Phi(z)$ jelölést azért vezettük be, mert a párhuzamos, és a merőleges polarizációra ugyanazt az egyenletet kaptuk, és ezzel a felírás tömörebb lett. $A_0, B_0, A_2, B_2, \Theta'$ jelentése az 1. ábrán látható. Az elektromágneses térelméletből ismert, hogy két közeg határán az E és \vec{H} vektor tangenciális összetevői folytonosan mennek át, ha nincs felületi töltés és nem folyik felületi áram.

Ezt fölhasználva írhatjuk, hogy

$$\gamma_0 \sin \Theta = \gamma_2 \sin \Theta' \quad (5)$$

ahol

$$\gamma_i = j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_i \tilde{\mu}_i} \quad i=0,2 \quad \text{Im } \gamma_i \leq 0$$

A (4)-ben szereplő kitevőt ezzel átírhatjuk az alábbi alakra

$$\gamma_2 \cos \Theta' = j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\mu}_2 - \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{\mu}_0 \sin^2 \Theta} \quad (6)$$

Ha a feladat megoldása során előírjuk, hogy $A_0=1$ és $B_2=0$, akkor ez fizikailag megfelel annak, hogy egy egységnyi amplitudójú hullám érkezik az inhomogén rétegbe a 0. közegből a beesési merőlegeshez képest Θ beesési szöggel. Ekkor $B_0 = I(\Theta)$ és $A_2 = T(\Theta)$, ami nem más, mint a reflexió és átviteli tényező Θ nagyságú ferdeszögű beesés esetén.

Teljesen hasonló módon definiálhatunk egy inverz terjedési modellt, ahol $A_0=0$, és $B_2=1$, vagyis most a 2. közegből érkezik egy egységnyi amplitudójú hullám az inhomogén rétegbe a beesési merőlegeshez képest Θ beesési szöggel.

I. táblázat

A (7)-ben szereplő paraméterek definíciója párhuzamos és merőleges polarizáció esetén

Kifejezések	TE mód (merőleges pol.)	TM mód (párhuzamos pol.)
$\Phi(z)$	$E_y^1(z)$	$H_y^1(z)$
$p(z)$	$1/\tilde{\mu}_1(z)$	$1/\tilde{\varepsilon}_1(z)$
$q(z)$	$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \left[\tilde{\varepsilon}_1(z) - \frac{\tilde{\mu}_0 \tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\mu}_1(z)} \sin^2 \Theta \right]$	$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \left[\tilde{\mu}_1(z) - \frac{\tilde{\mu}_0 \tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\varepsilon}_1(z)} \sin^2 \Theta \right]$
α_1	$-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\mu}_0}} \cos \Theta \tilde{\mu}_1(0)$	$-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\varepsilon}_0}} \cos \Theta \tilde{\varepsilon}_1(0)$
α_2	$j \frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\mu}_0}} \cos \Theta \tilde{\mu}_1(0) A_0$	$j \frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\varepsilon}_0}} \cos \Theta \tilde{\varepsilon}_1(0) A_0$
β_1	$j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\mu}_2 - \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{\mu}_0 \sin^2 \Theta}$	$j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\mu}_2 - \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{\mu}_0 \sin^2 \Theta}$
	$\frac{\tilde{\mu}_2(a)}{\tilde{\mu}_2}$	$\frac{\tilde{\varepsilon}_2(a)}{\tilde{\varepsilon}_2}$
β_2	$-j \frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\mu}_2 - \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{\mu}_0 \sin^2 \Theta}$	$-j \frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\mu}_2 - \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{\mu}_0 \sin^2 \Theta}$
	$\frac{\tilde{\mu}_1(a)}{\tilde{\mu}_2} B_2$	$\frac{\tilde{\varepsilon}_1(a)}{\tilde{\varepsilon}_2} B_2$

Ekkor természetesen $A_2 = \Gamma(\Theta)$ és $B_0 = T(\Theta)$ a reflexiós illetve az átviteli tényező.

A Maxwell egyenletekből a már korábban említett határfeltételek figyelembevételével — a $z=0$ és a $z=a$ helyen az \vec{E} és \vec{H} vektor tangenciális összetevői folytonosan mennek át — $\Phi(z)$ -re az alábbi Sturm—Liouville-féle paramórték-feladatot kapjuk [16]

$$-\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{d\Phi(z)}{dz} \right] + q(z)\Phi(z) = 0 \quad 0 < z < a \quad (7.a)$$

$$\left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z=0} + \alpha_1 \Phi(0) + \alpha_2 = 0 \quad (7.b)$$

$$\left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z=a} + \beta_1 \Phi(a) + \beta_2 = 0 \quad (7.c)$$

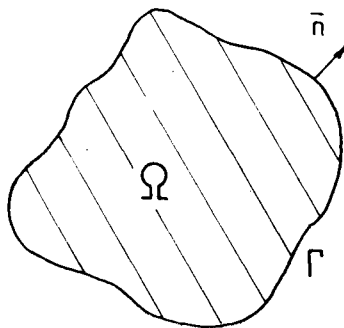
A 7. képletben szereplő $p(z)$, $q(z)$, α_1 , α_2 , β_1 , β_2 kifejezések jelentését mind a két típusú polarizációra az I. táblázatban közöljük.

Feladatunk ezek után a (7) peremérték-feladat megoldása. Ha ezt már megoldottuk, akkor könnyen meg tudjuk határozni a keresett B_0 és A_2 értéket az alábbi összefüggések segítségével:

$$\begin{aligned} B_0 &= \Phi(0) - A_0 \\ A_2 &= \Phi(a) - B_2 \end{aligned} \quad (8)$$

ahol A_0 -t és B_2 -t már korábban előírtuk, például a pozitív z irányú hullámterjedési modell esetén ($A_0 = 1$, $B_2 = 0$, $B_0 = \Gamma(\Theta) = \Phi(0) - 1$, $A_2 = T(\Theta) = \Phi(a)$).

Megjegyezzük, hogy a (7) egyenletrendszerrel az eredeti — $-\infty < z < \infty$ térre vonatkozó feladatot egy $0 \leq z \leq a$ véges térrészre vonatkozó feladatra redukáltuk, felhasználva a sugárzási feltételt a végtelenben és a határfeltételeket a $z=0$ és a $z=a$ helyeken. A (7) peremérték feladatnak több megoldási módja létezik [9], melyek közül a numerikus megoldásra legmegfelelőbb a bevezetőben már említett variációs elv és az általunk is használt súlyozott reziduum módszer.



H282-2

2. ábra. A peremérték-feladat geometriája. Ω a vizsgált tartomány, Γ az Ω -t határoló peremgörbe, \vec{n} a Γ görbe kifelé mutató normálvektora

3. A súlyozott reziduum módszer elve

A súlyozott reziduum módszer elvét az alábbi kétdimenziós feladaton mutatjuk meg (2. ábra). A keresett függvénynek az Ω tartományon a következő differenciálegyenletet kell kielégítenie

$$D(\Phi) = L(\Phi) + p = 0 \quad (9.a)$$

ahol L lineáris differenciáloperátor, p a Φ -től nem függő, ismert függvény, Φ pedig a differenciálegyenletet kielégítő megoldás. Az Ω tartományt határoló zárt Γ görbén a megfelelő peremfeltételt általánosan az alábbi módon írhatjuk elő:

$$P(\Phi) = M(\Phi) + r = 0 \quad (9.b)$$

ahol M lineáris differenciáloperátor és r a p -hez hasonlóan Φ -től nem függő ismert függvény.

A leggyakrabban előforduló három nem homogén típusú peremfeltétel a következő:

Dirichlet típusú peremfeltétel

$$M(\Phi) = \Phi \quad r = -g \quad (10.a)$$

Neumann típusú peremfeltétel

$$M(\Phi) = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad r = -h \quad (10.b)$$

„Kevert” peremfeltétel

$$M(\Phi) = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} + k\Phi \quad r = -f \quad (10.c)$$

ahol $\frac{\partial}{\partial n}$ a Γ görbén az \vec{n} normális irányú deriválást jelenti, k , g , h , f pedig a Φ -től nem függő ismert függvények. A 9. a és 9. b-t egyszerre kielégítő Φ megoldást az alábbi függvénytörrel közelítjük

$$\Phi \cong \hat{\Phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (11)$$

ahol az N_m -k a választott bázisfüggvények és az a_m -k ezek együtthatói. Az N_m bázisfüggvényeknek az adott Ω tartományon szakaszonként n -szer folytonosan differenciálhatónak kell lenniük, ha itt a megoldandó differenciálegyenlet n -ed rendű (L n -ed rendű differenciáloperátor). Ha most a (9.a) és (9.b)-ben a pontos Φ megoldás helyett a (11) közelítő függvényt használjuk, akkor az Ω tartományon és a Γ peremen a hibát a következőképpen írhatjuk fel:

$$R_\Omega = D(\hat{\Phi}) = L(\hat{\Phi}) + p \quad (12)$$

$$B_\Gamma = p(\hat{\Phi}) = M(\hat{\Phi}) + r$$

A hiba súlyozott összegét az Ω tartományon és a peremen az alábbi integrál segítségével minimalizálhatjuk

$$\int_{\Omega} W_I B_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_I R_I d\Gamma = 0 \quad (13)$$

ahol W_I és \bar{W}_I alkalmasan választott súlyfüggvények, melyeket általában egymástól függetlenül választhatunk meg.

Ha a (13) egyenlet nagyszámú független W_l és \bar{W}_l -re teljesül, akkor a $\hat{\Phi}$ egyre jobban közelíti a pontos Φ megoldást, feltéve, hogy a (11) közelítésben használt N_m bázisfüggvények száma ennek megfelelően tetszőlegesen növelhető. A (12) és (11) képletet (13)-ba behelyettesítve a kapott egyenletrendszer felírhatjuk az alábbi mátrix egyenlettel:

$$K a = f \quad (14.a)$$

ahol

$$K_{l,m} = \int_{\Omega} W_l L(N_m) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l M(N_m) d\Gamma \quad (14.b)$$

$$f_l = - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{W}_l r d\Gamma \quad (14.c)$$

Itt $K_{l,m}$ a K mátrix l . sorának és m . oszlopának eleme, f_l pedig az f oszlopvektor l . eleme. A keresett a együtthatóvektort ezeketán a következő egyenlet határozza meg:

$$a = K^{-1} f \quad (15)$$

A W_l és \bar{W}_l választásától függően a megoldásra a gyakorlatban több módszer terjedt el.

a) Kollokáció

Ekkor $W_l = \delta(r-r_l)$, azaz súlyfüggvényrendszernek a Dirac-féle delta-függvények rendszerét választjuk. Ebben az esetben $l=m$.

b) Túlhátságos kollokáció

Ez a kollokáció speciális esete, amikor a súlyfüggvényrendszer ugyanaz, mint az egyszerű kollokációnál, de $l > m$.

c) Galerkin módszer [7] [8]

Ebben az esetben a bázisfüggvények rendszere megegyezik a súlyfüggvényrendszerrel, azaz $W_l = N_l$.

Az irodalomban még számos módszer található (Rayleigh—Ritz módszer, legkisebb négyzetek elve stb.), amelyek szintén a súlyozott reziduum módszer elvére épülnek.

Megjegyezzük, hogy ha bázisfüggvényrendszernek olyan függvényosztályt választunk, amely automatikusan kielégíti a (9.a) egyenletet az Ω tartományon, akkor a (13) egyenlet az alábbi egyszerű formára redukálódik:

$$\int_{\Gamma} \bar{W}_l R_r d\Gamma = 0 \quad (16)$$

Ekkor csak a peremen kell a hibát a (16) segítségével minimalizálni. Ezt az eljárást határelem módszernek (Boundary Element Techniques) nevezik [17].

4. A feladat megoldása a súlyozott reziduum módszer segítségével

Az általános (13) súlyozott reziduum formulát alkalmazva a (7) peremérték-feladatra az alábbi egyenletet kapjuk

$$\int_0^a W_l(z) \left[\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{d\hat{\Phi}(z)}{dz} \right) + q(z) \hat{\Phi}(z) \right] dz + \left[\bar{W}_l(z) \left(\frac{d\hat{\Phi}(z)}{dz} + \alpha_1 \hat{\Phi}(z) + \alpha_2 \right) \right]_{z=0} + \left[\bar{W}_l(z) \left(\frac{d\hat{\Phi}(z)}{dz} + \beta_1 \hat{\Phi}(z) + \beta_2 \right) \right]_{z=a} = 0 \quad (17)$$

ahol $W_l(z)$ és $\bar{W}_l(z)$ alkalmasan választott súlyfüggvények és

$$\Phi(z) \cong \hat{\Phi}(z) = \sum_{m=1}^M a_m N_m(z) \quad (18)$$

ahol az $N_m(z)$ -k a $\Phi(z)$ függvény közelítésében használt bázisfüggvények és a_m ezek együtthatói. A (7.b) és (7.c) egyenleteket a (17) mint természetes határfeltételt veszi figyelembe.

A (17) képletben az első tagot — Green tételét felhasználva — a következő alakra hozhatjuk:

$$\int_0^a W_l \frac{d}{dz} \left(p \frac{d\hat{\Phi}}{dz} \right) dz = - \int_0^a p \frac{dW_l}{dz} \frac{d\hat{\Phi}}{dz} dz + \left[W_l p \frac{d\hat{\Phi}}{dz} \right]_{z=0}^{z=a} \quad (19)$$

(A függvények z -től való függésének jelölését a tömörebb írásmód kedvéért elhagytuk.)

Ezzel az átalakítással elértük, hogy a (17)-ben szereplő $\hat{\Phi}(z)$ -nek, illetve az $N_m(z)$ függvényeknek már csak egyszer folytonosan differenciálhatónak kell lenniük. Ez a bázisfüggvényrendszer megválasztásánál nagyobb szabadságot biztosít.

Mivel a W_l és \bar{W}_l súlyfüggvények egymástól függetlenek, ezért \bar{W}_l -t a következőképpen választjuk:

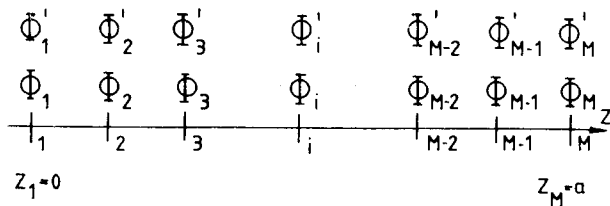
$$[\bar{W}_l]_{z=0} = [W_l \cdot p]_{z=0} \quad (20)$$

$$[\bar{W}_l]_{z=a} = -[W_l \cdot p]_{z=a}$$

W_l megválasztásánál Galerkin módszerét alkalmazzuk. Azért éltünk ezzel a választással, mert ekkor a kapott egyenletrendszer együtthatómátrixa szimmetrikus lesz, ami megkönnyíti a numerikus kiértékelést. A (17) egyenlet ezek után (18), (19) és (20) felhasználásával és $W_l = N_l$ választással az alábbi lesz

$$\int_0^a \left[p \frac{dN_l}{dz} \frac{d\hat{\Phi}}{dz} - q \hat{\Phi} N_l \right] dz - [N_l p (\alpha_1 \hat{\Phi} + \alpha_2)]_{z=0} + [N_l p (\beta_1 \hat{\Phi} + \beta_2)]_{z=a} = 0 \quad (21)$$

Itt jegyezzük meg, hogy a (21) egyenlet ebben a formájában csak akkor használható, ha az $\tilde{\varepsilon}_1(z)$ és $\tilde{\mu}_1(z)$ folytonosan változik az $z \in [0, a]$ tartományban. Ha e függvények valamelyike is ugrást tartalmaz, pl. a $z_i \in (0, a]$ pontban, akkor a (21) integrál két részre válik szét:



H282-3

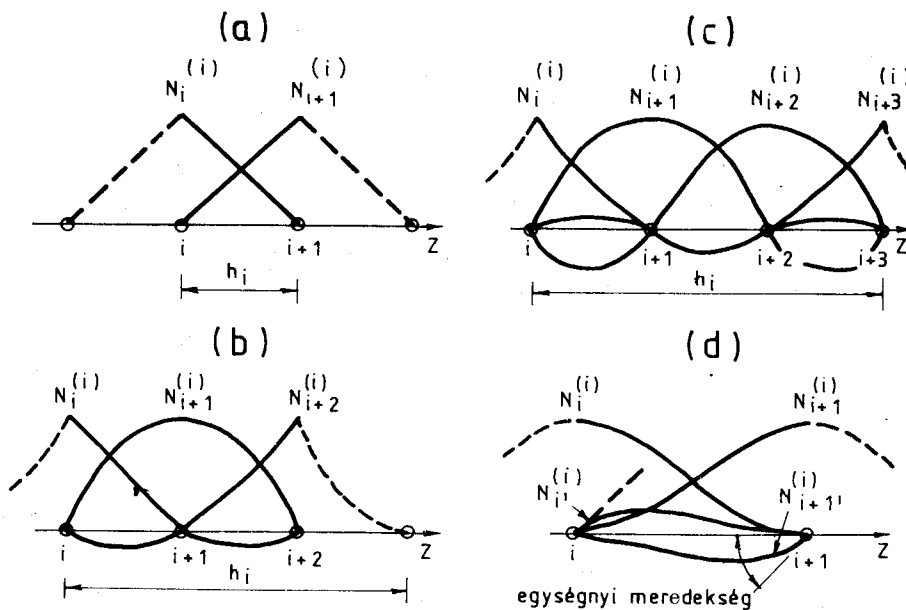
3. ábra. A $z \in [0, a]$ intervallum felosztása $(M-1)$ számú azonos hosszúságú szakaszra. $h=a/(M-1)$, $z_i=(i-1)h$

$$\left[\int_0^{z_i^-} + \int_{z_i^+}^a \right] \left(p \frac{dN_i}{dz} - \frac{d\hat{\Phi}}{dz} - q\hat{\Phi}N_i \right) dz -$$

$$- [N_l p(\alpha_1 \hat{\Phi} + \alpha_2)]_{z=0^+} + [N_l p(\beta_1 \hat{\Phi} + \beta_2)]_{z=a} \quad (22)$$

ahol $l=1, 2, \dots, M$

A (22)-t kielégítő $\hat{\Phi}(z)$ függvénynek eleget kell tennie a (7.a) differenciálegyenletnek a $(0, z_i^-)$ és a (z_i^+, a) tartományban, teljesítenie kell a (7.b) és (7.c) peremfeltételeket a $z=0$ illetve $z=a$ pontokban, valamint ki kell elégítenie a folytonossági feltételt a $z=z_i$ pontban, ami nem jelent mást, mint azt a két feltétel figyelembevételét, hogy \bar{E} és \bar{H} vektor tangenciális komponensei a $z=z_i$ pontban folytonosan merrek át, vagyis



H282-4

4. ábra. A négy leggyakrabban használt bázisfüggvényrendszer. h_i az i . elem hossza, $N^{(i)} \dots$ -k az i . elemen nemzérus bázisfüggvények, a. lineáris, b. négyzetes, c. köbös, d. Hermite bázisfüggvényrendszer esetén

$$\Phi(z_i^-) = \Phi(z_i^+)$$

$$p(z_i^-) \frac{d\Phi}{dz}(z_i^-) = p(z_i^+) \frac{d\Phi}{dz}(z_i^+) \quad (23)$$

A (23) nem más, mint a (22) súlyozott reziduum formula természetes folytonossági feltétele.

Az előbb említett eljárással a súlyozott reziduum formula már $\tilde{\epsilon}_1(z)$ -ben és $\tilde{\mu}_1(z)$ -ben tetszőleges (véges) számú ugrást tartalmazó közegre is felírható.

Ez a két egyenlet — (21) és (22) — már minden szükséges információt tartalmaz, a folyamatot leíró differenciálegyenletet (7.a), a határfeltételeket a $z=0$ és $z=a$ helyeken (7.b), (7.c) és a folytonossági feltételt (23). Ezt az egyenletet fogjuk a következőkben a végeselem módszer segítségével numerikusan kiértékelni.

5. Numerikus kiértékelés a végeselem módszerrel

A végeselem módszer alkalmazása a mi esetünkben nem jelent mást, mint azt, hogy a (18) közelítésben az N_m bázisfüggvényrendszer nem az egész $(0 \leq z \leq a)$ tartományban értelmezett függvények alkotják, hanem csak bizonyos rész-tartományokon nem zérus értékű függvények. Hogy a numerikus kiértékelést megkönnyítsük, ahhoz N_m speciális választásával kell élnünk. Osszuk fel a $z \in [0, a]$ tartományt $(M-1)$ számú egyenlő hosszúságú szakaszra (3. ábra).

A $\Phi_i = \Phi(z=z_i)$, $\Phi'_i = \frac{d\Phi}{dz}(z=z_i)$ a $\Phi(z)$ illetve a $\frac{d\Phi}{dz}$ függvény $z=z_i$ pontban felvett értékét

jelent. A $z \in [0, a]$ tartományt a bázisfüggvény-választásnak megfelelően különböző hosszúságú elemekre osztjuk fel. A négy leggyakrabban használt bázisfüggvényrendszer (lineáris, négyzetes, köbös [7], Hermite [8]) részletesen is tárgyaljuk a következőkben (ld. 4. ábra).

Az N_m bázisfüggvényt úgy választjuk meg, hogy egy adott (i) pontban az értéke egységnyi legyen az összes többi metszéspontban pedig zérus $N_m(z=z_i) = 1$ $i = 1, 2, \dots, M$ és $N_m(z \neq z_i) = 0$.

a) *Lineáris bázisfüggvényrendszer (4.a. ábra)*

Ekkor az i elem a z_i és z_{i+1} pont által meghatározott szakasz. Az i elem hossza $h_i = z_{i+1} - z_i = \frac{a}{M-1}$

Az i elem a két nem azonos zérus bázisfüggvény az N_i és az N_{i+1} .

Ha helyi koordinátát definiálunk, ahol

$$\xi = \frac{2(z - z_i)}{h_i} \quad (24)$$

és z_c^i — az i elem középpontjának koordinátája, akkor $\xi \in [-1, 1]$ és ezzel a helyi koordinátával már könnyen fölírhatjuk az N_i és N_{i+1} -t.

$$N_i^{(i)} = -\frac{\xi - 1}{2} \quad N_{i+1}^{(i)} = \frac{\xi + 1}{2} \quad (25)$$

ahol $i = 1, 2, \dots, M-1$.

(A felső zárójeles i betű az elem azonosítási számát jelenti.)

b) *Négyzetes bázisfüggvényrendszer (4.b. ábra)*

Ebben az esetben az i elem a z_i és z_{i+2} pontok által meghatározott szakasz. Az elem hossza

$$h_i = z_{i+2} - z_i = \frac{2 \cdot a}{M-1}$$

ahol $i = 2n-1, n = 1, 2, \dots, (M-1)/2$

Az i elem a három nem azonos zérus értékű bázisfüggvény $N_i^{(i)}, N_{i+1}^{(i)}$ és $N_{i+2}^{(i)}$ melyek az előzőekben definiált helyi koordináta (ξ) segítségével kifejezve a következők:

$$N_i^{(i)} = -\frac{\xi(\xi-1)}{2} \quad N_{i+1}^{(i)} = -(\xi-1)(\xi+1) \quad (26)$$

$$N_{i+2}^{(i)} = \frac{\xi(\xi+1)}{2}$$

c) *Köbös bázisfüggvényrendszer (4.c. ábra)*

Most az i elemet a z_i és a z_{i+3} pont határozza meg. Az elem hossza ebben az esetben

$$h_i = \frac{3a}{(M-1)}$$

Az i elem a nem azonosan zérus négy bázisfüggvényt a (27) képlet adja, a ξ helyi koordinátát használva.

$$N_i^{(i)} = -\frac{9}{16} \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1)$$

$$N_{i+1}^{(i)} = \frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1)$$

$$N_{i+2}^{(i)} = -\frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1)$$

$$N_{i+3}^{(i)} = \frac{9}{16} (\xi + 1) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \quad (27)$$

ahol $i = 3n-2, n = 1, 2, \dots, (M-1)/3$.

A kijelölt pontok száma M , természetesen illeszkedik a használt bázisfüggvényrendszerhez, ami azt jelenti, hogy négyzetes bázisfüggvényrendszer esetén M páratlan szám lehet csak, köbös bázisfüggvényrendszer esetén M -nek olyannak kell lennie, hogy az $(M-1)/3 =$ természetes szám feltétel teljesüljön, míg lineáris bázisfüggvényrendszer esetén M tetszőleges természetes szám lehet.

Ha az előző 3 esetben azonos hosszúságú elemeket használunk, akkor a legpontosabb eredményt és a leggyorsabb konvergenciát a köbös bázisfüggvényrendszerrel érhetjük el, míg a legkevésbé egzakt eredményt a lineáris bázisfüggvényrendszer szolgáltatja. Természetesen magasabb fokszámú polinomot tartalmazó bázisfüggvényeket is használhatunk, — ami növeli a pontosságot és gyorsítja a konvergenciát [7] — de, mint majd a továbbiakban látni fogjuk, a kapott egyenletrendszerhez tartozó együtthatómátrix sávmátrix lesz, melynek sáv szélessége a felhasznált polinom fokszámával egyenlő mértékben nő. Néhány esetben nemcsak a $\Phi(z)$ függvény szükséges, hanem annak deriváltja is $\Phi'(z)$, amit az a, b, és c, pontban leírt bázisfüggvényekkel nehezen és pontatlanul lehet csak meghatározni. E problémát könnyen áthidalhatjuk, ha a Hermite bázisfüggvényrendszert használjuk.

d) *Hermite bázisfüggvényrendszer (4.d. ábra)*

Ebben az esetben az i elem hossza $h_i = z_{i+1} - z_i$, ami a z_i és z_{i+1} pont által meghatározott szakasz. Mivel most nemcsak a keresett $\Phi(z)$ függvény értékét akarjuk meghatározni, hanem annak deriváltját is, ezért minden egyes elem a négy nem azonosan zérus bázisfüggvényt írunk elő.

Ezek közül kettő $N_i^{(i)}$ és $N_{i+1}^{(i)}$ a z_i illetve a z_{i+1} pontban veszi fel az egységnyi értéket, míg az $N_i^{(i)}$ és az $N_{i+1}^{(i)}$ olyan, hogy az előbbi két pontban a deriváltjuk lesz egységnyi. A már korábban bevezetett helyi koordinátát használva a függvények a következők lesznek.

$$N_i^{(i)} = \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3) \quad N_{i+1}^{(i)} = \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3) \quad (28)$$

$$N_i^{(i)'} = \frac{h_i}{8} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$N_{i+1}^{(i)'} = \frac{h_i}{8} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

ahol $i = 1, 2, \dots, M-1$.

Az előbbieken leírt bázisfüggvény választással a $\hat{\Phi}$ közelítő függvény az alábbi lesz (a, b, és c eset)

$$\Phi \cong \hat{\Phi} = \sum_{m=1}^M \Phi_m N_m \quad (29)$$

ahol Φ_m az m . metszéspontban a Φ értéke, N_m pedig ugyanabban a pontban a nem zérus értékű bázisfüggvény

$$N_m(z=z_m) = 1$$

A d, esetben, azaz Hermite bázisfüggvény esetén, még a Φ deriváltjára is kapunk egy közelítő függvényt.

$$\Phi' = \hat{\Phi}' = \sum_{m=1}^M \Phi'_m N_m \quad (30)$$

A (29)-t illetve a (29) és (30)-t beírva a (21)-be egy komplex együtthatós lineáris egyenletrendszerhez jutunk.

Az egyenletrendszert tömören az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$K \Phi = f \quad (31.a)$$

ahol

$$K_{l,m} = \int_0^a \left(p \frac{dN_l}{dz} \frac{dN_m}{dz} - q N_l N_m \right) dz - [p\alpha_1 N_l N_m]_{z=0} + [p\beta_2 N_l N_m]_{z=a} \quad (31.b)$$

$$f_l = [p\alpha_2 N_l]_{z=0} - [p\beta_2 N_l]_{z=a} \quad (31.c)$$

$$1 \leq l, m \leq M$$

és

$$\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots \Phi_M]^T \quad (31.d)$$

lineáris, négyzetes és köbös bázisfüggvényrendszert használva, míg

$$\Phi = [\Phi'_1 \Phi'_2 \Phi'_3 \dots \Phi'_M \Phi_M]^T \quad (31.e)$$

Hermite bázisfüggvényt alkalmazva.

A $z \in [0, a]$ tartományt E számú elemre felosztva K és f felbontható az alábbi összegre:

$$K = \sum_{i=1}^E K^{(i)} \quad f = \sum_{i=1}^E f^{(i)} \quad (32)$$

ahol

$$K_{l,m}^{(i)} = \int_{\Omega_i} \left(p \frac{dN_l^{(i)}}{dz} \frac{dN_m^{(i)}}{dz} - q N_l^{(i)} N_m^{(i)} \right) dz - [p\alpha_1 N_l^{(i)} N_m^{(i)}]_{z=0} + [p\beta_1 N_l^{(i)} N_m^{(i)}]_{z=a} \quad (33)$$

$$f_l^{(i)} = [p\alpha_2 N_l^{(i)}]_{z=0} - [p\beta_2 N_l^{(i)}]_{z=a} \quad (34)$$

Ω_i — az (i) tartomány.

Megjegyezzük, hogy ha (22)-t oldjuk meg, akkor olyan felosztást kell használnunk, hogy a z_i pont egybeessen valamelyik metszésponttal és figyelembe kell vennünk a (23) természetes folytonossági feltételeket.

Ha az előbbieken leírt bázisfüggvényeket használjuk, akkor a K mátrix szimmetrikus sávmátrix

lesz, melynek sáv szélessége 1, 2 vagy 3, attól függően, hogy a lineáris a négyzetes, vagy a köbös illetve Hermite bázisfüggvényrendszert használtuk-e. Az eljárás konvergencia sebességét kétféleképpen gyorsíthatjuk. Az egyik esetben az azonos elemszámot megtartva ($E = \text{const.}$) a használt bázisfüggvényrendszer fokszámát növeljük és ezáltal gyorsul a konvergencia. A másik esetben a használt bázisfüggvényrendszert hagyjuk változatlanul, csak a felosztást finomítjuk, azaz E -t növeljük. Mi a számításaink során az utóbbi módszert választottuk.

6. A számítógépes analízis eredményei

Ebben a részben ahogy már a bevezetőben említettük, két gyakorlati feladatot oldunk meg, és részletesen elemezzük a kapott eredményeket. A problémát mindkét esetben egy pozitív z irányba történő hullámterjedési modellre vezetjük vissza. Ekkor $A_0 = 1$, $B_2 = 0$, $B_0 = \Gamma(\Theta)$ (reflexiós tényező) és $A_2 = T(\Theta)$ (átviteli tényező). A számítások eredményeit grafikusan közöljük.

A. Inhomogén tápvonalátmenet

A tápvonalelméletből ismert, hogy adott z pontban a tápvonal hullámimpedanciája

$$Z_0 = \sqrt{L(z)/C(z)} \quad (35)$$

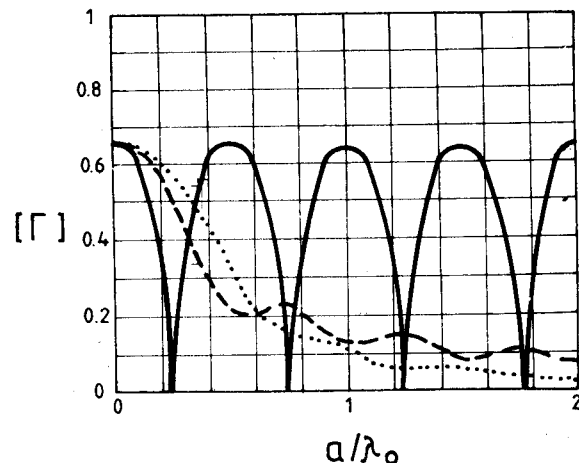
ahol $L(z)$ a tápvonal hosszegységre eső induktivitása és $C(z)$ a tápvonal hosszegységre eső kapacitása a z helyen.

$L(z)$ és $C(z)$ kifejezhető a közeg dielektromos és mágneses paramétereivel [4]

$$L(z) = \mu_0 \tilde{\mu}(z)$$

$$C(z) = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}(z) \quad (36)$$

A hullámterjedést normál beesésnél vizsgálva ($\Theta = 0^\circ$) és a (35), (36) képletet figyelembe véve,



H282-5

5. ábra. A bemeneti reflexiós tényező abszolút értéke, a/λ_0 függvényében, ahol a az inhomogén átmenet hossza. Negyedhullámú transzformátor (folytonos vonal), lineáris átmenet (szaggatott vonal), köbös átmenet (pontozott vonal)

A három homogén rétegből álló rendszer egyes rétegeire vonatkozó elektromágneses paraméterek mért értékei

Réteg	Re($\tilde{\epsilon}$)	Im($\tilde{\epsilon}$)	Re($\tilde{\mu}$)	Im($\tilde{\mu}$)
1	1,3	-0,023	0,988	-0,161
2	1,38	-0,037	0,981	-0,256
3	2,141	-0,406	0,971	-0,806

hullámterjedési modellünkkel tetszőleges lezárások között működő veszteségmentes inhomogén tápvonalátmenet vizsgálható.

Mi Z_0 és $5 Z_0$ hullámimpedanciójú az egyik irányban végtelen hosszúságú ($z < 0$, $z > a$) tápvonalak között működő veszteségmentes inhomogén átmeneteket vizsgáltunk. Öt különböző átmeneten végeztünk analízist. Az 5. ábrán egy negyedhullámú transzformátor egy lineáris és egy a hullámimpedanciában harmadfokú függvény szerint változó inhomogén átmenetre adtuk meg a bemeneti reflexiós tényező abszolút értékét a/λ_0 függvényében. Itt a az inhomogén átmenet hossza, λ_0 pedig a szabadtéri hullámhossz. Az egyes rétegek paraméterei pedig az előzőeknek megfelelően a következők:

$$\tilde{\mu}_0 = \tilde{\epsilon}_0 = 1, \tilde{\mu}_2 = 1/\tilde{\epsilon}_2 = 5 \quad (37.a)$$

$$\tilde{\mu}_1(z) = 1/\tilde{\epsilon}_1(z) = \sqrt{5}$$

negyedhullámú transzformátor (37.b)

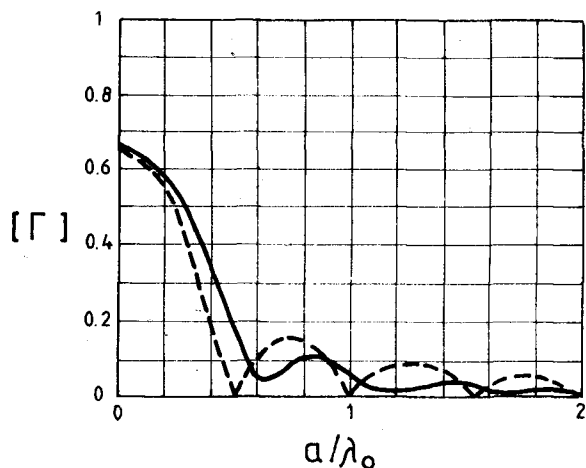
$$\tilde{\mu}_1(z) = 1/\tilde{\epsilon}_1(z) = 1 + 4 z/a \text{ lineáris} \quad (37.c)$$

$$\tilde{\mu}_1(z) = 1/\tilde{\epsilon}_1(z) = 1 + 12(z/a)^2 - 8(z/a)^3 \text{ köbös} \quad (37.d)$$

A 0 réteg megfelel a Z_0 hullámimpedanciájú, egyik irányban végtelen hosszúságú tápvonalnak, ($z < 0$), a 2. réteg pedig az $5 Z_0$ hullámimpedanciájú a másik irányban végtelen kiterjedésű ($z > a$) tápvonalnak.

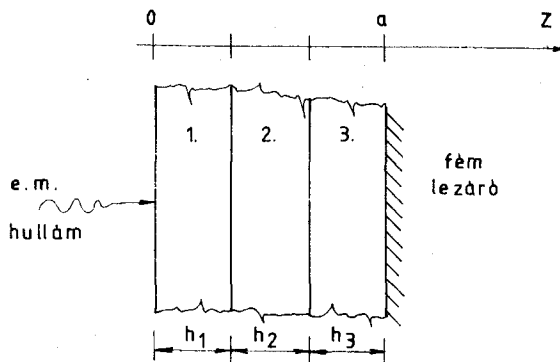
A közbenső 1. réteg ($z \in [0, a]$) modellezi az inhomogén átmenetet, ahol a hullámimpedancia helyfüggését (35) képletbe helyettesítve a (37) b, c és d egyenletek határozzák meg, a három vizsgált esetben megfelelően.

A 6. ábra egy szinuszos és egy exponenciális átmenet esetén mutatja a bemeneti reflexiós tényező abszolút értékét a/λ_0 függvényében. Az egyes rétegek paraméterei pedig az alábbiak:



H282-6

6. ábra. A bemeneti reflexiós tényező abszolút értéke a/λ_0 függvényében, ahol a az inhomogén átmenet hossza. Szinuszos átmenet (folytonos vonal,) exponenciális átmenet (szaggatott vonal)



H282-7

7. ábra. Három homogén rétegből összeállított rendszer modellje. A harmadik réteget fémfal zárja le. Az egyes rétegek vastagsága $h_1 = h_2 = h_3 = a/3$

$$\tilde{\mu}_1(z) = 1/\tilde{\epsilon}_1(z) = 5 - 4 \sin\left[\frac{\pi}{2}(1 - z/L)\right] \quad (38.a)$$

szinuszos átmenet esetén

$$\tilde{\mu}_1(z) = 1/\tilde{\epsilon}_1(z) = e^{1,61 \cdot z/L} \quad (38.b)$$

exponenciális átmenet esetén:

$\tilde{\epsilon}_0, \tilde{\mu}_0, \tilde{\epsilon}_2, \tilde{\mu}_2$ pedig megegyezik a (37.a)-val.

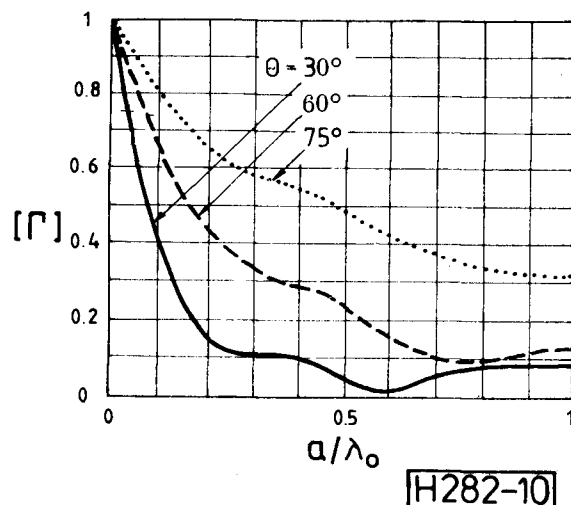
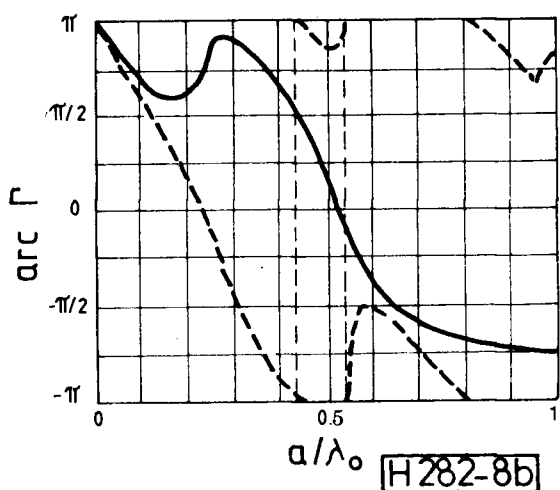
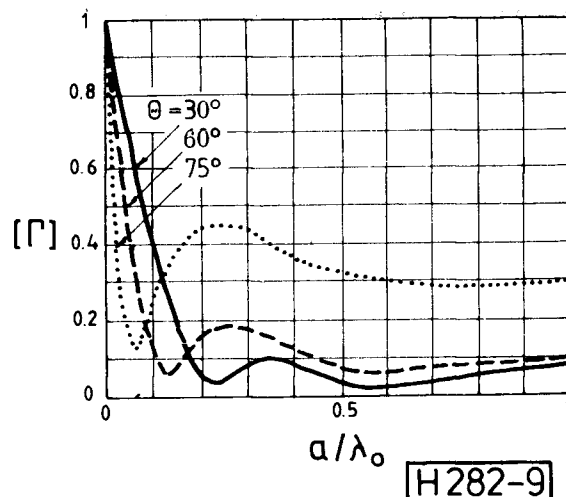
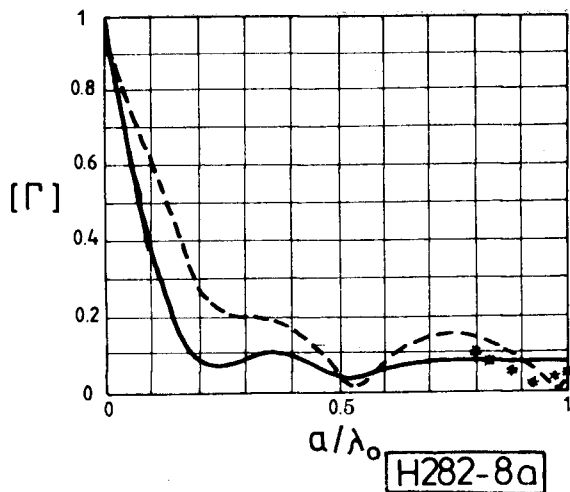
Az ábrákból jól látszik, hogy tökéletes illesztést ($\Gamma = 0$) csak a negyedhullámú transzformátor és az exponenciális átmenet biztosít. Az első esetben $a/\lambda_0 = 0,25 n$ míg a másik esetben $a/\lambda_0 = 0,25(n + 1)$ helyeken, ahol $n = 1, 3, 5, \dots$

Tökéletes illesztést egyik átmenet sem létesít széles sávban. A lineáris, a köbös és a szinuszos átmenetek ezzel szemben sehol sem adnak tökéletes illesztést. Gyakorlati jelentőségük mégis igen nagy, mert széles sávban kis reflexiójú illesztést eredményeznek. Impedanciaillesztés szempontjából a legkedvezőbb tulajdonságú a köbös és a szinuszos átmenet.

B. Reflexiómentesítő inhomogén réteg

Az inhomogén réteg analízisének az összehasonlítás érdekében először három homogén rétegből felépített rendszert vizsgálunk. A számított eredményeket ez esetben mérésekkel is ellenőriztük. Az egyes rétegek mért elektromágneses paramétereit a II. táblázat tartalmazza.

A méréseket a mikrohullámú tartományban végeztük. A vizsgált háromrétegű anyag modellje a 7. ábrán látható.



8. ábra. A felületi reflexiós tényező a. abszolút értéke, b. fázisa a/λ_0 függvényében, ahol a az inhomogén réteg hossza. Inhomogén réteg (folytonos vonal), háromrétegű anyag (szaggatott vonal), mérési eredmények (*). $\theta=0^\circ$

9. ábra. A felületi reflexiós tényező abszolút értéke párhuzamos (TM mód) polarizáció esetén a/λ_0 függvényében különböző beesési szögek mellett ($\theta=30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$)

10. ábra. A felületi reflexiós tényező abszolút értéke merőleges (TE mód) polarizáció esetén a/λ_0 függvényében különböző beesési szögek mellett ($\theta=30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$)

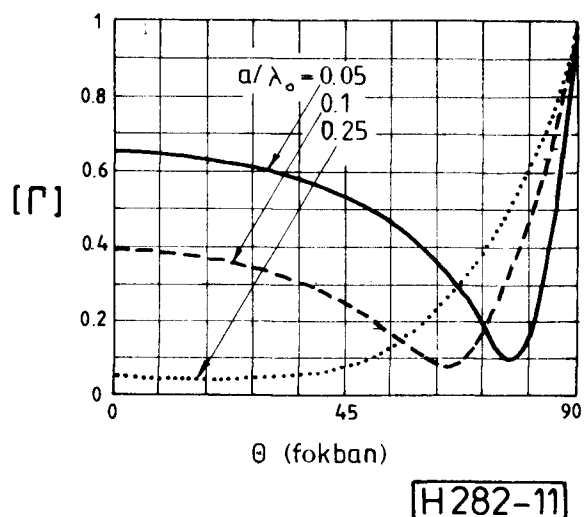
E modellen végeztük a méréseket, és a számítások egy részét. Ezután e rétegelt anyagot egy inhomogén modellel közelítettük úgy, hogy előírtuk az elektromágneses paraméterek azonosságát három különböző pontban ($z=0, z=\frac{a}{3}, z=\frac{2a}{3}$).

Az inhomogén rendszert leíró elektromágneses paraméterek az 1. ábrának megfelelően a következők:

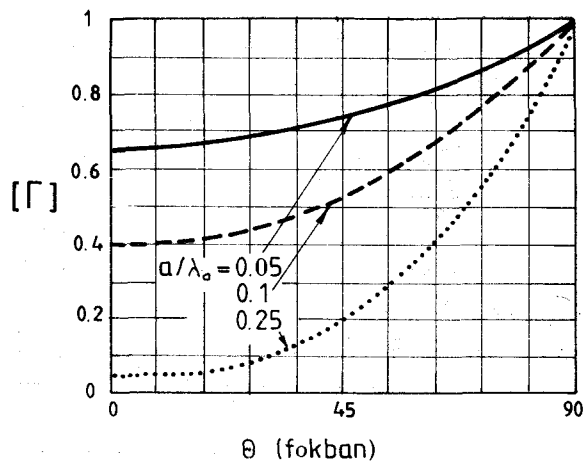
$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_1(z') &= 3,0645z'^2 - 0,7815z' + 1,3 - \\ &- j[1,5975z'^2 - 0,49z' + 0,023] \end{aligned} \quad (39.a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1(z') &= -1,3635z'^2 + 0,4335z' + 0,988 - \\ &- j[2,0475z'^2 - 0,3975z' + 0,161] \end{aligned} \quad (39.b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_0 = \tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu}_2 &= 1, \quad \tilde{\epsilon}_2 = 1 - j10^{12} \\ z' &= z/a \end{aligned} \quad (39.c)$$



11. ábra. A felületi reflexiós tényező abszolút értéke párhuzamos (TM mód) polarizáció esetén a beesési szög (θ) függvényében, különböző a/λ_0 értékek mellett ($a/\lambda_0=0,05, 0,1, 0,25$)



H282-12

12. ábra. A felületi reflexiós tényező abszolút értéke merőleges (TE mód) polarizáció esetén a beesési szög (Θ) függvényében, különböző a/λ_0 értékek mellett ($a/\lambda_0 = 0,05, 0,1, 0,25$)

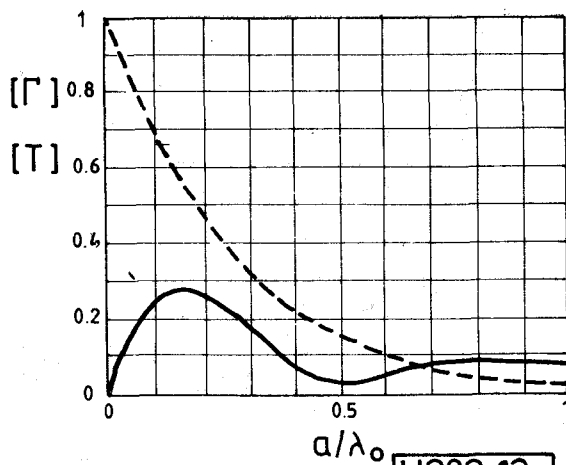
A 0. réteg ($z < 0$) megfelel a szabadtereknek ($\epsilon_0 = \mu_0 = 1$) a 2. réteg ($z > a$) megfelel a fém lezárónak

($\epsilon_2 = 1 - j10^{12}$, $\mu_2 = 1$) a közbenső 1. réteg ($0 \leq z \leq a$) pedig az inhomogén anyagnak. Kiszámítottuk, és a 8. a, 8. b. ábrán ábrázoltuk a háromrétegű és az inhomogén anyagra a bemeneti reflexiós tényező abszolút értékét és fázisát a/λ_0 függvényében $\Theta = 0^\circ$ beesésnél. Ugyanezen az ábrán a háromrétegű anyagon mért reflexiós tényező értékeit is feltüntettük. A két modellre számított görbékét összevetve, megállapíthatjuk, hogy a felületi reflexióra az inhomogén réteg kedvezőbb értékeket ad ($a/\lambda_0 > 0,2$ esetén $|\Gamma| < 0,1$). Az ábrából az is jól látszik, hogy a számított és a mért értékek igen jól egyeznek. Az inhomogén modellen további számításokat végeztünk, melyek eredményeit a 9, 10, 11, 12, és 13. ábrán közöljük. A 9. és 10. ábrán a párhuzamos és merőleges polarizációnak megfelelően a bemeneti reflexiós tényezőt ábrázoltuk $\Theta = 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ beesési szögre a/λ_0 függvényében. A 11. és 12. ábrán szintén a bemeneti reflexiós tényező látható a két polarizációra, a beesési szög (Θ) függvényében a/λ_0 -val paraméterezve. A 13. ábrán megadtuk az átviteli és reflexiós tényező értékét a/λ_0 függvényében $\Theta = 0^\circ$ beesési szögnél, de nem fémmel lezárással, hanem szabadterivel ($\epsilon_2 = \mu_2 = 1$).

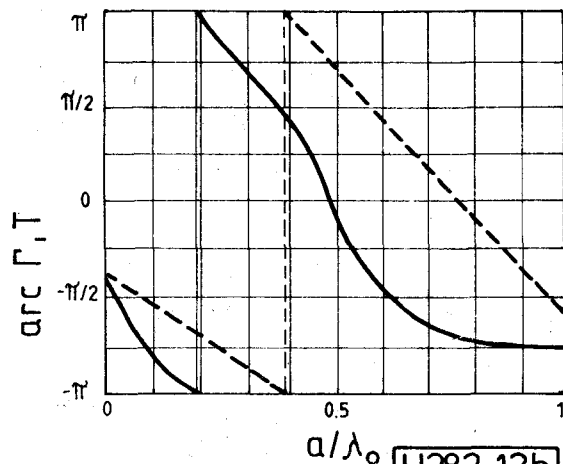
A reflexiós és átviteli görbe jellegéből jól látszik a csillapítás belső mechanizmusa vagyis, hogy miként növekszik meg nagyobb frekvenciákon az elektromos hossz, a réteg valós fizikai vastagságához képest.

Ez a jelenség a reflexiós görbén is jól látszik, ugyanis a reflexiós tényező itt már közel állandó, azaz a Γ értékét már csak a felületi reflexió határozza meg.

Számításaink során a numerikus kiértékelés hibáját úgy becsültük, hogy viszonylag nagy elemszámmal végeztünk egy futtatást ($E = 100$), majd ezt mint referenciát elfogadtuk egzaktának.



H282-13a



H282-13b

13. ábra. A felületi reflexiós és átviteli tényező a. abszolút értéke, b. fázisa a/λ_0 függvényében. Reflexiós tényező (folytonos vonal), átviteli tényező (szaggatott vonal). $\Theta = 0^\circ$, $\epsilon_0 = \mu_0 = \epsilon_2 = \mu_2 = 1$

Ezután kisebb elemszámmal dolgoztunk ($E = 20$) és összehasonlítottuk a két eredményt. $E = 20 \times (a/\lambda_0)$ elemet és lineáris bázisfüggvényrendszert használva ez a hiba kisebb volt 3%-nál.

Természetesen gyorsabban változó közeg esetén ugyanilyen pontossághoz nagyobb elemszámot kell használni. Pontosabb hibabecslési módszert ad a [15], [16] közlemény. Ez az eljárás az energiamegmaradás tételén alapszik. Ezzel a módszerrel számolt maximális hibaérték 2%, $E = 20 \cdot (a/\lambda_0)$ elem, és Hermite bázisfüggvényrendszer esetén. Ezt a hibaértéket a súlyozott reziduum módszerrel is el kell fogadnunk, mert a variációs elv és súlyozott reziduum módszer ugyanezt a mátrixegyenletet adja, ha Galerkin módszert használjuk és a folyamatot leíró differenciáloperátor (7.a) lineáris és szimmetrikus [7], [8]. Ez a Sturm—Liouville-féle feladatra teljesül.

7. Értékelés

Egydimenziós tetszőlegesen változó anyagállandójú inhomogén közeget vizsgáltunk a véges elem módszer segítségével. A problémára megfogalmaz-

tunk egy peremérték-feladatot, majd erre alkalmaztuk a súlyozott reziduum módszert, amelyről megmutattuk, hogy általánosan és igen jól használható tetszőleges peremérték-feladatesetén. Nagy előnye a variációs elvvel szemben, hogy olyan feladat esetén is használható, amikor nem létezik az adott peremérték-feladathoz tartozó funkcionál. Két gyakorlati feladatot, inhomogén tápvonalátmenet és reflexiómentesítő inhomogén réteg bemeneti reflexió és átviteli tényezőjének számítását, részletesen is tárgyaltuk. Mind a két feladathoz több megoldást is kipróbáltunk és ez utóbbi esetben méréseket is végeztünk. A számítások pontosságára becslést végeztünk.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki Dr. Zombory László docensnek a kézirat elkészítése során nyújtott szakmai segítségért, és Szekeres Béla adjunktusnak a szöveg gondos átnézéséért, a munka során nyújtott gyakorlati tanácsaiért, valamint a munkafeltételek megteremtéséért.

I R O D A L O M

- [1] *K. C. Budden*: Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge University Press, 1966.
- [2] *E. Bahar*,—*B. Agrawal*: Horizontally Polarized Waves in Inhomogeneous Media. IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP—24. No. pp. 506—515, 1976.
- [3] *E. Bahar*—*B. Agrawal*: Transmission of Horizontally Polarized Waves and Trapped Waveguide Modes in Inhomogeneous Media. IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP—25. No. 6. pp. 807—813, 1977.
- [4] *L. N. Dworsky*: Modern Transmission Line Theory and Applications John Wiley, 1979. *x*
- [5] *J. R. Wait*: Wave Propagation Theory, Pergamon, 1981.
- [6] *C. H. Chen*: An Integral Equation Formulation of the Direct Scattering Problem for an Inhomogeneous Slab IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP—26. No. 6. pp. 797—780, 1978.
- [7] *O. C. Zienkiewicz*—*K. Morgan*: Finite Elements and Approximation, John Wiley, 1983.
- [8] *A. J. Davies*: The Finite Element Method. A First Approach, Clarendon, 1980.
- [9] *F. B. Hildebrand*: Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, 1965.
- [10] *Zombory László*—*Koltai Mihály*: Elektromágneses terek gépi analízise. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [11] *Vágó István*: Végeselem módszer csőtápvonalak elektromágneses terének meghatározására. Mikrohullámú szeminárium, Budapest, 1985. jan. 15—16.
- [12] *Bárdi István*: Variational Principle of time-varying electromagnetic fields, Seventh Colloquium on Microwave Communication, Budapest, 1982. Sept. 6—10.
- [13] *S. K. Jeng*—*C. H. Chen*: On Variational Electromagnetics: Theory and Application IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. AP—32. No. 9. pp. 902—907, 1984.
- [14] *C. H. Chen*—*C. D. Lien*: The Variational Principle for Non-Self-Adjoint Electromagnetic Problems IEEE Trans. Microwave Theory, vol. MTT—28. No. 8. pp. 878—886, 1980.
- [15] *C. H. Chen*—*C. D. Lien*: A Finite Element Solution of the Wave Propagation Problem for an Inhomogeneous Dielectric Slab IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—27, No. 6. pp. 877—880, Nov. 1979.
- [16] *C. H. Chen*—*Y. W. Kiang*: A Variational Theory for Wave Propagation in a One-Dimensional Inhomogeneous Medium IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. AP—28. No. 6. pp. 762—769, Nov. 1980.
- [17] *C. A. Brebbia*—*J. C. F. Telles*—*L. C. Wrobel*: Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, 1984.