Az elektromágneses energia terjedése veszteséges közegben

DR. ZOMBORY LÁSZLÓ
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS

A veszteséges közegekben az energia definíciója termodinamikai mennyiségként általában nem lehetséges. Ez problémát jelent az energiaterjedés vizsgálatában és különösen a terjedés sebességének meghatározásában. A közlemény eljárást ismertet, amely lokális tér-közeg kölcsönhatás feltételezésével hálózati modellel közelíti a polarizációs folyamatokat. A hálózati modellhez energia rendelhető, az energiasűrűség ismeretében pedig az energia terjedési sebessége meghatározható. Az így kapott terjedési sebesség határesetben az ismert tulajdonságokkal rendelkezik.

DR. ZOMBORY LÁSZLÓ

a BME Elméleti Villamosságtan Tanszékének docense. 1965-ben végzett a BME Villamosmérnöki Kar híradástechnika szakán. 1969-ben Sub auspiciis kitüntetéssel doktorált. 1974-ben védte meg kandidátusi értekezését. Hosszabb ideig dolgozott a SZUTA A. F. Ioffe Műszaki Fizikai Intézetében, a Polytechnic Institute of New-York-ban és a Stanford University-n. A HTE BME Villamoskari Csoportjának titkára, a HTE Elektrolizálási Bizottság elnöke, az URSI Magyar Nemzeti Bizottságának titkára. 1985-ben Polták-Virág díjat kapott.

Fő kutatási területei: terek hálózati modelljei, félvezető eszközök technológiájának és működésének térelméleti modellezése. Egy szakkönyv, számos szakcikk és konferenciaelőadás szerzője, ill. társszerzője.

Bevezetés

Az elektromágneses hullám által szállított energia v_e lokális terjedési sebessége az alábbi módon definiálható: (Brillouin [1]):

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{S}}{w} \tag{1}$$

ahol $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ a Poynting vektor és w az elektromágneses energia sűrűsége. Monokromatikus hullám esetén a sebesség átlagértékét definiálhatjuk

$$\mathbf{v}_e = \frac{\tilde{\mathbf{S}}}{\tilde{w}} \tag{2}$$

ahol a $\sim$ az időbeli átlagot jelöli, és

$$\tilde{\mathbf{S}} = Re\,\frac{1}{2}\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \tag{3}$$

$\hat{\mathbf{E}}$ és $\hat{\mathbf{H}}$ a komplex csúcsértéket jelölik.

A fenti (2) definíció disszipációmentes esetben megegyezik a hullámcsomag terjedési sebességét leíró csoport sebességei.

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega_a \tag{4}$$

ahol ω-a a diszperziós egyenlet megoldása és így a k hullámvektor komponenseinek függvénye. [2, 3]. A (4) egyenlőség (2) figyelembevételével implikálja az energia

$$\tilde{w} = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon)|\hat{\mathbf{E}}|^2 + \frac{d}{d\omega}(\omega\mu)|\hat{\mathbf{H}}|^2\right) \tag{5}$$

alakú kifejezését [3, 4].

Ez a kifejezés azonban csak nem-disszipatív esetben — az ún. átlátszósági tartományban — érvényes. Erős disszipáció esetén a kifejezés negatív is lehet — ami nyilvánvaló fizikai képtelenség. Sajnos, ugyanebben az esetben a (4) egyenlőség is elveszíti fizikai tartalmát, a csoportsebesség például felülmúlhatja a vákuumban mért fénysebességet [2, 6].

Célszerű tehát visszatérni az eredeti (2) definícióhoz és kísérletet tenni az energia fizikailag interpretálható definíciójára. Egy ilyen interpretáció természetesen figyelembe kell vegye a közeg polarizációjának mechanizmusát.

Beérkezett: 1986. V. 5. (*H*)

1. A permittivitás frekvenciafüggése

A továbbiakban csak a permittivitással foglalkozunk. A permeabilitásra hasonló megfontolásokat tehetünk, de a permeabilitás növekvő frekvencia esetén viszonylag hamar elveszíti fizikai értelmét [7].

Lokális tér-közeg kölcsönhatást feltételezve a közeg részecskéinek mozgását csak az időtől függő közönséges differenciálegyenlet írja le. Ennek alakja gázokban [8] ($\mathbf{E}||\mathbf{r}$)

$$m\ddot{r} + m\delta\dot{r} + m\omega_0^2 r = qE \tag{6}$$

Ebből szinuszos gerjesztés esetén a kitérés amplitúdója

$$\hat{r} = \frac{q/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\delta\omega}\hat{E} \tag{7}$$

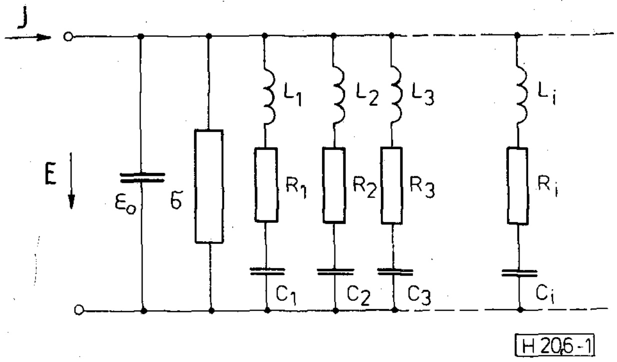
ahonnan minden egyes töltött részecske

$$\hat{p} = q\hat{r} = \frac{q^2 m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\delta\omega}\hat{E} \tag{8}$$

járulékot ad az eredő polarizációhoz.

Ezzel N részecskesűrűség esetén

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{Nq^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\delta\omega}\hat{\mathbf{E}} = e_0\varkappa(j\omega)\hat{\mathbf{E}} \tag{9}$$



1. ábra. A permittivitás helyettesítő áramköre

azaz a komplex szuszceptibilitás

$$\varkappa(j\omega)=\frac{Nq^2/\varepsilon_0 m}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\delta\omega} \tag{10}$$

Értelemszerűen n különböző és kölcsön nem ható részecskefajta esetén

$$\varkappa(j\omega)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i q^2/m_i}{(\omega_i-\omega^2)+j\delta_i\omega} \tag{11}$$

A (11) szuszceptibilitás passzív hálózattal realizálható impedanciára vezet, hiszen a

$$\mathbf{J}=Y(j\omega)\mathbf{E} \tag{12}$$

összefüggésből (a konduktív áramot is figyelembe véve) a hosszegységre eső admittancia

$$Y(j\omega)=\sigma+j\omega\varepsilon_0(1+\varkappa)=$$

$$=\sigma+j\omega\varepsilon_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{j\omega N_i q^2/m_i}{\omega_i^2-\omega^2+j\delta_i\omega} \tag{13}$$

Az admittancia az 1. ábrán látható.

A rezgőkörök elemei és (13) paraméterei közötti összefüggés

$$\frac{1}{L_i}=\frac{N_i q^2}{m_i};\quad \frac{R_i}{L_i}=\delta_i;\quad \frac{1}{L_iC_i}=\omega_i^2 \tag{14}$$

Könnyen meg lehet győződni arról, hogy az így kapott mennyiségek dimenziója hosszegységre vonatkoztatott admittanciáknak felel meg. Ilyen módon az áramkör „feszültségét" a térerősség abszolút értékének megfeleltetve, az áramkör energiatartalma és disszipációja egyaránt fajlagos (térfogategységre eső) érték lesz.

Az így kapott szuszceptibilitás olyan modell kialakítását teszi lehetővé, amely a polarizációs jelenségeket veszteséges rezgőkörökkel közelíti.

2. A disszipatív közeg permittivitásának közelítése

A disszipatív közeg permittivitása

$$\varepsilon=\varepsilon'-j\varepsilon''=\varepsilon_0(1+\varkappa)=\varepsilon_0(1+\varkappa'-j\varkappa'') \tag{15}$$

alakba írható, ahol tehát

$$\varepsilon'(\omega)=\varepsilon_0(1+\varkappa'(\omega))$$

$$\varepsilon''(\omega)=\varepsilon_0\varkappa''(\omega)$$

Adott frekvencián a disszipált teljesítmény

$$P_{\text{dissz}}=\frac{\omega}{2}\,\varepsilon_0\varkappa''|\hat{\mathbf{E}}|^2$$

alakban írható, ahonnan

$$\varkappa''\geq 0 \text{ és } \int_0^\infty \varkappa''(\omega)d\omega<\infty \tag{16}$$

következik.

A szuszceptibilitás valós és képzetes része között fennállnak a Kramers—Krönig relációk [9]. σ elhanyagolásával ezek

$$\varkappa'(\omega)=\frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{\lambda\varkappa''(\lambda)}{\lambda^2-\omega^2}d\lambda \tag{17a}$$

$$\varkappa''(\omega)=-\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^\infty \frac{\varkappa'(\lambda)}{\lambda^2-\omega^2}d\lambda \tag{17b}$$

Ha $\varkappa''(\omega)$ adott, (17a) egyértelműen meghatározza $\varkappa'$-t, míg ellenkező irányban (16) érvényessége nem feltétlenül biztosított. Ezért az alábbiakban $\varkappa''(\omega)$ approximációjára javasolunk eljárást.

Először: meghatározzuk a zérus frekvenciához tartozó disszipációt. Ha ez nem zérus, $Y(0)=\sigma$. Hasonlóan leválasztjuk a szuszceptibilitásról a vákuum terének energiáját reprezentáló ε_0-t (1. ábra).

Másodszor: a maradék szuszceptibilitásra (16) és $\varkappa''(0)=0$ igaz. Ugyanezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik a soros veszteséges rezgőkörök (13) admittanciájából származó $\varkappa_a(j\omega)$ is:

$$\varkappa_a'(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i}\,\frac{\omega_i^2-\omega^2}{(\omega_i^2-\omega^2)^2+\delta_i^2\omega^2} \tag{18a}$$

$$\varkappa_a''(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i}\,\frac{\delta_i\omega}{(\omega_i^2-\omega^2)^2+\delta_i^2\omega^2} \tag{18b}$$

A koncentrált paraméterű passzív admittancia valós és képzetes része között fennálló Bode-formulák [10] ekvivalensek (17)-tel, ezért elegendő a szuszceptibilitás képzetes részét approximálni. Legkisebb négyzetes hibával történő approximáció esetén a valós és képzetes rész hibája azonos lesz. A bizonyítás azon a tételen alapul, hogy belépő függvény Fourier transzformáltjának valós és képzetes része között fennáll a

$$\int_0^\infty [ReF(j\omega)]^2d\omega=\int_0^\infty [ImF(j\omega)]^2d\omega \tag{19}$$

egyenlőség, ha a függvény (és így transzformáltja) négyzetesen integrálható [11]. A feltételek a (15) és (18) formulákban szereplő szuszceptibilitásokra egyaránt teljesülnek, érvényesek tehát a különbségükre is, azaz a közelítés négyzetes hibája

$$D(\varkappa'',\varkappa_a')=\int_0^\infty[\varkappa''(\omega)-\varkappa_a''(\omega)]^2d\omega=$$

$$=\int_0^\infty[\varkappa'(\omega)-\varkappa_a'(\omega)]^2d\omega \tag{20}$$

a valós és a képzetes részre azonos.

Harmadszor: minimalizáljuk a négyzetes eltérést az $1/L_i$, δ_i és ω_i^2 értékek alkalmas megválasztásával, azaz keressük

$$\min_{\frac{1}{L_i},\ \delta_i,\ \omega_i^2} f \tag{21}$$

értékét, ahol

$$f\left(\frac{1}{L_i}\ \delta_i,\ \omega_i^2\right)=$$

$$=\int_0^\infty \left[\varkappa''(\omega)-\varkappa_a''\left(\omega;\ \frac{1}{L_i}\ \delta_i,\ \omega_i^2\right)\right]^2 d\omega,$$

az alábbi mellékfeltételekkel

$$\frac{1}{L_i}>0;\ \delta_i>0;\ \omega_i^2>0, \tag{22}$$

amivel a fizikai realizálhatóságot (pozitív elemértékek) biztosítjuk.

A nemlineáris programozás Kuhn—Tucker tétele értelmében [12] a (22) feltételek mellett

$$\frac{1}{L_i}\ \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{1}{L_i}\right)}=0;\ \delta_i\frac{\partial f}{\partial \delta_i}=0;\ \omega_i^2\frac{\partial f}{\partial(\omega_i^2)}=0 \tag{23}$$

kell teljesüljön f stacionárius pontjában. (22) értelmében ezek a feltétel nélküli szélsőértékek létezésének a feltételével egyeznek meg. (21) pozitív definit karaktere következtében léteznie kell globális minimumának. Ez a keresett megoldás.

3. A tárolt energia és az energiaterjedés sebessége

A szuszceptibilitás vázolt közelítése olyan hálózathoz vezet, amelyben az energia értelmezhető, és így (2) kiértékelhető. Esetünkben

$$\tilde{w}=\frac{1}{4}\ \varepsilon_0|\hat{\mathbf{E}}|^2+\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i+\frac{1}{4}\ \mu_0|\hat{\mathbf{H}}|^2 \tag{24}$$

ahol $\tilde{w}_i$ az i-edik soros rezgőkörben tárolt energia. Miután mindent célszerű az elektromos térerősséggel kifejezni, szükségünk van a hullámimpedanciára.

$$Z_0=\frac{|\hat{\mathbf{E}}|}{|\hat{\mathbf{H}}|}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0(1+\varkappa'-j\varkappa'')}} \tag{25}$$

ahol $1+\varkappa'>0$; $\varkappa''\geq 0$

Ezzel

$$|\hat{\mathbf{H}}|^*=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{(1+\varkappa')+j\varkappa''}\,|\hat{\mathbf{E}}|^*$$

$$\frac{1}{4}\mu_0|\hat{\mathbf{H}}|^2=\frac{1}{4}\ \varepsilon_0\sqrt{(1+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}\,|\hat{\mathbf{E}}|^2$$

és így

$$\tilde{w}=\frac{1}{4}\ \varepsilon_0|\hat{\mathbf{E}}|^2+\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i+\frac{1}{4}\ \varepsilon_0\sqrt{(1+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}\,|\hat{\mathbf{E}}|^2 \tag{26}$$

Másrészt a Poynting-vektor (3) alapján

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,|\hat{\mathbf{E}}|\ |\hat{\mathbf{H}}|^*=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|\hat{\mathbf{E}}|^2\sqrt{(1+\varkappa')+j\varkappa''}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|\hat{\mathbf{E}}|^2\,\frac{\sqrt{1+\varkappa'+\sqrt{(1+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}}}{\sqrt{2}} \tag{27}$$

(26) és (27) felhasználásával

$$v_e=\frac{\tilde{S}}{\tilde{w}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|\hat{\mathbf{E}}|^2\,\frac{\sqrt{1+\varkappa'+\sqrt{(1+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}}}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{4}\ \varepsilon_0|\hat{\mathbf{E}}|^2+\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i+\frac{1}{4}\ \varepsilon_0|\hat{\mathbf{E}}|^2+\frac{1}{4}\ \varepsilon_0|\hat{\mathbf{E}}|^2\left(\sqrt{(1+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}-\mathrm{i}\right)}$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\ \frac{\sqrt{1+\varkappa'+\sqrt{(1+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}}}{\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}-1\right)\right)}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}K \tag{28}$$

mivel $\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i\geq 0$ értékét a nevezőben elhagytuk, (28)-ból némi számolással

$$K^2=\frac{\mathrm{i}+\varkappa'+\sqrt{(\mathrm{i}+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}}{\mathrm{i}+\varkappa'+\sqrt{(\mathrm{i}+\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}+\frac{(\varkappa')^2+(\varkappa'')^2}{2}}\leq 1$$

és így

$$v_e \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = C$$

Könnyű belátni, hogy $v_e \to C$ $\omega \to \infty$ esetén, másrészt az energia (24) kifejezése egybeesik (5)-tel és így (28) és (4) azonos eredményre vezet (más szóval: az energiaterjedés így definiált sebessége megegyezik a csoportsebességgel) ha $\delta_i \to 0$.

Összegezés

Az elektromágneses hullám energia- és disszipációsűrűségének egy lehetséges közelítő leírását adja a cikk. A polarizáció jelenségét veszteséges rezgőkörök (fizikai terminológiával: oszcillátorok) modellezik. A rezgőkörök paramétereinek meghatározására szolgáló optimalizációs eljárás növekvő elemszám esetén csökkenti az approximáció négyzetes hibáját (ennek bizonyítását máshol publikálom), így az approximáció hibája egy nem-negatív határértékhez tart. A közelítő modellből meghatározható energiaterjedési sebesség valamennyi tulajdonsága megegyezik az előzetesen várttal.

IRODALOM

[1] *Brillouin, L.:* Propagation des ondes electromagnétiques dans les milieux materiales. Congrós. Int. d'Électricité, vol. II. Paris, 1932. pp. 739—788.

[2] *Wainstein, L. A.:* Propagation of quasi-monochromatic plane waves in absorbing and amplifying media. Proc. 6th. MICROCOLL, vol. III. Budapest, 1974. pp. 429—435.

[3] *Felsen, L. B., Marcuvitz, N.:* Radiation and Seattering of Waves. Prentiee Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1973. Sec. 1.5.

[4] *Landau, L. D., Lifsic, E. M.:* Folytonos közegek elektrodinamikája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986. 80. §.

[5] *Vajnstejn, L. A.:* Elektromagnitnüe volnü. Szov. Radio. Moszkva, 1957. 49. §.

[6] *Vajnstejn, L. A.:* id. mü. 51. §.

[7] *Landau, L. D., Lifsic, E. M.:* id. mü. 79, §.

[8] *Feynman, R. P., Leighton, B. B. Sands, M.:* Mai fizika. vol. 7. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970. 84. 1. szakasz.

[9] *Landau, L. D., Lifsic, E. M.:* id. mü. 82. §.

[10] *Géher K.:* Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972. p. 163.

[11] *Papoulis, A.:* The Fourier-integral and Its Applications. McGraw Hill, N. Y. 1962. Ch. 10.

[12] *Wismer, D. A., Chattergy, R.:* Introduetion to Nonlinear Optimization. North Holland, N. Y. 1978. Ch. 4.