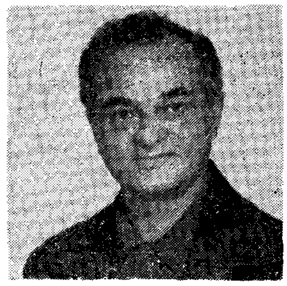
Visszacsatolt oszcillátorok zajbecslése

BÍRÓ VIKTOR
Finommechanikai Vállalat



ÖSSZEFOGLALÁS

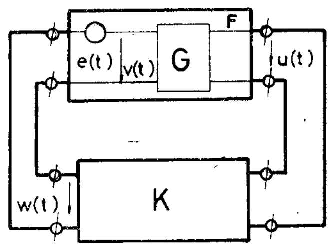
A jelen közlemény a visszacsatolt oszcillátorokra érvényes, az AM, PM és FM termikus zaj becslésére szolgáló formulákat prezentálja. A becslés alapjául az a feltételezés szolgál, hogy a zajforrás feszültsége egy keskenysávú stacionárius Gauss-féle sztochasztikus folyamattal írható le.

BÍRÓ VIKTOR

Bíró Viktor 1952-ben végezte el a BME villamosmérnöki karát. 1961-ig a Finommechanikai Vállalatnál dolgozott, ahol mikrohullámú technikával foglalkozott. 1061-ben szerezte meg műszaki kandidátus címét a ferritek mikrohullámú alkalmazása témában. 1972-ig a TKI-ban dolgozott, ahol félvezetők felhasználásával készülő mikrohullámú áramforrások (főleg varaktoros frekvencia sokszorozók) fejlesztésével foglalkozott. 1975-ben e témában szerezte meg a műszaki tudományok doktori címét. 1985-ben jelent meg „Non linear oscillations in feedback systems" című könyve. Jelenleg a Finommechanikai Vállalatnál dolgozik.

1. Bevezetés

Ezen közleményben az ún. visszacsatolt oszcillátor *AM* és *FM* zajának meghatározásáról lesz szó. Az ismertetett módszer elméleti alapjai megtalálhatók [1], [2] és [3]-ban. Az analízis alapjául szolgáló oszcillátor modelljét az *1. ábrán* láthatjuk. A „zajos" nonlineáris erősítőt (F) egy „zajmentes" G erősítő és $e(t)$ zajfeszültséggel bíró zajgenerátor reprezentálja. A K-val jelölt lineáris időinvariáns négypólus, melynek $K(\omega)$ a feszültségátviteli függvénye, az oszcillátor visszacsatoló hálózata. A továbbiakban feltételezzük, hogy $e(t)$ zajfeszültség leírható keskenysávú Gauss-féle sztochasztikus folyamattal és a G erősítő bemenő-kimenő feszültségkarakterisztikája harmadfokú polinommal helyettesíthető.



H219-1

1. ábra. A visszacsatolt oszcillátor áramköri modellje

2. Az AM, PM és FM zajok becslésére szolgáló képletek

A visszacsatolt oszcillátor AM, PM és FM zajának becslésére, a fenti feltételezések figyelembevételével levezetett képletek az alábbiak:

$$\left(\frac{N}{S}\right)_{AM}^{\frac{dBc}{Hz}} = 10\log\left(\frac{1}{2}\left|\frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)}\right|^{-2}\right) + 10\log\left(\frac{S_0}{x^2_{10}}\right) - 20\log\left(\frac{\pi B_0}{\varrho_i}\right) + 10\log\left[\frac{S_i(q_i)}{q_i^2}\right]; \quad (1)$$

$$\left(\frac{N}{S}\right)_{FM}^{\frac{dB}{Hz}} = A_i + 10\log\left(\left|\frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)}\right|^{-2}\right) + 10\log\left(\frac{S_0}{x^2_{10}}\right) + 10\log[S_i(q_i)]; \quad (2)$$

ahol $\left(\frac{N}{S}\right)_{AM}^{\frac{dBc}{Hz}}$ a vivő teljesítményéhez viszonyított az oszcillátor kimenő jel zajának teljesítményspektrál sűrűsége 1 Hz szélességű frekvenciasávban, $\left(\frac{N}{S}\right)_{FM}^{\frac{dB}{Hz}}$ pedig a 140 kHz frekvencia lökettel rendelkező jelhez viszonyított kimenő jel **FM** spektrálsűrűsége 1 Hz-es szélességű sávban. $K'(\omega_0)$ a $K(\omega)$ függvény ω szerinti deriváltja az $\omega=\omega_0$ helyen. $K_r(\omega_0)$ a $K(\omega)$ függvény reális része az $\omega=\omega_0$ helyen. ω_0 az oszcillátor körfrekvenciája. S_0/x^2_{10} kifejezést az alábbi egyenlőtlenség határozza meg

$$(F-1)\frac{2kT}{P_{in}} \leq \frac{S_0}{x^2_{10}} \leq F\,\frac{2kT}{P_{in}} \quad (3)$$

ahol F a „zajos" erősítő zajtényezője, P_{in} a nonlineáris erősítő bemenetén lévő teljesítmény, k

Beérkezett: 1986. VI. 11. (H)

a Boltzmann-féle állandó, T a környezet abszolút hőmérséklete. A $\varrho_i \cdot q_i \cdot A_i$ az alábbiak:

$$\varrho_i = \begin{cases} \sqrt{2};\ i=1 \\ \sqrt{\sqrt{n}\ \ln\alpha};\ i=2 \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} \dfrac{2|f-f_0|}{B_0};\ i=i \\ \dfrac{2|f-f_0|}{B_0}\sqrt{\ln\alpha};\ i=2 \end{cases} \tag{5}$$

$$A_i = \begin{cases} -103;\ i=1 \\ -103{,}5;\ i=2 \end{cases} \tag{6}$$

Az $S_i(q_i)$ függvény az $i=1$ és $i=2$ esetén az alábbi:

$$S_1(q_1) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cos(q_1 x) +$$

WW

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2n} \cos(q_1 x)\mathrm{d}x; \tag{7}$$

$$S_2(q_2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}q_2^2} +\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-\frac{q^2_2}{2n}}\right\}; \tag{8}$$

ahol

$$n=2;\ (2n-3)!!=1$$
$$n=3;\ (2n-3)!!=1\cdot 3$$
$$n=k;\ (2n-3)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)$$

Az F erősítő kimenő teljesítményének a frekvenciától való függését az állandó bemenő teljesítmény mellett a *2.* és *3. ábrán* láthatjuk. A *2.* ábrán levő frekvenciafüggésnél $i=1$. A 3. ábrán vázolt függés esetén $i=2$ és a kimenő teljesítmény P_{out} frekvenciafüggése az alábbi:

$$P_{\text{out}} = P_0 \exp\left\{-4\left(\frac{f-f_0}{B_0}\right)^2 \ln\alpha\right\}; \tag{8a}$$

Az (1) képlet által szolgáltatott eredmény érvényes *PM* zaj esetére is amennyiben az értéke Rad²/Hz-ben értendő.

3. Az (1) és (2) formulák levezetése

A $v(t)$ és $e(t)$ feszültségek kifejezései legyenek az alábbiak

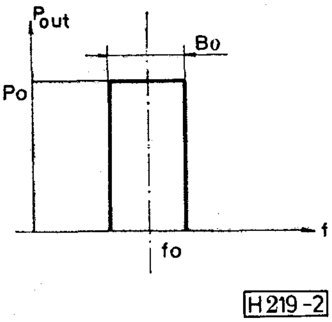
$$v(t) = x_1(t)\cos[\omega_0 t + x_2(t)]$$
$$e(t) = x_e(t)\cos[\omega_0 t + y_e(t)] \tag{9}$$

Az $x_1(t)$ és $x_2(t)$ függvények az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek

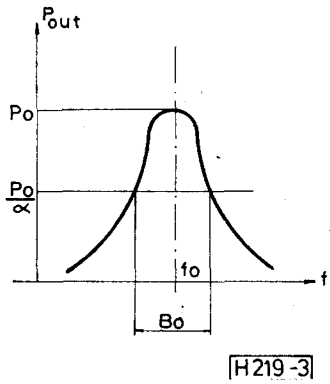
$$\frac{1}{x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \ll \omega_0;\quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \ll \omega_0$$

Ugyanez áll az $x_e(t)$ és $y_e(t)$ függvényekre is. Legyen

$$x_1(t) = x_{10} + y_A;$$
$$x_2(t) = x_{20} + y_\varphi; \tag{10}$$



2. ábra. A nonlineáris erősítő frekvencia függése $i=1$ esetén



3. ábra. A nonlineáris erősítő frekvencia függései $i=2$ esetén

ahol x_{10} és x_{20} a szabadrezgés állandó amplitudója illetve fázisa „zajmentes" esetben. Az x_{20} értéke valószínűségi változó, melynek várható értéke zérussal egyenlő és $p(x_{20})$ eloszlás sűrűsége $(2\pi)^{-1}$ Az y_1 és y_φ sztochasztikus folyamatok zérus várható értékkel. A következőkben az alábbi rövidítéseket használjuk:

$$y_a = \frac{y_A}{x_{10}};\ x(t) = \frac{x_e(t)}{x_{10}} \tag{11}$$

Felhasználva 2.1 és 2.2 pontokat [3]-ból megkapjuk a „zajos oszcillátor" differenciál egyenletét.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_a(t) \\ y_\varphi(t) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{x(t)}{|K'(\omega_0)|^2}\cdot\left\langle\left(a-\frac{9}{4}cx_{10}^2\right),\left(a-\frac{3}{4}cx_{10}^2\right)\right\rangle^{-1}\times$$

$$\times\mathbf{K}'(\omega_0)\cdot\mathrm{A}(x_{20})\cdot\begin{pmatrix} \cos[y_e(t)-y_\varphi(t)] \\ \sin[y_e(t)-y_\varphi(t)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}'(\omega_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\begin{pmatrix} K_i(\omega) & K_r(\omega) \\ K_r(\omega) & -K_i(\omega) \end{pmatrix}\Bigg|_{\omega=\omega_0} \tag{12}$$

$$\mathrm{A}(x_{20}) = \begin{pmatrix} \cos x_{20} & \sin x_{20} \\ \sin x_{20} & -\cos x_{20} \end{pmatrix}$$

A (12) differenciál egyenletben $\langle .,. \rangle^{-1}$ egy diagonál mátrix reciprokját jelenti, az a és c értékek értelmét az alábbi az erősítő bemenő-kimenő feszültség-karakterisztikáját meghatározó polinom adja

$$u(t) = av(t) — bv^2(t) — cv^3(t)$$

A (12) differenciálegyenlet segítségével meghatározhatók az $y_a(t)$ és $y_\varphi(t)$ idő szerinti deriváltjainak az ún. korrelációs függvényei [1], [2].

Ezen függvények a következők:

$$\begin{pmatrix} R\dot{y}_a(t,t-\tau) \\ R\dot{y}_\varphi(t,t-\tau) \end{pmatrix} = \qquad (13)$$

$$\frac{1}{2}\left| \frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)} \right|^{-2} \cdot E\{x(t) \cdot x(t-\tau) \cdot \cos[y_e(t) -$$

$$-y_\varphi(t) - y_e(t-\tau) + y_\varphi(t-\tau)]\} \cdot \begin{pmatrix} \xi^{-2}[1-3(1+\xi^{-1})]^{-2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

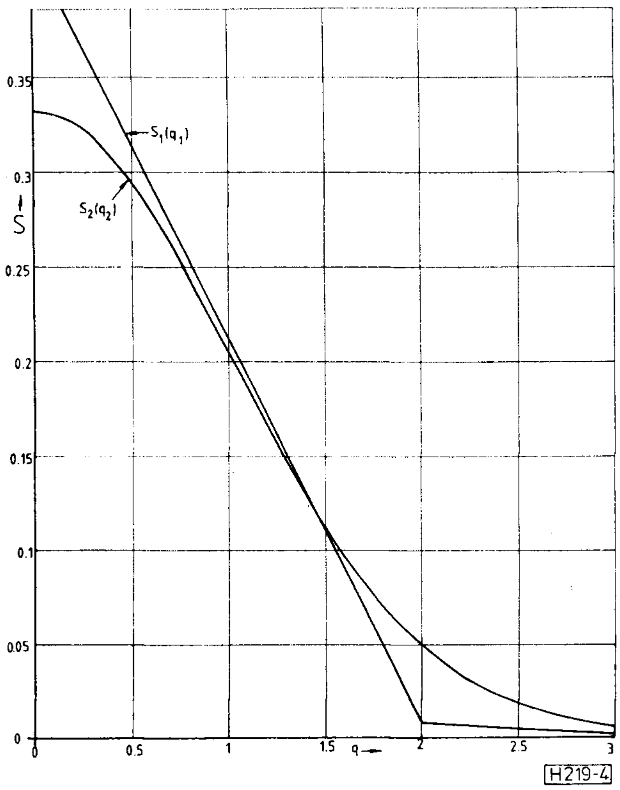
A (13) kifejezésben $R\dot{y}_a$ az y_a deriváltjának korrelációs függvénye, $R\dot{y}_\varphi$ az y_φ deriváltjának korrelációs függvénye, $E\{.\}$ jelölés várható értéket jelenti, ξ jelentése $\xi = aK_r(\omega_0)$. Ha figyelembe vesszük, hogy $x(t)$ egy stacionárius sztochasztikus folyamat, továbbá feltételezzük, hogy fennáll

$$\cos\{[y_e(t) - y_\varphi(t)] - [y_e(t-\tau) - y_\varphi(t-\tau)]\} \cong 1;$$

a (13) helyett a következő kifejezés adódik:

$$\begin{pmatrix} R\dot{y}_a(\tau) \\ R\dot{y}_\varphi(\tau) \end{pmatrix} \cong \frac{1}{2}\left| \frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)} \right|^{-2} \times$$

$$\times R_x(\tau) \cdot \begin{pmatrix} \xi^{-2}[i-3(1+\xi^{-1})]^{-2} \\ i \end{pmatrix}; \qquad (14)$$



4. ábra. Az $S_1(q_1)$ és $S_2(q_2)$ függvények

A (14) kifejezésből közvetlenül [1], [2] következik, hogy a spektrálsűrűségekre fennáll az alábbi kifejezés:

$$\begin{pmatrix} S\dot{y}_a(\Omega) \\ S\dot{y}_\varphi(\Omega) \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \frac{1}{2}\left| \frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)} \right|^{-2} S_x(\Omega) \begin{pmatrix} \xi^{-1}[1-3(1+\xi^{-1})]^{-2} \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad (15)$$

Felhasználva [3] 2.1 és 2.2 pontjait, továbbá figyelembe véve egy stacionár folyamat és idő szerinti deriváltjának spektrálsűrűségei között fennálló ismert összefüggést megkapjuk az alábbi kifejezéseket, ahol Sy_0 az 1. ábrán levő erősítő kimenő feszültségének amplitudójára vonatkozó teljesítmény spektrálsűrűsége

$$S_{yo} \cong \frac{1}{2}\left| \frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)} \right|^{-2} \cdot \frac{S_x(\Omega)}{\Omega^2}$$

$$S_{\dot{y}\varphi} \cong \frac{1}{2}\left| \frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)} \right|^{-2} S_x(\Omega) \qquad (16)$$

(mert [3] szerint fennáll $y_0 = \xi[1-3(1+\xi^{-1})]y_a$.

Az $S_x(\Omega)$ spektrálsűrűséget abból a szándékosan leegyszerűsített fizikai képből határozzuk meg, mely szerint az erősítő kimenetén mérhető zaj spektrálsűrűségének frekvenciafüggése megegyezik az erősítő bemenetén levő (lásd 1. ábrát) helyettesítő zajgenerátor spektrálsűrűségének frekvenciafüggésével. A keskenysávú normál eloszlású stacionárius $e(t)$ sztochasztikus folyamat $x_e(t)$ amplitudójának korrelációs függvényét [2]-ben (335. old. (8.31) kifejezés) találhatjuk. Elvégezve a fenti korrelációs függvény meghatározásához szükséges matematikai műveleteket a 2. és 3. ábrán feltüntetett frekvenciafüggés esetére megkapjuk ezekhez az esetekhez tartozó $S_x(q_1)$ illetve $S_x(q_2)$ spektrálsűrűségekre vonatkozó relációkat. Ezen relációk a következők (az S_0 az erősítő bemenetén levő zajteljesítmény maximális spektrálsűrűségének a fele)

$$S_x(q_1) = 2\,\frac{S_0}{x_{10}^2}\,S_1(q_1) \qquad (17)$$

$$S_x(q_2) = \sqrt{\pi}\,\frac{S_0}{x_{10}^2}\,S_2(q_2) \qquad (18)$$

Az $S_1(q_1)$ és $S_2(q_2)$ függvények (7) és (8) szerint kiszámíthatóak (lásd 4. ábrát).

Kiindulva (16) kifejezésekből, felhasználva (17) vagy (18), valamint (5) megkapjuk (1) és (2) képleteket. A (3) egyenlőtlenség alsó határát abban az esetben használjuk, amikor a visszacsatoló hálózat kimenő inpedanciájának (az erősítő bemenete felőli részén) reális része f_0 frekvencia csak nagyon kis környezetében (az erősítő átviteli sávjához képest) zérustól különböző. Az ellenkező esetben (például, ha a visszacsatoló hálózat illesztett hullámvezető) a (3) egyenlőtlenség felső határát kell használnunk. A fenti állítás belátását az olvasóra bízzuk.

4. Egy egyszerű példa zajbecslésre

Vegyük páldáúl az alábhi paraméterekkel rendelkező oszcillátort: a vivő frekvenciája 4 GHz, az erősítő B_0 sávszélessége 50 MHz, az erősítő zajtényezője 25 dB, az erősítő bemenő teljesítménye 50 mV, a visszacsatoló hálózat egy $Q_t=200$ terhelt jósági tényezőjű rezonátor. Ebben az esetben a visszacsatoló hálózat $K(\omega)$ feszültség átviteli tényezője az alábbi

$$K(\omega)=\Gamma(1+\Omega_1)^{-1}$$
$$\Omega_1=\eta Q_t$$
$$\eta=\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega} \tag{19}$$

A (19) kifejezésekben szereplő Γ a rezonátor csatolásától függő tényező. Elvégezve a szükséges matematikai műveleteket megkapjuk az (1) és (2) formulákban levő alábbi tényezőt.

$$\left|\frac{K'(\omega_0)}{K_r(\omega_0)}\right|^{-2}=\frac{\omega_0^2}{4Q_t^2} \tag{20}$$

Kiindulva a példánkban adott paraméterekből, felhasználva az (1) és (2) formulákat és feltételezve, hogy a környezet hőmérséklete 25 °C az alábbi táblázatban leírt zajokat kapjuk.

$(f-f_0)^{\mathrm{Hz}}$:	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	$3\cdot10^7$
$\left(\frac{N}{S}\right)^{\frac{dBc}{Hz}}_{AM}$	—87	—107	—127	—147	—168	—180
$\left(\frac{N}{S}\right)^{\frac{dB}{Hz}}_{FM}$	—114	—114	—114	—114	—116	—118

A táblázatban foglalt értékek az $i=1$-hez tartoznak. Az $i=2$-höz tartozó számok abszolút értékei durván 1,5-tel nagyobbak.

IRODALOM

[1] *W. B. Davenport, W. L. Boot:* An introduction to the theory of random signals and noise MCGrow-Hill, 1958.

[3] *V. Bíró:* Nonlinear oscillations in feedback systems, Akadémiai Kiadó, Budapest. 1985.