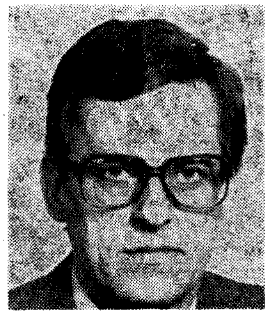
Kapcsolt kapacitású hálózatok érzékenység és futási idő analízise

DR. TRÓN TIBOR
BME Híradástechnikai Elektronika Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

A cikkben általános érzékenység formulákat származtatunk N-fázisú kapcsolt kapacitású hálózatokra és megadjuk azok interpretálását is, mint transzfer-mátrix-út-szorzatok összege. A futási idő számításánál megmutatjuk az érzékenységgel való kapcsolatot. Ismertetjük a csomóponti módszer hatékony alkalmazását, amellyel az érzékenység és futási idő számításához szükséges minden transzfer függvény egyszerűen meghatározható a csomóponti mátrix inverzéből. Az analízishez csak egyetlen fázisnak megfelelő méretű mátrix invertálása szükséges frekvenciánként. Végül bemutatjuk az elkészült számítógép programokat.

DR. TRÓN TIBOR

1964-ben végzett a BME Villamosmérnöki Karán, jelenleg a BME Híradástechnikai Elektronika Intézetében adjunktus. A hálózatelmélethez és a számítógépes elektronikai tervezéshez kapcsolódó tantárgyak oktatásában vesz részt. Kutatási területe a lineáris hálózatok érzékenység és tolerancia kérdésköre, valamint a kapcsolt kapacitású hálózatok számítógépes analízise. Több egyetemi jegyzet, számos kutatási jelentés, hazai és nemzetközi publikáció szerzője, ill. társszerzője. 1974-ben szerzett egyetemi doktori címet. 1974-ben Pollák—Virág díjat, 1975-ben BME nívódíjat, 1984-ben rektori dicséretet kapott. 1983 óta a HTE BME Villamoskari csoportjának elnöke.

1. Bevezetés

Az utóbbi néhány évben egyre nagyobb teret hódítanak a kapcsolt kapacitású (switched capacitor, SC) hálózatok, melyek kis érzékenységű szűrők MOS integrált áramköri megvalósítását teszik lehetővé. Ezek az áramkörök kapcsolókból, kapacitásokból és műveleti erősítőkből épülnek fel. A kapcsolókat kétállapotú periódikus órajelek vezérlik, a „0" ill. „1" szint a kapcsoló nyitott, ill. zárt állapotának felel meg. A nyitott és zárt kapcsolók különböző kombinációihoz a hálózatnak más-más strukturái tartoznak, melyek az órajelek egy közös T periódus ideje szerint ismétlődnek. Egy adott struktúra periódikus ismétlődéseinek összességét fázisnak nevezzük.

2. Az SC hálózatok jellemzése

Tekintsünk egy N-fázisú SC hálózatot a bementén egy $x(t)$ folytonos jellel gerjesztve. Bontsuk fel a gerjesztést fázisonkénti komponensekre, és minden fázison belül egy állandó és egy — a fázis végén milla értékű — változó összetevőre. A hálózat lineáris volta miatt az egyes komponensek hatása külön-külön vizsgálható. Ha a hálózat a k-ik fázist megelőző t_{k-1} időpillanatban energiamentes, a nullára visszatérő változó komponens hatására minden válaszjel is nulla lesz a k-ik fázis végén (t_k), így a következő fázis is energiamentes állapotból indul, vagyis az egyes fázisok frekvenciafüggetlen aktív-C hálózatai egymástól függetlenül vizsgálhatók a jel változó összetevőire nézve. A fázisonként állandó (lépcsős) gerjesztés komponens csak a kapcsolási időpontokban, a struktúra váltásokkal egyidejűleg változtatja meg értékét. Mivel a hálózat ellenállásokat nem tartalmaz, a megváltozott gerjesztés és struktúra hatására a kapacitások gyakorlatilag nulla idő alatt áttöltődnek az új állapotnak megfelelően, így a válaszjelek is konstansok lesznek az egyes fázisok idején. Ezen konstans értékek az eredeti jel fázisvégi mintáival azonosíthatók, így kapcsolatukra a diszkrét idejű rendszereknél szokásos z-transzformációs leírás használható. Az elmondottakból következik, hogy az idővariáns SC hálózat leírása egy N-fázisú diszkrét idejű, és N egyfázisú folytonos idejű (analóg) rendszer leírására vezethető vissza, amelyek már időinvariánsak.

Az SC hálózat átvitelét a z-tartományban az

$$\mathbf{Y}^o(z)=\mathbf{H}^{oi}(z)\mathbf{X}^i(z) \tag{1}$$

összefüggéssel jellemezhetjük, ahol az $(N\times N)$-es $\mathbf{H}^{oi}(z)$ transzfer mátrix $H^{oi}_{kl}(z)$ eleme az l-edik fázisbeli bemeneti ill. a k-adik fázisbeli kimeneti minták $X^i_l(z)$ ill. $Y^o_k(z)$ z-transzformáltjainak kapcsolatát adja meg.

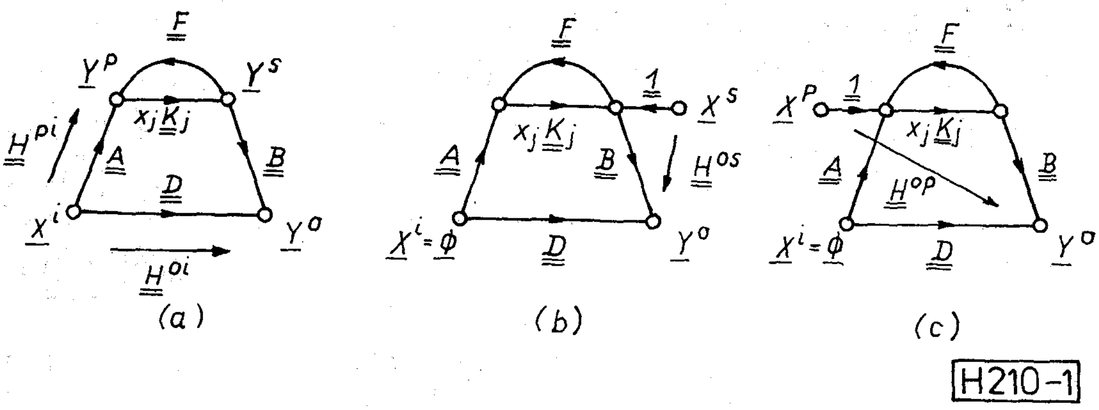
A frekvencia tartományi átvitelre az

$$Y^o(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(\omega)X^i(\omega-n\omega_0) \quad \omega_0=2\pi/T \tag{2}$$

$$H_n(\omega)=\mathbf{a}^t(\omega)\mathbf{H}^{oi}(e^{j\omega T})\mathrm{b}_n(\omega)+\sum_{k=1}^{N} d_{n,k}(\omega)F^{oi}_k \tag{3}$$

összefüggések írhatók [1]. (2) alapján a bemenő jel $X^i(\omega)$ spektrumának $n\omega_0$ szerinti eltolásai $H_n(\omega)$-szorosan jelentkeznek a kimenő jel $Y^o(\omega)$ spektrumában, továbbá (3) szerint az egyes $H_n(\omega)$ transzfer függvények a fázisvégi minták kapcsolatát megadó $\mathbf{H}^{oi}(z)$ transzfer mátrixból (diszkrét idejű átvitel) és a változó jelösszetevők kapcsolatát leíró $F^{oi}{}_k$ konstansokból (direkt átvitel) határozhatók meg. Az a, b_n, $d_{n,k}$ mennyiségek a dekompozíciónak megfelelő jelfeldolgozási mechanizmus (mintavételezés, tartás, ablakolás, eltolás) spektrumra gyakorolt hatását fejezik ki [1, 2].

Beérkezett: 1986. V. 5. (H)



1. ábra. Normál gráf a $\mathbf{H}^{oi}$, $\mathbf{H}^{pi}$, $\mathbf{H}^{os}$ és H^{op} transzfer mátrixokkal

3. Általános érzékenység formulák

Tegyük fel, hogy az x_j áramköri elem (kapacitás vagy véges erősítésű műveleti erősítő) a z-tartományban az

$$\mathbf{Y}^s = x_j \mathbf{K}_j \mathbf{Y}^p \qquad (4)$$

összefüggéssel írható le, ahol Y^s és Y^p az x_j-vel kapcsolatos szekunder és primer elektromos jellemző (töltés és/vagy feszültség), $\mathbf{K}_j$ az elem típusától függő mátrix. A (4) összefüggés alapján az 1.*a* ábra hatásgráfja (normál gráf) rajzolható fel. A hatásgráf megoldásaként [3] az (1)-beli transzfer mátrixra

$$\mathbf{H}^{oi} = \mathbf{D} + x_j \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}_j\mathbf{A} = \mathbf{D} + x_j \mathbf{B}\mathbf{K}_j\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \qquad (5)$$

adódik, ahol

$$\mathbf{P} = 1 - x_j\mathbf{K}_j\mathbf{F} \qquad \mathbf{R} = 1 - x_j\mathbf{F}\mathbf{K}_j \qquad (6)$$

(5) a tisztán analóg vagy tisztán diszkrét idejű hálózatokra közismert bilineáris összefüggés megfelelője az SC hálózatok z-tartományi leírásában.

Differenciálva (5)-öt x_j szerint, felhasználva az inverz mátrixra vonatkozó

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial x_j} = -\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_j} \mathbf{M}^{-1} \qquad (7)$$

azonosságot, valamint az (5)-ből kiolvasható $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}_j = \mathbf{K}_j\mathbf{R}^{-1}$ összefüggést, átalakítások után az elsőrendű érzékenységre

$$\mathbf{S}_j^H = \frac{\partial \mathbf{H}^{oi}}{\partial x_j} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}_j\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{H}^{os}\mathbf{K}_j\mathbf{H}^{pi} \qquad (8)$$

adódik, ahol az utolsó alak felírásakor az 1.*a* és 1.*b* ábrákon feltüntetett $\mathbf{K}^{pi}$ és $\mathbf{H}^{os}$ transzfer mátrixokra vonatkozó kifejezéseket helyettesítettük magukkal a mátrixokkal.

Ha az *SC* hálózatban egy utat definiálunk a bemenet és kimenet között az x_j elemen keresztül és a (8)-beli transzfer mátrixokat ezen út két szakaszához rendeljük, a (8)-cal megadott érzékenység formula egy *„transzfer-mátrix-út-szorzat"*-ként értelmezhető, ahol a $\mathbf{K}_j$ szorzó az elemen való áthaladásnak felel meg.

További differenciálásokkal az alábbi általánosításra jutunk. A $\mathbf{H}^{oi}$ transzfer mátrix $x_1 \ldots x_k$ elemek szerinti k-adrendű érzékenysége a bemenetet a kimenettel összekötő és a kiválasztott elemeken áthaladó utak „útszorzat"-ainak összegeként határozható meg. Minden „útszorzat" $k+1$ (az egyes útszakaszoknak megfelelő) belső transzfer mátrixot és k (az elemeken való áthaladást kifejező) konstanst tartalmaz, és az összegzés az összes lehetséges útra vonatkozik. Szimbólikus formában:

$$\mathbf{S}^{(k)H}_{x_1 \ldots x_k} = \sum_{\text{összes út}} \text{„útszorzat"} \qquad (9)$$

Az 1.*b* és 1.*c* ábrák hatásgráfjai alapján bizonyítható, hogy $\mathbf{H}^{os}\mathbf{K}_j = \mathbf{H}^{op}/x_j$, vagyis az $\mathbf{X}^s$ szekunder gerjesztés egy ekvivalens $\mathbf{X}^p$ primer gerjesztéssel helyettesíthető, ha

$$\mathbf{X}^s = x_j\mathbf{K}_j\mathbf{X}^p \qquad (10)$$

Utóbbi kifejezésünk az SC hálózatokra érvényes általánosított *Thevenin—Norton tétel*-nek tekinthető, és felhasználásával alternatív formulák nyerhetők az „útszorzat"-okra, azaz az érzékenységekre.

Például egy kapacitás esetén (4) a következő:

$$\mathbf{Q}^c = c\mathbf{M}\mathbf{V}^c \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & -z^{-1} \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

A feszültséggerjesztóshez tartozó $\mathbf{T}^{oi}$ transzfer mátrix c szerinti elsőrendű érzékenysége

$$\mathbf{S}_c^T = \mathbf{W}^{oc}\mathbf{M}\mathbf{T}^{oc} = \mathbf{T}^{ci}\frac{1}{c}\mathbf{T}^{ci} \qquad (12)$$

vagy a c_1 és c_2 szerinti másodrendű érzékenység

$$\mathbf{S}^{(2)T}_{c_1c_2} = \mathbf{W}^{o1}\mathbf{M}\mathbf{W}^{12}\mathbf{M}\mathbf{T}^{2i} + \mathbf{W}^{o2}\mathbf{M}\mathbf{W}^{21}\mathbf{M}\mathbf{T}^{1i} = \\ = \frac{1}{c_1c_2}(\mathbf{T}^{o1}\mathbf{T}^{12}\mathbf{T}^{2i} + \mathbf{T}^{o2}\mathbf{T}^{21}\mathbf{T}^{1i}) \qquad (13)$$

ahol $\mathbf{T}$ és $\mathbf{W}$ feszültség transzfer mátrixot ill. töltés-feszültség transzfer mátrixot jelöl. Egy A erősítésű műveleti erősítőre

$$\mathbf{V}^s = A\mathbf{V}^p \quad \mathbf{S}_A^T = \mathbf{T}^{os}\mathbf{T}^{pi} = \mathbf{T}^{op}\frac{1}{A}\mathbf{T}^{pi} \qquad (14)$$

írható, ahol az s és p felső indexek most a műveleti erősítő kimenetét ill. bemenetét jelölik.

A frekvencia tartományi érzékenységek, azaz a $H_n(\omega)$ transzfer függvények érzékenységei (3) alapján $H^{oi}(z)$ és $F^{oi}{}_k$ megfelelő érzékenységeivel fejezhetők ki. Az utóbbiak (mint az egyes fázisok frekvenciafüggetlen aktív-C hálózatainak érzékenységei) meghatározására ismert módszerek [4, 5] állnak rendelkezésre.

A bemutatott érzékenység formulák és azok útszorzatként való interpretálása a [4]-beli eredmények SC hálózatokra kiterjesztett általánosítását adják.

4. A futási idő meghatározása

A futási időt definiáló

$$\alpha'(\omega)-\tau(\omega)=\frac{\partial \ln H_n(\omega)}{\partial\omega}=\frac{S_\omega^{H_n}(\omega)}{H_n(\omega)} \qquad (15)$$

összefüggés szerint $\tau(\omega)$-hoz $S_\omega^{H_n}$-ra van szükségünk. (3)-ból erre

$$S_\omega^{H_n}=\mathbf{a}'^t\mathbf{H}^{oi}\mathbf{b}_n+\mathbf{a}^t\mathbf{H}^{oi}\mathbf{b}_n'-jTz^{-1}\mathbf{a}^t\mathbf{S}_z^H\mathbf{b}_n\big|_{z=e^{j\omega T}}+ \\ +\sum_{k=1}^{N} d_{n,k}'F_k^{oi} \qquad (16)$$

adódik, ahol a $'$ jelölés $\partial/\partial\omega$-t helyettesíti. A (16)-beli $\mathbf{S}_z^H=\partial\mathbf{H}^{oi}(z)/\partial z^{-1}$ meghatározásához a hálózat egyenletei közül emeljük ki azokat, melyek explicit módon tartalmazzák z^{-1}-et: ezek (11)-ből láthatóan Q_1^c és V_N^c kapcsolatára vonatkoznak és a kapacitások „memóriáját" fejezik ki két periódus között. Az előző pont gondolatmenetét követve, a 2. ábra hatásgráfja alapján a $\mathbf{T}^{oi}$ feszültség transzfer mátrixra vonatkozóan a következő eredmény adódik:

$$\mathbf{S}_z^T=-\mathbf{W}_{\cdot 1}^{oC}\mathbf{C}\mathbf{T}_{N\cdot}^{Ci}=\sum_{r=1}^{n_c}\mathbf{W}^{or}\mathbf{M}^r\mathbf{T}^{ri} \qquad (17)$$

$$\mathbf{M}^r=\begin{bmatrix} & -c^r \\ 0 & \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{C}=\operatorname{diag}\{c_r\}$. Az $\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^r$ mátrixokat összehasonlítva a z^{-1} szerinti „érzékenység" és a kapacitások szerinti érzékenységek kapcsolatára a

$$z^{-1}\mathbf{S}_z^T=\sum_{r=1}^{n_c}c_r\hat{\mathbf{S}}_{c_r}^T \qquad (18)$$

összefüggést kapjuk, ahol $\hat{\mathbf{S}}_{c_r}^T$ az $\mathbf{S}_{c_r}^T=\mathbf{W}^{or}\mathbf{M}\mathbf{T}^{ri}$ érzékenység formula azon részét jelöli, mely a z^{-1} szorzót explicit módon tartalmazza. Eredményünk szerint a futási idő meghatározásához csak olyan transzfer mátrixokra van szükség, melyek az elsőrendű érzékenységeknél is szerepelnek. Állításunk, illetve a (18) összefüggés az időinvariáns analóg hálózatokra közismert érzékenység-futási idő kapcsolat [5] SC hálózatokra érvényes változata.

5. A csomóponti analízis alkalmazása

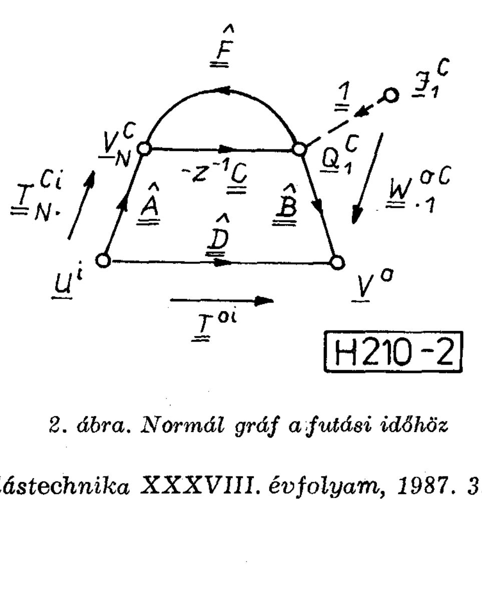
Az SC hálózatok csomóponti leírásában a kapcsolók, végtelen és véges erősítésű műveleti erősítők a kapacitív részhálózat csomóponti egyenletrendszerének redukálásával vehetők figyelembe. Ez a redukció a fenti elemek által képviselt feszültség kényszerek behelyettesítését (oszlop redukció) jelenti, amivel jóval kisebb méretű csomóponti mátrixot kapunk, mint az általánosan használt módosított csomóponti analízis (MNA módszer) esetén [1] és ezáltal a sparse mátrix technika alkalmazása is feleslegessé válik.

Az SC hálózatok gyakorlatilag mindig feszültség gerjesztéssel működnek. Ahhoz, hogy ez a csomóponti leírásba bevonható legyen, a 3. ábrán látható áramkört alkalmazzuk. Ez az áramkör a bemeneti töltésgerjesztést egy vele azonos számértékű kimenő feszültségbe képezi le minden fázisban. Ha ezt az analizálandó SC hálózatunk elé kapcsoljuk, az eredeti SC hálózat i bemenetéről értelmezett bármely feszültség transzfer mátrix számértékileg azonos lesz a kibővített hálózat $\hat{\imath}$ bemenetéről értelmezett megfelelő töltés-feszültség transzfer mátrixszal.

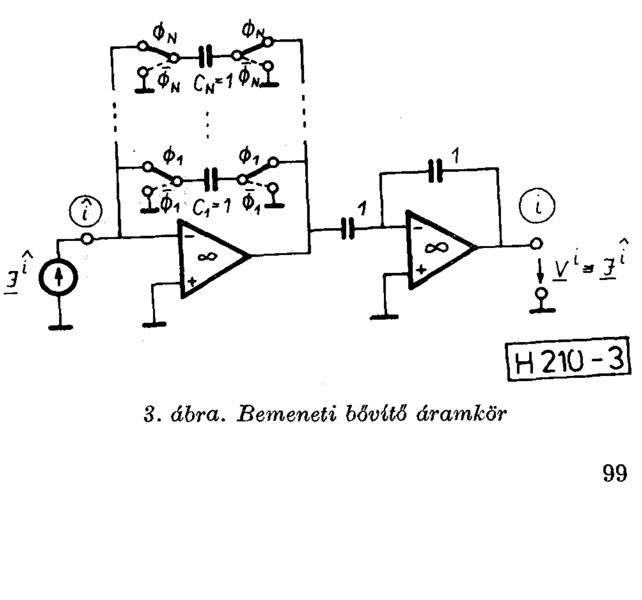
Az elmondottak szerint előállított csomóponti egyenletrendszert az alábbi formában nyerjük:

$$\mathbf{N}(z)\mathbf{V}(z)=\mathbf{J}(z)$$

$$\mathbf{N}(z)=\begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 & & & -\mathsf{B}_1 z^{-1} \\ -\mathsf{B}_2 & \mathsf{A}_2 & & \\ & -\mathsf{B}_3 & \mathsf{A}_3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -\mathsf{B}_N & \mathsf{A}_N \end{bmatrix} \qquad (19)$$



2. ábra. Normál gráf a futási időhöz



3. ábra. Bemeneti bővítő áramkör

A csomóponti mátrix $\mathbf{D}(z) = \mathbf{N}^{-1}(z)$ inverzére — kihasználva a speciális sávmátrix struktúrát — a következő formulák vezethetők le:

$$\mathbf{D}_{k1} = z^{-1}\mathbf{R}_k(1 - z^{-1}\mathbf{R}_N)^{-1}\mathbf{P}_{N1} + \mathbf{P}_{k1} \qquad k = 1 \ldots N-1$$

$$\mathbf{D}_{Nl} = (1 - z^{-1}\mathbf{B}_N)^{-1}\mathbf{P}_{Nl} \qquad k = N \qquad (20)$$

ahol az

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{G}_k\mathbf{G}_{k-1} \ldots \mathbf{G}_1 \qquad \mathbf{G}_k = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{B}_k$$

$$\mathbf{P}_{kl} = \begin{cases} \mathbf{G}_k \ldots \mathbf{G}_{l+1}\mathbf{A}_l^{-1} & l < k \\ \mathbf{A}_k^{-1} & l = k \\ 0 & l > k \end{cases} \qquad (21)$$

mátrixok z-től függetlenek és előre kiszámolhatók. (20) szerint a számítások csak egyetlen fázisnak megfelelő méretű mátrix invertálását (LU felbontását) igénylik frekvenciánként.

A D_{kl}^{mn} mátrixelemek a J_l^n csomóponti töltósgerjesztést és a V_k^m csomóponti feszültséget összekapcsoló töltés-feszültség transzfer függvények. Az alternatív érzékenység formulák közül a megfelelők kiválasztásával az érzékenység és futási idő analízishez szükséges bármely transzfer függvény a $\mathbf{D}$ mátrixból egyszerűen meghatározható. Ez töltés-feszültség transzfer mátrixok ($\mathbf{W}$) és bemenettől értelmezett feszültség transzfer mátrixok ($\mathbf{T}^{\cdot i}$) esetén nyilvánvaló; a (14)-beli $\mathbf{T}^{os}$-re pedig az alábbi formula nyerhető:

$$\mathbf{T}_{kl}^{os} = \sum_x T_{kl}^{ox} = \sum_x c_x(W_{kl}^{ox} - W_{k,\,l+1}^{ox}) =$$

$$= \mathbf{D}_{kl}^{o\cdot}\mathbf{A}_l^{\cdot s} - \mathbf{D}_{k,l+1}^{o\cdot}\mathbf{B}_{l1}^{\cdot s} \qquad (22)$$

ahol az o. és .s felső indexek az o-adik sort ill. s-edik oszlopot jelölik, x pedig azon kapacitás ágak, melyek az l-edik fázisban a műveleti erősítő s kimeneti csomópontjához csatlakoznak.

6. Számítógép programok

A cikkben bemutatott eredmények felhasználásra kerültek a SCANSY [6] és HISCAN [7] számítógép programokban kétfázisú 50%-os órajel kitöltésű SC hálózatok esetére. A SCANSY program többek között meghatározza az elsőrendű érzékenységeket és azok alapján a várható kihozatal közelítő becslését is megadja mintavett és teljes periódusra tartott bemenő jel esetén. Több példa mellett egy PCM csatornaszűrő első tervezését sikerült lényegesen javítani pusztán a szűrő érzékenység függvényeinek elemzése alapján [8]. A HISCAN program kaszkád felépítésű ellenállás-programozású hibrid SC szűrők analízisére, Monte Carlo szimulációjára és tolerancia központosítására készült folytonos bemenő jel valamint analóg sávkorlátozó és simító szűrő feltételezésével. Több futtatás szimulációs eredménye is jó összhangban volt a laboratóriumi mérések eredményeivel. A két program a *Mikroelektronikai Vállalat*, ill. a *REMIX Rádiótechnikai Gyár* anyagi támogatásával lett kifejlesztve a *Budapesti Műszaki Egyetem Híradástechnikai Elektronika Intézeté*ben.

[1] *J. Vandewalle—H. De Man—H. Rabaey:* Time, frequency and z-domain modified nodal analysis of switched capacitor networks. IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-28, March 1981, pp. 186—195.

[2] *J. Vandewalle—H. DeMan—J. Rabaey—L. Claesen:* A pictorial derivation of the signal processing mechanism of multiphase switched capacitor networks. Proc. ISCAS'82, Rome, May 1982, pp. 25—28.

[3] *E. S. Kuh—R. A. Rohrer:* Theory of Linear Active Networks. Holden Day, Inc., 1967, Chapt. 12.

[4] *J. Solymosi—T. Trón:* General interpretation of sensitivity functions. Int. J. of Circuit Theory and Applications, Vol. 4, No. 1, Jan. 1976, pp. 75—80.

[5] *K. Géher:* Theory of Network Tolerances. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.

[6] *Gefferth L.—Trón T.:* A kapcsolt kapacitású szűrők analízisét és kihozatal becslését végző SCANSY-program használati utasítása. MEV megbízás, BME—HEI, 1984. december.

[7] Használati utasítás a HISCAN (hibrid SC szűrők analízise, statisztikus ellenőrzése, tolerancia központosítása ós dinamika optimalizálása) programhoz. REMIX megbízás, BME—HEI, 1985. október.

[8] *Halász E.—Trón T.:* PCM SC csatornaszűrő érzékenység analízise. Tanulmány a MEV megbízásából, BME—HEI, 1984. május.