

A többdimenziós digitális jelfeldolgozás elméleti alapjai és alkalmazási kérdései

DR. KAPITÁNYFFY KRISZTINA
Távközlési Kutató Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk a többdimenziós digitális jelfeldolgozás matematikai alapjainak tárgyalása után legjellegzetesebb alkalmazásként a FIR- és IIR-szűrők elméletéről ad rövid áttekintést. Néhány tervezési módszer vázlatos ismertetését követően a megvalósítás módjairól is szó esik, egy konkrét szűrő áramköri realizációjával illusztrálva.

1. Bevezetés

Az utóbbi néhány évben világszerte jelentősen megnőtt az érdeklődés a többdimenziós digitális jelfeldolgozás iránt. Ez a tény talán nem is elsősorban a számos gyakorlati alkalmazási területnek köszönhető (képfeldolgozás, meteorológiai előrejelzés, szeizmikus analízis, radar tömbprocesszálas stb.), hanem annak, hogy a fejlett technológiával rendelkező országok integrált áramköri- és számítástechnikájának színvonala lehetővé teszi a többdimenziós jelfeldolgozás igen számításgigényes feladatainak viszonylag gyors és elfogadható áron történő megoldását is.

A jelen cikk célja az, hogy rövid áttekintést adjon a témában eddig elért eredményekről, illetve, hogy felhívja a figyelmet a többdimenziós jelfeldolgozás megold(hat)atlan problémáira [1].

A bevezető után a 2. fejezet kétdimenziós (2-D) digitális jelfeldolgozás matematikai alapjaival, a 3. rész a 2-D digitális szűrés elméletével, végül pedig a 4. fejezet a 2-D FIR- és IIR-szűrők tervezésének és megvalósításának leggyakoribb módszereivel foglalkozik.

A cikk folyamán az egyszerűség kedvéért — és a szakirodalom gyakorlatának is megfelelően — a 2-D esettel foglalkozunk csak; ez általában nem megy az általánosság rovására. Továbbá vizsgálatunkat lineáris shift-invariáns (LSI) rendszerekre korlátozzuk, melyeket impulzusválaszuk (képfeldolgozásban a pont szétterületi függvény) egyértelműen meghatároz.

2. A 2-D digitális jelfeldolgozás matematikai alapjai [2]

A 2-D jel olyan függvény, amely az (m, n) számpárhoz (ahol mind m , mind n egész) egy $x(m, n)$ komplex számot rendel. Az $x(m, n)$ elemeit gyakran mátrix alakban ábrázolják, ekkor — a lineáris algebraiban megszokott gyakorlattal ellentétben — m az oszlop, n a sorindexet jelöli.

Az 1-D digitális jelfeldolgozáshoz hasonlóan 2-D esetben is szükség van mintavételezésre, melynek eredményeképpen a folytonos jelből

DR. KAPITÁNYFFY KRISZTINA

1977-ben szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetem Híradástechnika Szakán. Azóta a Távközlési Kutató Intézet Jelfeldolgozási és Számítástechnikai Főosztályán dolgozik, jelenleg tudományos munkatársként. Fő érdeklődési területe a digitális jelfeldolgozás. 1981-ben szá-

mitógépes elektronikai tervezés és gyártás témakörben szakmérnöki oklevelet szerzett. 1984-ben fél évet töltött ösztöndíjas-ként a franciaországi Ecole Supérieure d'Electricité-ben, majd onnan visszatérve Kódkonverziók elmélete és alkalmazásai című disszertációjával egyetemi doktori fokozatot szerzett.

diszkrét 2-D tömböt kapunk. Sávkorlátozott jelekre a Nyquist-féle mintavételezési tételhez hasonló elvek érvényesek többdimenziós esetben is.

A továbbiakban olyan fogalmakat és összefüggéseket ismertetünk, amelyek 1-D megfelelője jól ismert. Ez nem meglepő, hiszen az 1-D LSI rendszerek az N-D rendszerek speciális esetének tekinthetők.

a) Az f függvénnyel jellemzett 2-D rendszer lineáris, ha tetszőleges $x_1(m, n)$ és $x_2(m, n)$ bemenetekre és tetszőleges c komplex konstansra

$$f[x_1(m, n) + cx_2(m, n)] = f[x_1(m, n)] + cf[x_2(m, n)]$$

b) A 2-D rendszer akkor és csak akkor shift-invariáns, ha $y(m, n) = f[x(m, n)]$ esetén tetszőleges m_0, n_0 egészekre

$$y(m - m_0, n - n_0) = f[x(m - m_0, n - n_0)]$$

c) A 2-D LSI rendszereket egyértelműen jellemző pont szétterületi függvény az alábbiakban definiált 2-D egységimpulzusra adott válasz

$$u(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = n = 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

d) A 2-D LSI rendszerek $y(m, n)$ kimenete az $x(m, n)$ bemenet és a $h(m, n)$ impulzusválasz konvolúciójával számítható, azaz:

$$y(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(k, l)h(m-k, n-l) = x(m, n) * h(m, n)$$

e) Az $x(m, n)$ diszkrét tömb z -transzformáltja az

$$X(w, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m, n)w^{-m}z^{-n}$$

ahol w és z tetszőleges komplex szám; a (w, z) hipersíkbeli konvergencia-tartományt w és z

Beérkezett: 1986. VII. 6. (□)

azon értékei alkotják, melyekre a jobboldal konvergens.

Jelölje $H(w, z)$ a $h(m, n)$ impulzusválasz, $Y(w, z)$ pedig az $y(m, n) = x(m, n) * h(m, n)$ kimenet z -transzformáltját. Ekkor érvényes az $Y(w, z) = X(w, z) \cdot H(w, z)$ összefüggés.

f) Ha egy 2-D sorozat abszolút konvergens, akkor kifejezhető sinusok lineárkombinációjával (2-D Fourier-transzformált):

$$X(\omega, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m, n) e^{-j(m\omega + n\mu)}$$

Az inverz Fourier-transzformált a következő alakú:

$$x(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega, \mu) e^{j(m\omega + n\mu)} d\omega d\mu$$

A fenti összefüggésből látszik, hogy X mind ω , mind μ szerint periódikus, 2π periódus hosszúsággal. A Fourier-transzformált értéke megegyezik a $w = e^{j\omega}$, $z = e^{j\mu}$ -vei jellemzett síkon számított z -transzformált értékével. A megfelelő Fourier-transzformáltakra is érvényes az

$$Y(\omega, \mu) = X(\omega, \mu) \cdot H(\omega, \mu)$$

összefüggés.

g) A diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) alkalmazása az 1-D esethez hasonló számítástechnikai előnyökkel jár. Ha feltételezzük, hogy az $x(m, n)$ sorozat elemei csak $0 \leq m \leq M-1$ és $0 \leq n \leq N-1$ esetén különböznek 0-tól, akkor $x(m, n)$ 2-D DFT-je a következő alakú:

$$X(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-j2\pi \left(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N} \right)}$$

Az inverz DFT az alábbi:

$$x(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(k, l) e^{j2\pi \left(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N} \right)}$$

Látható, hogy az $x(m, n)$ diszkrét tömb DFT-je megegyezik a Fourier-transzformált $\omega = 2\pi k/M$, $\mu = 2\pi l/N$ pontokban felvett értékével $0 \leq m \leq M-1$ és $0 \leq n \leq N-1$ esetén. Egyszerűen bizonyítható, hogy a 2-D DFT az alábbi módon 1-D DFT-kre vezethető vissza:

$$X(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi km/M} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi ln/N} x(m, n)$$

3. A 2-D digitális szűrés elméleti alapjai

Ha egy adott szűrés feladatát olyan áramkörrel valósítunk meg, melynek $h(m, n)$ impulzusválasza csak véges számú 0-tól különböző mintát tartalmaz, akkor ezt az áramkört FIR-szűrőnek nevezzük.

Az $y(m, n)$ kimenet és az $x(m, n)$ bemenet kapcsolatát az

$$y(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(m-k, n-l) h(m-k, n-l)$$

összefüggés írja le. Egy konkrét (m, n) számpárhoz tartozó kimeneti mintát úgy állítunk elő, hogy mintegy maszkot helyezünk a bemeneti tömb megfelelő mintái elé, és ezeknek a vonatkozó impulzusválaszegyütthetőkkel képzett szorzatait összegezzük. Ezután a maszkot akár m , akár n növekedésének irányában továbbléptethetjük, hiszen a kimeneti minták értéke független előállításuk sorrendjétől.

Ha a fenti kifejezésben az összegzési határok nem végesek, akkor IIR-szűrőről beszélünk. Tételezzük fel, hogy az IIR-szűrő impulzusválaszána z -transzformáltja felírható véges fokszámú polinomok hányadosaként, azaz

$$H(w, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m, n) w^{-m} z^{-n} = \frac{A(w, z)}{B(w, z)},$$

ahol

$$A(w, z) = \sum_{k=0}^{M_1} \sum_{l=0}^{N_1} a(k, l) w^{-k} z^{-l}$$

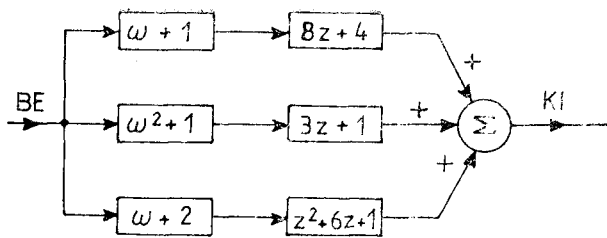
$$B(w, z) = \sum_{k=0}^{M_2} \sum_{l=0}^{N_2} b(k, l) w^{-k} z^{-l}$$

A szűrő be- és kimeneti mintái közötti összefüggést az alábbi differenciaegyenlet írja le:

$$\sum_{m=0}^{M_2} \sum_{n=0}^{N_2} b(m, n) y(k-m, l-n) = \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{N_1} a(m, n) x(k-m, l-n)$$

Látható, hogy a kimenet a bemenetből és a kezdeti feltételekből rekurzívan számítható. Előfordulhat azonban, hogy a kimeneti mintáknak nem létezik olyan számítási sorrendje, hogy a bemenetből és a már kiszámított kimeneti mintákból a többi $y(m, n)$ előállítható legyen. Ekkor az IIR-szűrő nem rekurzibilis.

A többdimenziós IIR-szűrőkkel kapcsolatos legnagyobb probléma azonban azok stabilitásával



H228-1

1. ábra. Dekompozícióval előállított 2-D FIR-szűrő

függ össze. Az algebra alaptétele ugyanis, mely szerint egy egydimenziós n -edfokú polinom egyértelműen felbontható n darab elsőfokú polinom szorzatára, több dimenzió esetén nem érvényes. Ennek eredményeképpen a többdimenziós digitális szűrők stabilitása az alacsony fokszámú polinomokra megadható egyszerű kritériumok alapján nem ellenőrizhető, sőt az instabil áramkörök megfelelő mindentáteresztők kaszkád kapcsolásával nem tehetők stabillá. A frekvenciaválasz faktorizálhatatlansága természetesen a másodfokú alaptagok kaszkád kapcsolásával történő realizációt is kizárja. Mindezek miatt nem meglepő, hogy az IIR-szűrő tervezési eljárások mindegyikének részét képezi az áramkör stabilitásának vizsgálata. Jobb kritérium híján annak a feltételnek a kielégítését szokták előírni, hogy a szűrő korlátos bemeneti sorozat hatására korlátos kimeneti sorozatot állítson elő. Ez az ún. BIBO (bounded input bounded output) stabilitás a

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(m, n)| < \infty$$

egyenlőtlenség teljesítésével ekvivalens. Számos tételt dolgoztak ki abból a célból, hogy a BIBO-kritérium teljesülését a gyakorlatban is ellenőrizni lehessen. Anélkül, hogy ezzel a kérdéssel részletesen foglalkoznánk, csak a Shanks-féle tételt közöljük, mely szerint egy 2-D IIR-szűrő akkor és csak akkor BIBO-stabil, ha nincs olyan w és z , hogy a

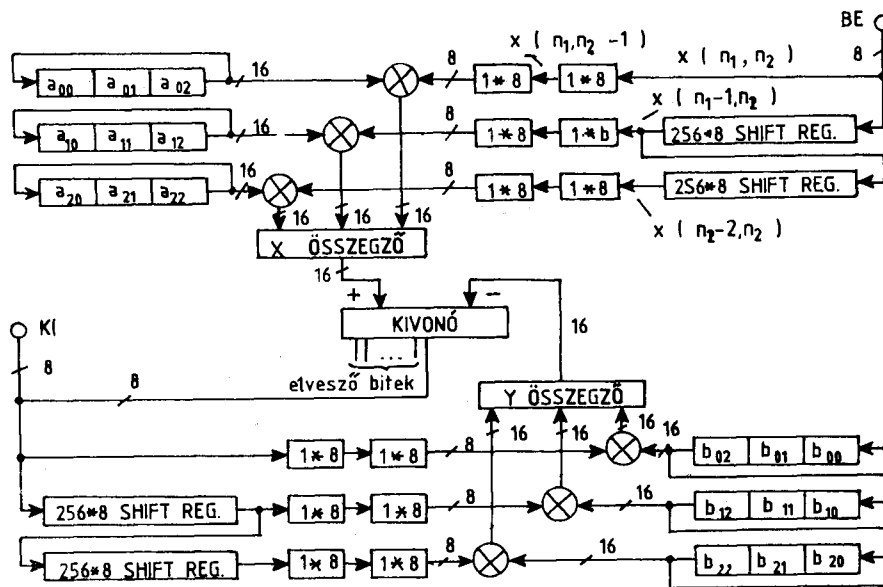
$$H(w, z) = \frac{A(w, z)}{B(w, z)} = \frac{\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a(m, n)w^{-m}z^{-n}}{\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L b(k, l)w^{-k}z^{-l}}$$

kifejezésben $B(w, z) = 0$ $|w| \geq 1$ és $|z| \geq 1$ egyidejű fennállása esetén. Nyilvánvaló, hogy a Shanks-tétel annak az egydimenziós követelménynek az általánosítása, hogy a rendszerfüggvény pólusainak az egységsugarú kör belsejébe kell esniük. A stabilitási kérdések mélyrehatóbb tárgyalása céljából a [3] és [4] irodalmat ajánljuk.

4. Néhány módszer 2-D digitális szűrők tervezésére és megvalósítására

A 2-D szűrők tervezésére és megvalósítására szolgáló módszerek igen széles skálán mozognak. FIR-szűrők esetén — mivel stabilitási problémák nem lépnek fel — az egydimenziós tervezési eljárások nagy része általánosítható. IIR-szűrőkre azonban új módszereket kellett kidolgozni. Az eljárások közötti választást többnyire a megvalósítandó karakterisztika jellege szabja meg (pl. körszimmetrikus vagy fan-szűrő).

A megvalósítás FIR-szűrőknél általában direkt módon vagy konvolúció alkalmazásával történik,



H228-2

2. ábra. 2-D IIR-szűrő direkt megvalósítása

míg IIR-szűrőknél leggyakrabban differencia-egyenletek alapján. Érdemes megemlíteni azt is, hogy 2-D feladatok végrehajtására megfelelő leképzési technikák segítségével alkalmazhatók 1-D szűrők is [5].

A továbbiakban a teljesség igénye nélkül néhány tervezési eljárást és megvalósítási példát közlünk.

4.1. Több dimenzióra általánosítható egydimenziós digitális szűrőtervezési módszerek

1-D FIR-szűrőket a leggyakrabban az ablak-módszer, a frekvencia-mintavételezési eljárás és az optimális szűrőtervező algoritmusok valamelyikével tervezünk. Ezek mindegyike viszonylag egyszerűen általánosítható több dimenzióra is. Nézzük meg például, hogyan végezhető el a 2-D-ra történő kiterjesztés az ablakmódszer esetén [1], [2].

Ennek az a lényege, hogy az $i(m,n)$ ideális impulzusválaszt egy $h(m,n)$ impulzusválaszú FIR-szűrővel approximáljuk. Általában $i(m,n)$ (az $I(\omega, \mu)$ ideális frekvenciaválasz inverz DFT-je) végtelen sorozat, amelyből a véges $h(m,n)$ -et a $w(m,n)$ véges ablakfüggvénnyel való szorzás után kapjuk.

$$h(m, n) = i(m, n)w(m, n)$$

A frekvenciatartományban

$$H(\omega, \mu) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\alpha, \beta) W(\omega - \alpha, \mu - \beta) d\alpha d\beta$$

ahol $W(\omega, \mu)$ az ablakfüggvény Fourier-transzformáltja.

Az ablakmódszer, ha nem is túlságosan jó, de igen gyors approximációt tesz lehetővé. Különösen érvényes ez a megállapítás arra az esetre, amikor az ablakfüggvény szeparálható, azaz

$$w(m,n) = w_1(m) \cdot w_2(n)$$

alakba írható. Ekkor w_1 és w_2 1-D ablakok.

1-D IIR-szűrők tervezésére az analóg szűrők bilineáris transzformációját használják. Ennek 2-D-ra történő általánosítását megnehezíti az a tény, hogy az 1-D analóg szűrőből először 2-D analóg szűrőt kell előállítani, valamint, hogy az így tervezett áramkör nem minden esetben stabil.

Tekintsük az alábbi módszert [4] a következő speciális esetben. Legyen $H(s)$ egy analóg szűrő Laplace-transzformáltja, és definiáljuk a $H(s_1, s_2)$ 2-D analóg szűrőt úgy, hogy s_2 függvényében konstans legyen, azaz

$$H(s_1, s_2) = H(s_1)$$

Az

$$\begin{aligned} s_1 &= s'_1 \cos \Theta + s'_2 \sin \Theta \\ s_2 &= s'_2 \cos \Theta - s'_1 \sin \Theta \end{aligned}$$

transzformációt elvégezve a válaszfüggvény a 2-D Fourier-síkon Θ szöggel elforgatható. Az

$$s_1 = \frac{w-1}{w+1}; \quad s_2 = \frac{z-1}{z+1}$$

alakú bilineáris transzformáció végrehajtása után egy 2-D rekurzív szűrőt kapunk. Különböző elforgatási szögekkel és 1-D analóg prototípusokból transzformált szűrők kaszkád kapcsolásával igen eltérő specifikációk is megvalósíthatók, továbbá bizonyítható, hogy $270^\circ < \Theta < 360^\circ$ esetén az elforgatott szűrő stabil lesz [6].

4.2. 1-D digitális szűrők transzformációja 2-D-ra

Ebbe a kategóriába olyan tervezési eljárások tartoznak, melyek egy $\Omega = f(\omega, \mu)$ típusú transzformáció segítségével egy stabil 1-D digitális FIR- vagy IIR-szűrőt egy adott specifikációt teljesítő 2-D áramkörre alakítanak. A módszerekre általában jellemző, hogy csak egy meghatározott alakú karakterisztikát tudnak közelíteni.

A továbbiakban — mint az ilyen típusú módszerek legjellegzetesebb képviselőjét — a McClellan-féle frekvencia-transzformációt ismertetjük részletesen, mely körszimmetrikus előírások teljesítésére alkalmas FIR-szűrőt eredményez [7].

Legyen egy 1-D zérus fázisú szűrő impulzusválasza $h(n)$, $-N \leq n \leq N$; ekkor fennáll a $h(n) = h^*(-n)$ egyenlőség. Tételezzük fel továbbá, hogy a $h(n)$ mintái valósak. Ekkor Fourier-transzformáltjuk, $H(\Omega)$ a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= h(0) + \sum_{n=1}^N h(n)[e^{-j\Omega n} + e^{j\Omega n}] = \\ &= \sum_{n=1}^N a(n) \cos \Omega n \end{aligned}$$

A képletben $\cos \Omega n$ kifejezhető a $\cos \Omega$ változó n -edrendű Csebisev-polinomjaként:

$$\cos \Omega n = T_n(\cos \Omega),$$

azaz

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n(\cos \Omega)$$

Ha ezután az f transzformációs függvény segítségével a

$$\cos \Omega \rightarrow f(\omega, \mu)$$

transzformációt végrehajtjuk, akkor megkapjuk az alábbi 2-D frekvenciaválaszt:

$$H(\omega, \mu) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n[f(\omega, \mu)]$$

Az $f(\omega, \mu)$ -t úgy kell megválasztani, hogy az maga is egy 2-D szűrő frekvenciaválasza legyen, hiszen az izopotenciálnak nevezett $f(\omega, \mu) = \text{const}$ pontok $H(\omega, \mu)$ izopotenciáljai is. McClellan-tól származik az alábbi transzformációs függvény:

$$f(\omega, \mu) = A + B \cos \omega + C \cos \mu + D \cos(\omega - \mu) + E \cos(\omega + \mu)$$

ahol A, B, C, D és E szabad paraméterek, amelyek az 1-D prototípus fokszámától függetlenül meghatározzák a $H(\omega, \mu)$ izopotenciálok alakját. A $H(\omega, \mu)$ -nek az izopotenciálok felvett értéke ugyanakkor nemcsak $f(\omega, \mu)$ értékétől, hanem a prototípus szűrő $a(n)$ paramétereitől is függ. Így a tervezés első lépésében az izopotenciálok alakját határozzuk meg az A, B, C, D és E szabad paraméterek segítségével, utána pedig az izopotenciálon felvett értéket a prototípus frekvencia-válaszából.

Megjegyzendő, hogy nemrégiben számítógépes program készült 2-D körszimmetrikus FIR alul- és felüláteresztő szűrők tervezésére a fent ismertetett módszerrel [8].

4.3. 2-D digitális szűrők dekompozíciója

Már a korábbiakban is szó esett arról, hogy mekkora könnyebbséget jelentene a többdimenziós szűrők tervezésében és megvalósításában az, ha az algebra alaptétele itt is érvényes volna. Továbbá természetesen igen előnyös lenne, ha az impulzusválaszt lehetne szeparálni, azaz 1-D tényező szorzatára bontani. Venetsanopoulos és Mertzios [9] publikált ugyan egy olyan — meglehetősen bonyolult, néhol vitatható, de igen szellemes — megoldást, mely mindkét problémát egyidejűleg megoldja, mielőtt azonban ezzel részletesen foglalkoznánk, megemlítjük, hogy a gyakorlatban szélesebb körben alkalmazzák az alábbi kompromisszumos megoldásokat:

— FIR-szűrők esetén az ún. többfokozatú szeparálható szűrőket, amelyek a $h(m, n)$ impulzusválaszt szeparálható $h_i(m, n)$ impulzusválaszú szűrők párhuzamos kapcsolatára bontják, azaz

$$h(m, n) = \sum_i h_i(m, n)$$

— IIR-szűrők esetén az ún. szeparálható nevezőjű szűrőket, melyek a

$$H(\omega, \mu) = \frac{A(\omega, \mu)}{B_1(\omega) \cdot B_2(\mu)}$$

felbontás alapján, azaz egy nem szeparálható 2-D FIR-szűrő és két 1-D IIR-szűrő kaszkád kapcsolatával viszonylag flexibilis tervezést tesznek lehetővé.

Ezek után kövessük végig a [9]-ben publikált általános megoldást, mely egy tetszőleges k -dimenziós (esetünkben legyen $k=2$) racionális függvény olyan elsőfokú faktorokra való felbontását adja meg, amelyek mindegyike csak egy változó függvénye. Tekintsük a

$$H(w, z) = \frac{A(w, z)}{B(w, z)} = \frac{\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L a(k, l) w^k z^l}{\sum_{k=0}^{\tilde{K}} \sum_{l=0}^{\tilde{L}} b(k, l) w^k z^l}$$

függvényt, és hajtsuk végre az alábbi lépéseket:

— Hozzuk a számlálót a következő alakra:

$$A(w, z) = \sum_{k=0}^K w^k a_1(z) = \mathbf{W}^T \mathbf{A}_1(z)$$

— Válasszunk egy $\mathbf{R} (K+1) \times (K+1)$ -es nonsinguláris mátrixot úgy, hogy

$$\mathbf{A}_1(z) = \mathbf{R} \mathbf{S}_1(z)$$

$$A(w, z) = [\mathbf{W}^T \mathbf{R}] [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_1(z)]$$

— A dekompozíció során nyert 1-D faktorok tehát $\mathbf{W}^T \mathbf{R}$ és $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_1(z)$.

— Ezután írjuk a nevezőt $B(w, z) = \prod_{i=1}^P b_i$ alakba,

ahol a b_i -k olyan irreducibilis polinomok, amelyek vagy mindkét változót, vagy csak azok egyikét tartalmazzák. A $b_i = c_i + b_i^*$ felbontással (ahol c_i konstans és b_i^* -nek nincs konstans eleme) a nevező a következőképpen írható fel:

$$H_D(w, z) = \frac{1}{B(w, z)} = \prod_{i=1}^P \frac{1}{c_i + b_i^*} = \prod_{i=1}^P \frac{1/c_i}{1 + b_i^*/c_i} = \prod_{i=1}^P H_{Di}$$

Látható, hogy minden H_{Di} egy egy vagy két változót tartalmazó visszacsatolással realizálható, b_i^* dekompozíciója pedig a számlálóéhoz hasonlóan végezhető.

Példaképpen hajtsuk végre a

$H(w, z) = 3w^2z + 2wz + w^2 + 3w - z + 2z^2 - wz^2 + 3$ függvénnyel jellemzett 2-D FIR-szűrő dekompozícióját a fenti módszerrel.

A függvény másodfokú, így 3×3 -as nonsinguláris \mathbf{R} mátrixot kell felvennünk. Legyen ez a következő:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H(w, z) = w^0(3 - z + 2z^2) + w^1(3 + 2z + z^2) + w^2(1 + 3z)$$

Az első egydimenziós faktor $\mathbf{W}^T \mathbf{R}$:

$$[w^0 \quad w^1 \quad w^2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [w + 1 \quad w^2 + 1 \quad w + 2]$$

A második 1-D faktor $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_1(z)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - z + 2z^2 \\ 3 + 2z + z^2 \\ 1 + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8z + 4 \\ 3z + 1 \\ z^2 - 6z + 1 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzésképpen elvégezhető a $[\mathbf{W}^T \mathbf{R}] \cdot [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_1(z)]$ szorzás, ekkor eredményül $H(w, z)$ -t kapjuk. A FIR-szűrő tehát az alábbi blokkdiagram szerint realizálható:

4.4. 2-D digitális szűrők megvalósítása

A 2-D szűrők megvalósítása az 1-D esethez hasonló elvekre épül. Egy konkrét módszer vagy struktúra kiválasztása az adott feladattól, elsősorban a realizálható szűrő méretétől függ.

FIR-szűrők esetén a leggyakrabban a direkt konvolúciós megvalósítással találkozunk [1]. IIR-szűrőknél a bonyolultabb feladat végrehajtására kidolgozott megoldások szélesebb skálán mozognak. Mielőtt ezekről részletesebben szólnánk, felhívjuk a figyelmet egy lényeges különbségre az 1-D és 2-D áramkörök között. Míg 1-D esetben a kimeneti minták számítási sorrendje általában teljesen kötött, 2-D esetben némi szabadságunk van ennek eldöntésében. A blokk-diagramok ezt a problémát nem tükrözik, ezeken rendszerint jól meghatározott adatfolyamot tételezünk fel, ugyanakkor a tervezéshez 2-D szűrőkre a számítási sorrend kijelölése is hozzátartozik.

IIR-szűrőket igen gyakran egyszerűbb alaptagok kaszkád vagy párhuzamos kapcsolásával valósítunk meg. Bár tudjuk, hogy a 2-D impulzusválasz általában nem faktorizálható, egyes esetekben azonban kézenfekvő a több alaptag együttes alkalmazása (pl. egy körszimmetrikus alul- és felüláteresztő kaszkád kapcsolása sávszűrőt eredményez).

A rékurzívan nem számolható IIR-szűrők megvalósításának igénye hívta létre az iterációs implementáció technikáját, melynek lényege egy 2-D IIR-szűrő frekvenciaválaszának „végtelen” számú FIR-szűrési művelet elvégzésével történő realizálása.

A legelterjedtebb megvalósítási technika azonban IIR-szűrők esetén is a direkt, azaz a leíró differencia-egyenlet alapján történő realizáció. Példaképpen kövessük végig egy 256·256 pontos kép feldolgozására szolgáló, 8 bites be- és kimenettel, valamint 16 bites belső műveletvégzési szóhosszal rendelkező másodfokú IIR-szűrő megvalósítását [10]. A kimeneti minták az

$$y(m, n) = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 a(k, l)x(m-k, n-l) - \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0}}^2 \sum_{j=0}^2 b(i, j)y(m-i, n-j)$$

differencia-egyenlet alapján a 2. ábra áramköri megoldásával számíthatók. Mind a bemenő, mind a kimenő mintákat olyan tömbökben elrendezve képzeljük el, melyeknek mind a 256·256 eleme 8 bites. Így, ha az elemeken sorfolytonosan megyünk végig, akkor egy szomszédos sor ugyanazon pozíciójában levő elemének eléréséhez 256·8

bitet kell léptetni. A soron belüli szomszédos elem 8 bittel előrébb (vagy hátrább) helyezkedik el. Ezek után az ábra legfelső sorát pl. úgy kell értelmezni, hogy a differencia-egyenletben $k=0, l=2$ esetén a_{02} -t a 2 db 8 bites shift-regiszter után előálló $x(m, n-2)$ mintával, $k=0, l=1$ esetén a_{01} -et az $x(m, n-1)$ mintával (a késleltetés továbbra is 2·8 bit, a bemeneti mintatömbben azonban továbblépünk $x(m, n+l-re)$, végül $k=l=0$ esetén a_{00} -at az $x(m, n)$ mintával szorozzuk. Az áramkör többi részének működése ehhez teljesen hasonló. A számítási igényesség szemléltetésére megemlítjük, hogy egy 256·256 pontos kép feldolgozásához, amelyben egy kimeneti minta előállítására 17 szorzást igényel, nagyságrendileg $2^{20} \sim 10^6$ szorzás szükséges.

5. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Dr. Simonyi Ernő kandidátus, tudományos főosztályvezetőnek, aki figyelmemet a többdimenziós digitális jelfeldolgozásra felhívta, és akivel azóta több hasznos konzultációt folytattam. Köszönet illeti őt és Elekes József tudományos osztályvezetőt azért a támogatásért is, amelyet a témában készült egyetemi doktori disszertációm írása során nyújtottak.

I R O D A L O M

- [1] D. E. Dudgeon, R. M. Mersereau: „Multidimensional Digital Signal Processing”, Prentice-Hall, Inc., 1984.
- [2] R. M. Mersereau, D. E. Dudgeon: „Two-Dimensional Digital Filtering”, Proc. IEEE, vol. 63, pp. 610—623, Apr. 1975.
- [3] A. Fettweis: „Multidimensional Circuit and Systems Theory”, Proc. ISCAS'84, May 7—10, Montreal, vol. 3, pp. 951—957.
- [4] J. L. Shanks, S. Treitel, J. H. Justice: „Stability and Synthesis of Two-Dimensional Recursive Filters”, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-20, pp. 115—128, June 1972.
- [5] R. C. Agarwal, C. S. Burrus: „Fast One-Dimensional Digital Convolution by Multidimensional Techniques”, IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-22, pp. 1—10, Febr. 1974.
- [6] J. M. Costa, A. N. Venetsanopoulos: „Design of Circularly Symmetric Two-Dimensional Recursive Filters”, IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-22, pp. 432—443, Dec. 1974.
- [7] R. M. Mersereau, W. F. G. Mecklenbräuker, T. F. Quatieri, Jr.: „McClellan Transformations for Two-Dimensional Digital Filtering: I-Design; II-Implementation”, IEEE Trans. CAS, vol. CAS-23, No. 7, pp. 405—422. July 1976.
- [8] Sákovics József: Számítógépes program 2-D FIR alul- és felüláteresztők tervezésére McClellan-transzformációval, Diplomaterv, BME, 1986.
- [9] A. N. Venetsanopoulos, R. G. Mertzios: „Decomposition of Multidimensional Filters”, IEEE Trans. CAS, vol. CAS-30, No. 12, Dec. 1983, pp. 915—917.
- [10] Kapitányfy Krisztina: Kódkonverziók elmélete és alkalmazásai, Egyetemi doktori értekezés, 1984.