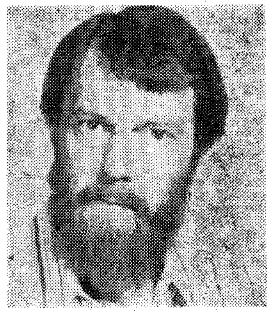
A komplex frekvencia függvényeként értelmezett terjedési együttható inhomogén kitöltésű csőtápvonalaknál

DR. MAGOS ANDRÁS
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék



ÖSSZEFOGLALÁS

Inhomogén kitöltésű csőtápvonalak terjedési együtthatóját a dolgozat a komplex frekvencia olyan végtelen sok értékű függvényekónt értelmezi, amelynek két ága tartozik egy módushoz a két terjedési iránynak megfelelően. Leírja ezen függvény néhány tulajdonságát és Riemann-felületének geometriáját. Példaként részletesen foglalkozik a téglalap keresztmetszetű csőtápvonallal.

DR. MAGOS ANDRÁS

1964-ben kapott villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetemen. Azóta ugyanott, az Elméleti Villamosságtan Tanszéken dolgozik, jelenleg docensként. Az egyetemi doktori címet 1969-ben, a műszaki tudományok kandidátusa fokozatot 1982-ben szerezte meg, az előbbit a hálózatelmélet, az utóbbit a csőtápvonalak elméletének témakörében.

1. Bevezetés

A csőtápvonalak tulajdonságait általában $\exp(j\omega t)$ alakú időfüggés mellett vizsgálják, és a terjedési együtthatót az ω frekvencia függvényében adják meg. Az $s=\sigma+j\omega$ komplex frekvencia bevezetése és az $\exp(st)$ alakú időfüggés egy ennél általánosabb leírást eredményez. Az s komplex frekvencia tekinthető a Laplace-transzformáció változójának is.

Ha a γ terjedési együtthatót a komplex frekvencia függvényeként értelmezzük, célszerű a csőhullám terjedési irányát az energia terjedési irányával azonosítani és a két lehetséges terjedési iránynak γ két értékét megfeleltetni. Így minden módusnak a végtelen sok értékű $\gamma(s)$ függvény két ága felel meg. A $\gamma(s)$ függvény tulajdonságait az s-síkbeli Riemann-felületének leírásával lehet szemléltetni.

2. A $\gamma(s)$ függvény Biemann-felülete

A csőtápvonal elektromágneses terét tranzverzális és longitudinális komponensek összegeként írjuk fel:

$$\mathbf{E}=(\mathbf{e}_T+\mathbf{e}_z)\exp(st+\gamma z), \tag{1}$$

$$\mathbf{H}=(\mathbf{h}_T+\mathbf{h}_z)\exp(st+\gamma z). \tag{2}$$

A $\lambda=\gamma^2$ sajátértéket a

$$\mu\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{e}_T}{\mu}-\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{e}_T}{\varepsilon}+s^2\varepsilon\mu\mathbf{e}_T=\lambda\mathbf{e}_T \tag{3}$$

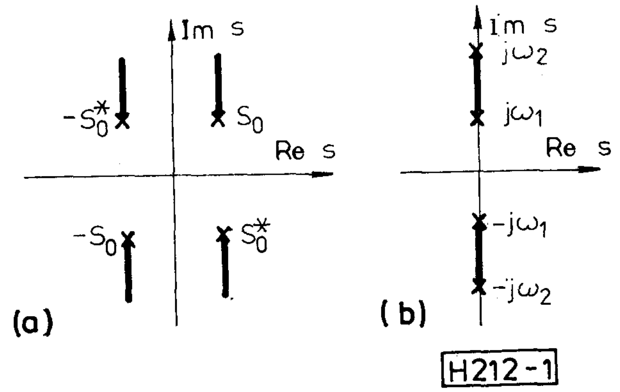
egyenlethez tartozó peremérték-feladat határozza meg. Minden módushoz a $\lambda(s)$ függvény egy ága tartozik. A különböző ágak felhasítások mentén egymáshoz kapcsolódhatnak. A felhasítások elágazási pontokból indulnak el. Egy elágazási pontban két különböző módus elektromágneses tere megegyezik.

Bebizonyítható [1], hogy a $d\lambda/ds^2$ differenciálhányados az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\frac{d\lambda}{ds^2}=\frac{\int\varepsilon\mu(\mathbf{e}_T\times\mathbf{h}_T)\,dA}{\int(\mathbf{e}_T\times\mathbf{h}_T)\,dA}=\frac{\int[\lambda\mathbf{e}_T^2-(\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{e}_T)^2/\varepsilon]\,dA}{\int[s^2\varepsilon\mathbf{e}_T^2+(\mathrm{rot}\,\mathbf{e}_T)^2/\mu]\,dA}, \tag{4}$$

ahol az integrálást a csőtápvonal teljes keresztmetszete mentén kell elvégezni. Az elágazási pontok helyét annak alapján lehet meghatározni, hogy azokban a fenti derivált nem létezik, vagyis a nevezőben álló kifejezés nullává válik. Bebizonyítható, hogy az s-sík valós tengelyén nem lehet elágazási pont. A $\lambda(s)$ függvény két ágának közös elágazási pontjai az 1. ábrán bemutatott négyes csoportokban helyezkednek el. Az 1. b. ábrán látható változat hátráló hullámmal jár együtt.

Az elágazási pontok ismeretében elkülöníthetők $\lambda(s)$ egyes ágai, vagyis kijelölhetők a felhasítások. Az ágak elkülönítése nem egyértelmű, a számtalan lehetőség közül egy látható az 1. ábrán. Eszerint a képzetes tengelyen elhelyezkedő elágazási ponto-



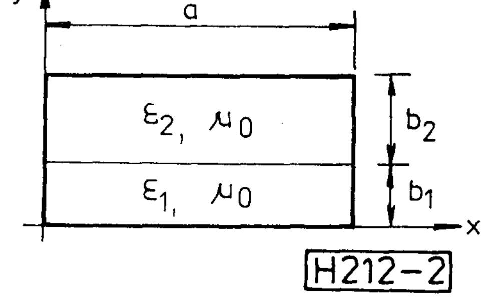
1. ábra. A $\lambda(s)$ függvény elágazási pontjai és a felhasítások

Beérkezett: 1986. V. 9. (H)

kat véges hosszúságú felhasítások kötik össze, a többi elágazási pontból a képzetes tengellyel párhuzamosan végtelen hosszú felhasítások indulnak. Az így elkülönített ágak megfelelnek a szokásos módon értelmezett módusoknak.

A $\gamma=\lambda^{1/2}$ összefüggés szerint a $\lambda(s)$ függvény minden ágának a $\gamma(s)$ függvény két ága felel meg. Ezeket a két lehetséges terjedési irányhoz rendelhetjük, ha a hullám terjedési irányát az energia terjedési irányával azonosítjuk. Mindkét ágon megjelennek a $\lambda(s)$ függvény megfelelő ágának felhasításai, de emellett megjelenik egy vagy több további felhasítás is, amelyek mentén a két ág egymáshoz kapcsolódik. Bebizonyítható, ha $\mathrm{Re}\,s\neq 0$, akkor $\mathrm{Re}\,\gamma\neq 0$, és hogyha $\mathrm{Re}\,s$ és $\mathrm{Re}\,\gamma$ ellenkező előjelű, akkor az (1) és (2) összefüggések által leírt hullámban az energia a pozitív z-tengely irányába terjed. Ha $\mathrm{Re}\,s=0$ és $\mathrm{Re}\,\gamma=0$, akkor, a terjedési irány határátmenettel határozható meg. Ha $\mathrm{Re}\,s=0$ és $\mathrm{Re}\,\gamma\neq 0$, akkor mindkét terjedési irány előfordul a tekintett pont környezetében, vagyis ezen a frekvencián a terjedési irány nem értelmezhető. Az s-sík képzetes tengelyének ilyen pontjai felhasításokhoz tartoznak, amelyek mentén $\gamma(s)$ különböző terjedési irányokhoz tartozó ágai kapcsolódnak egymáshoz.

Az előzőek alapján már leírható a $\gamma(s)$ függvény s-síkbeli Riemann-felületének geometriája. Minden módushoz két levél tartozik a két terjedési iránynak megfelelően. Az 1.a ábrán bemutatott felhasítások mentén két különböző módushoz, de azonos terjedési irányhoz tartozó levelek vannak összeragasztva a szokásos módon, vagyis az egyik levél felhasításának bal oldali pereme a másik levél felhasításának jobb oldali pereméhez kapcsolódik és fordítva. Ha $\lambda(s)$ egy ágának nincs elágazási pontja a képzetes tengelyen, akkor λ ott csak valós értékeket vehet fel, ezen belül pozitív valós értéket csak a $-\mathrm{j}\omega_h$ és $\mathrm{j}\omega_h$ közti szakaszon vesz fel, ahol ω_h a módus határfrekvenciáját jelöli. Ezen a szakaszon γ valós, és így ez a szakasz egy felhasítást jelent, amely mentén a módus két terjedési irányához tartozó két levél van összeragasztva. Ha $\lambda(s)$ két ágának közös felhasítása van a képzetes tengelyen (1.b ábra), akkor ezen felhasítás mentén $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$, és így $\mathrm{Re}\,\gamma\neq 0$. Emiatt a felhasítás mentén a Riemann-felület két olyan levele van összeragasztva, amelyek két különböző módushoz és terjedési irányhoz tartoznak. Mindkét módusnál λ pozitív valós a képzetes tengelynek a $-\mathrm{j}\omega_1$ és $\mathrm{j}\omega_1$ pontok (1.b ábra) közti szakaszán, így ez a szakasz $\gamma(s)$ mind a négy megfelelő ágán felhasítást jelent, amelyek mentén egy módus különböző terjedési irányaihoz tartozó két levél van összeragasztva. Ha $s=\mathrm{j}\omega$ és $\omega>\omega_2$, mindkét módusnál λ valós és általában negatív, kivéve egy $\omega_3<\omega<\omega_4$ frekvencia-intervallumot, amelyben az egyik módusnál λ pozitív valós. Így az ezen módushoz tartozó két levél a képzetes tengelynek a $\mathrm{j}\omega_3$ és $\mathrm{j}\omega_4$ pontok közti szakaszán a szokásos módon össze van ragasztva. Ez a módus az $\omega_2<\omega<\omega_3$ frekvencia-intervallumban hátráló hullámot jelent [2]. Hátráló hullámnál a dolgozatban használt terjedési irány és a szokásos módon értelmezett terjedési irány egymással ellentétes.



2. ábra. Inhomogén kitöltésű, téglalap keresztmetszetű csőtápvonal

3. Inhomogén kitöltésű téglalap keresztmetszetű csőtápvonal

Ismeretes [**3**], hogy a 2. ábrán látható csőtápvonalban ún. LE_{mn} és LM_{mn} módusok alakulhatnak ki. A térerősség komponensek x-től $\cos(m\pi x/a)$ vagy $\sin(m\pi x/a)$ alakban függenek, az n index pedig az y-tól való függésre utal. A $\gamma(s)$ függvény Riemann-felülete szétesik végtelen sok, egymástól független Riemann-felületre. Egy ilyen Riemann-felület tartalmazza egy rögzített m értékhez tartozó összes LE_{mn} vagy összes LM_{mn} módusnak megfelelő levelet.

Az elágazási pontokat az

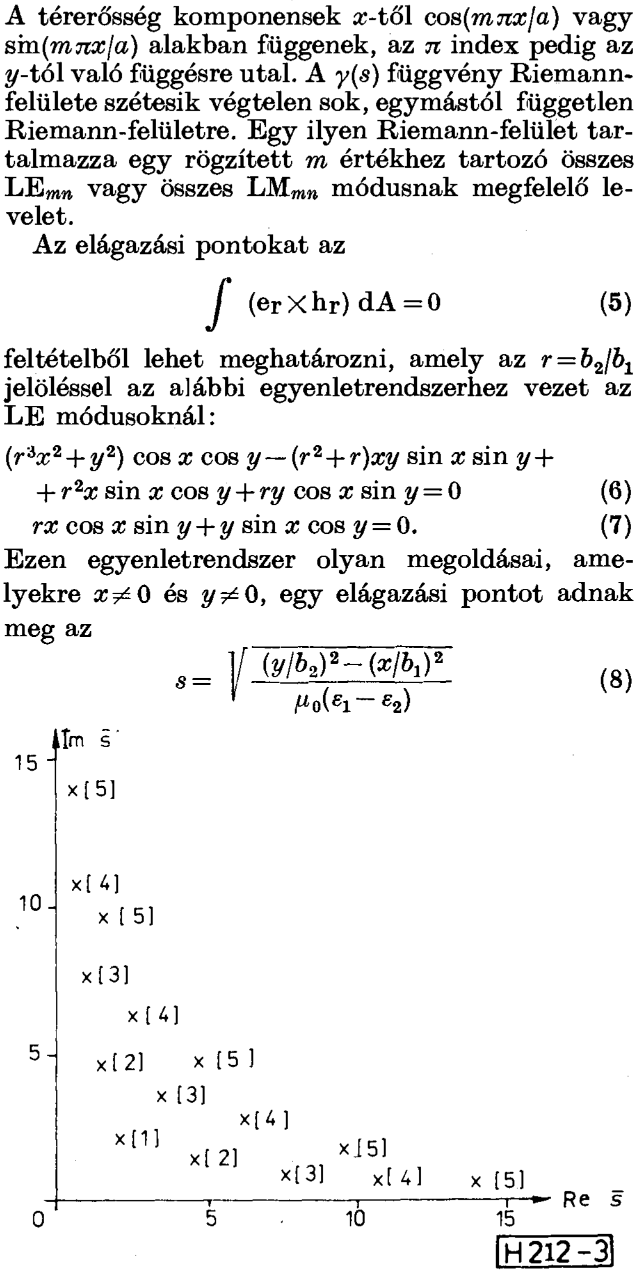
$$\int (\mathbf{e}_T\times\mathbf{h}_T)\,\mathrm{d}A=0 \tag{5}$$

feltételből lehet meghatározni, amely az $r=b_2/b_1$ jelöléssel az alábbi egyenletrendszerhez vezet az LE módusoknál:

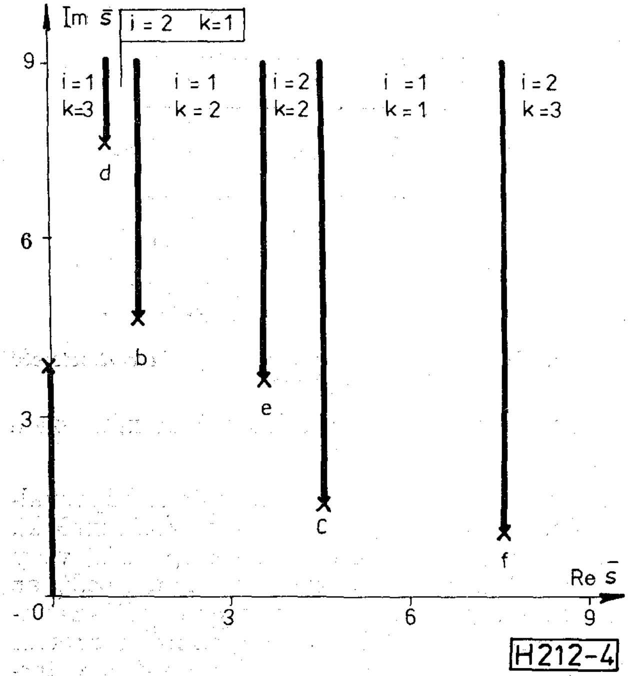
$$(r^3x^2+y^2)\cos x\cos y-(r^2+r)xy\sin x\sin y+$$
$$+r^2x\sin x\cos y+ry\cos x\sin y=0 \tag{6}$$
$$rx\cos x\sin y+y\sin x\cos y=0. \tag{7}$$

Ezen egyenletrendszer olyan megoldásai, amelyekre $x\neq 0$ és $y\neq 0$, egy elágazási pontot adnak meg az

$$s=\sqrt{\frac{(y/b_2)^2-(x/b_1)^2}{\mu_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}} \tag{8}$$



3. ábra. Elágazási pontok az első síknegyedben



4. ábra. Felhasítások az LE_{03} módushoz tartozó leveleken

összefüggésen keresztül. Minden elágazási pont rögzített m mellett a $\lambda(s)$ függvény két ágához tartozik, amelyek az $n=n_0$ és $n=n_0+1$ indexeknek felelnek meg. Az

$$\bar{s}=\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\mu_0}b_1 s \tag{9}$$

normalizált változó első síknegyedébe eső, az $n_0=1-5$ értékekhez tartozó összes elágazási pont elhelyezkedése látható a **3.** ábrán $b_1=b_2$ mellett. Az elágazási pontok mellett zárójelben szerepel n_0 értéke.

Az elágazási pontok és a határfrekvenciák ismeretében kijelölhetők $\gamma(s)$ Riemann-levelein a felhasítások. Példaként a 4. ábra megadja az $\mathbf{LE}_{03}$ módushoz tartozó két levélen a felhasításokat, ha $b_1=b_2$ és $\varepsilon_1=2\varepsilon_2$. Az a felhasítás mentén a két levél össze van ragasztva. A b és c felhasítások mentén az $n=2$ és $n=\mathbf{3}$, a d, ε és f felhasítások mentén az $n=3$ és $n=4$ indexekhez és azonos terjedési irányokhoz tartozó levelek vannak összeragasztva.

Ha $s\to\infty$, akkor λ aszimptotikus viselkedését az alábbi formulával lehet leírni:

$$\lambda\sim\varepsilon_i\mu_0 s^2+(k\pi/b_i)^2 \qquad \begin{aligned} i&=1,\,2\\ k&=1,\,2,\,\ldots n\end{aligned} \tag{10}$$

A 4. ábrán i és k két felhasítás között érvényes értékei is szerepelnek. $\lambda(s)$ ágait nagy abszolút értékű s mellett érvényes viselkedés alapján is el lehet különíteni. Ekkor a felhasítások mind véges hosszúságúak, de az ágak már nem feleltethetők meg a szokásosan értelmezett módusoknak, mert vannak felhasítások, amelyek metszik az s-sík képzetes tengelyét.

IRODALOM

[1] *A. Magos:* Calculation of guided waves by expansion in powers of the frequency, Periodica Polytechnika El. Eng. 22. 229—249. o. (1978).

[2] *A. Lavik, H.—G. Unger:* Rückwärtswellen in homogenen Wellenleitern, Archiv Elektrischer Übertragung 18. 36—42. o. (1964).

[3] *P. M. Prache:* Paramétres de propagation d'un guide d'ondes rectangulaire enfermant une plaquette isolante paralléle á une face, Cables Transm. 20. 11—28. o. (1966).