Szimbolikus hálózatanalízis
I. folyamatos idejű hálózatok

KUNSÁGI LÁSZLÓ—DR. CSÉFALVAY KLÁRA
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

DR. CSÉFALVAY KLÁRA

1966-ban szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetemen. Az egyetem elvégzése után a BME Villamosmérnöki Karra került, azóta az Elméleti Villamosságtan Tanszéken dolgozik. Elméleti munkássága főként az oktatással kapcsolatos, hallgatói tudományos tevékenységét irányítja. Fő érdeklődési területe folyamatos és diszkrét idejű hálózatok számítógépes analízise, valamint diszkrét idejű hálózatok számítógéppel segített tervezése.

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk új módszert mutat be, folyamatos idejű, koncentrált paraméterű, lineáris, időinvariáns hálózatok szimbolikus és félszimbolikus alakú átviteli függvényeinek és az amplitúdó, ill. fáziskarakterisztika elsőrendű relatív érzékenységfüggvényeinek előállítására. A hálózati egyenletek teljes rendszerét a csomóponti analízis módszerével közvetlenül a Laplace-transzformáció tartományában írjuk fel. Az egyes hálózati komponensek paramétereihez numerikus kódokat rendelünk, és az egyenletrendszert a determinánskifejtés Sannuti—Puri algoritmusa segítségével oldjuk meg. Az ismertetett módszer alapján működő SYMBOL programrendszert a BME Elméleti Villamosságtan Tanszékén fejlesztettük ki.

1. Bevezetés

A szimbolikus hálózatanalízisnek több említésre méltó előnye van, segítségével megismerhetjük a hálózat paramétereinek hatását a hálózat tulajdonságainak kialakításában, a numerikus számolási hibát a szimbolikus alakba való behelyettesítéssel csökkenteni tudjuk, iteratív paraméter optimalizálási eljárásoknál a paraméterek szimbolikus kezelése a számítások nagymértékű csökkentését eredményezheti.

Ezért a feladat bonyolultságától függően egyre nagyobb érdeklődés mutatkozik a szimbolikus hálózatanalízis iránt. Különféle szimbolikus analízismódszerek ismeretesek, mint például a jelfolyamgráfon alapuló módszerek, fakiválasztási módszerek, paraméter gerjesztéses módszerek és különböző numerikus interpolálási módszerek [1]. A szimbolikus analízisnél egy új eljárást dolgoztunk ki, amit a [4] továbbfejlesztéseként általánosabb elemkészletű folyamatos idejű hálózatokra alkalmaztunk [3], eljárásunk az előbb említett eljárásoknál hatékonyabbnak bizonyult. Folyamatos idejű lineáris hálózatok szimbolikus analízisére fejlesztettük ki a SYMBOL programrendszert.

Az általa kezelt koncentráltparaméterű, lineáris, időinvariáns hálózat R, L, C, FDNR kétpólusokat, ideális erősítőt, műveleti erősítő integrátoros modelljét és feszültségvezérelt áramforrást tartalmazhat. A gerjesztő forrás feszültség, ill. áramforrás lehet. A program a komponensek karakterisztikái és kapcsolódásuk alapján s-tartománybeli hálózati egyenletrendszert állít elő az általánosított csomóponti analízis módszerrel. Ebből az egyenletrendszerből állítja elő a kívánt átviteli függvényt, ill. tetszőleges hálózati komponens paraméterére vonatkozó $S^{|W|}(\omega, h)$ és $S^{\varphi}(\omega, h)$ elsőrendű relatív érzékenységfüggvényeket.

A program a megjelölt gerjesztés és válasz közötti átviteli függvényt szolgáltatja szimbolikus alakban, valamint az amplitúdó és fáziskarakterisztika és ezek relatív érzékenységfüggvényeinek grafikonját és listáját tetszőleges frekvenciatartományban.

Beérkezett: 1986. I. 27. (□)

2. Elemkészlet, karakterisztikák

Források:
feszültségforrás

$$E(s) = \alpha\{e(t)\} \quad \text{adott} \tag{2.1}$$

áramforrás

$$J(s) = \alpha\{j(t)\} \quad \text{adott} \tag{2.2}$$

Kétpólusú LI komponensek:
ellenállás

$$U(s) = RI(s) \tag{2.3}$$

kondenzátor

$$I(s) = sCU(s) \tag{2.4}$$

induktivitás

$$U(s) = sLI(s) \tag{2.5}$$

FDNR (frekvenciafüggő negatív ellenállás)

$$I(s) = s^2DU(s) \tag{2.6}$$

Kétkapus LI komponensek:
ideális erősítő

$$U_1 = 0, \quad I_1 = 0 \tag{2.7}$$

műveleti erősítő (integrátor modell)

$$I_1 = 0, \quad U_2(s) = \frac{\omega_T}{s} U_1(s) \tag{2.8}$$

feszültségvezérelt áramforrás

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

A fenti emlékezettel összetett kapcsolások is modellezhetők, így azok szimbolikus analízise, valamint a kapcsolások minősítése is elvégezhető.

3. A hálózati egyenletrendszer és megoldása

A hálózatot az általánosított csomóponti analízissel vizsgáljuk [2]. Az egyenleteket közvetlenül az s-tartományban írjuk fel. A hálózat változói a csomóponti potenciálok (Φ), z-típusú ágáramok (I_z) ideális erősítők, műveleti erősítők kimenetei áramai (I_b), valamint a gerjesztések, feszültségforrások forrásfeszültsége, áramforrások forrásárama. A hálózat válasza az előzőkben megjelölt változók valamelyike, vagy több változót tartalmazó kifejezésként állítható elő, ami azt jelenti, hogy a hálózat bármely feszültsége, vagy árama megjelölhető kimenő változóként (Y). Az egyenletrendszert mátrixegyenlet formájában felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{G}+s\mathbf{C}+s^2\mathbf{D}) & \mathbf{N} & \mathbf{B} & . & \mathbf{B}^J & . \\ \mathbf{M} & (\mathbf{R}+s\mathbf{L}) & . & \mathbf{B}^E & . & . \\ (\mathbf{A}+s\mathbf{F}) & . & . & . & . & . \\ . & . & . & K^E & K^J & -W^{-1} \\ \mathbf{a}^T & \mathbf{b}^r & \mathbf{c}^r & . & . & . \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Phi(s) \\ \mathbf{I}_z(s) \\ \mathbf{I}_b(s) \\ E(s) \\ J(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \mathbf{O} \qquad (3.1)$$

Az 1. sor a csomóponti egyenletrendszert, a második a z-típusú kétpólusok karakterisztikáit, a 3. sor a műveleti erősítők bemeneti feszültségkényszereit tartalmazza. A 4. sorban a hálózat válaszának és gerjesztésének kapcsolatát írjuk fel

$$E(s)-W^{-1}(s)\cdot Y(s) = 0$$

vagy

$$J(s)-W^{-1}Y(s) = 0 \qquad (3.2)$$

alakban, ha a gerjesztés feszültség (E), vagy áramforrás (J) és W az átviteli függvényt jelenti.

Az 5. sorban a hálózat Y válaszát fejeztük ki a hálózat változóival.

Az egyenletrendszert a komponensek figyelembevételével fokozatosan építjük fel, és sparse módon tároljuk.

Az (3.1)-ben az 1—3. és 5. sor egyenletrendszere a hálózati egyenletek egy teljes rendszerét jelenti, ezek lineárisan függetlenek. A 4. sor felírásával — amely a válasz és gerjesztés közötti kapcsolatot adja meg a W átviteli függvénnyel kifejezve — az előzőktői lineárisan nem független egyenletet vettünk figyelembe, így a (3.1) egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa zérus lesz.

$$\det \mathbf{H} = 0 \qquad (3.3)$$

Az egyenletrendszer determinánsát kifejtve a (3.3)-ban az egyes komponensek paramétereinek szimbólumai szerepelnek, az s Laplace-transzformáció változója, valamint szimbólumként megjelenik a W átviteli függvény jele. Ha a (3.3) egyenletből W-t a többi szimbólummal kifejezzük, megkapjuk az átviteli függvény szimbolikus alakját.

A jól ismert determinánskifejtő algoritmusok esetünkben nem használhatók, mert az együtthatómátrix betűszimbólumokat tartalmaz. Ezért a determinánst szorzatösszeggé átalakító módszert használtuk. Egy **A** mátrix determinánsának kifejezése:

$$\det \mathbf{A} = \textstyle\sum_j g_j \cdot a_{j1,1} \cdot a_{j2,2} \dots a_{jn,n} \qquad (3.4)$$

ahol a_{kl} az **A** k-adik sorában és l. oszlopában álló eleme. Az összegzést valamennyi előállítható sorozatra el kell végezni. A felhasznált $(j_1, j_2 \dots j_n)$ számsorozatokat, valamint g_j előjeleket P. Sannuti és N. N. Puri [4]-ben ismertetett algoritmusával határoztuk meg. A determináns kifejtéséhez valós számsorozatokat és megfelelő előjelet generálunk. A számsorozat j. sorában n valós szám áll, ha az **A** mátrix mérete $n \times n$. A Sannuti—Puri számsorozat:

$$ISE_j = [j1, j2, j3, \dots, jk, \dots, jn] \qquad (3.5)$$

Attól függően, hogy a k. helyen jk értéke mennyi, az **A** mátrix $a_{jk,k}$ elemét kell venni, és a $\prod_{k=1}^{n} a_{jk,k}$ szorzatot kell kiértékelni.

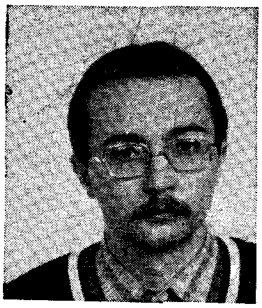
A továbbiakban a Sannuti—Puri algoritmust ismertetjük.

Tekintsünk egy **A** ritka mátrixot, és az **A** mátrix ismeretében bevezetünk egy **R** rutin mátrixot, amelyik a megfelelő oszlopaiban az **A** mátrix nem nulla mátrixelemeinek sorszámát tárolja. (Megjegyezzük, ha az **A** mátrix $n \times n$ rendszámú, az **R** $(n+1)\times n$ rendszámú is lehet, ha az **A** mátrixnak volt olyan oszlopa, amelyikben zérus nem szerepelt. Az **R** mátrix minden oszlopában az utolsó elem zérus.) A (3.6) alatt megadtunk egy **A** mátrixot, és a hozzá tartozó **R** mátrixot is generáltuk.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

Bevezetünk egy n elemű F zászlós vektort, és egy n elemű P mutató vektort.

Az **R** rutin mátrix ismeretében az ISE sorozatokat generáló algoritmus:



KUNSÁGI LÁSZLÓ

1984-ben szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetemen. Egyetemi hallgatóként, 1982-ben tudományos diákköri dolgozatot készített folyamatos idejű hálózatok átviteli függvényeinek és érzékenységfüggvényeinek szimbolikus előállítása témakörben. Dolgozatával első díjat nyert, és 1983-ban részt vett a XVI. Országos Tudományos Diákköri Konferencián. Jelenleg az MTA TMB tudományos továbbképzési ösztöndíjasa a Budapesti Műszaki Egyetem Elméleti Villamosságtan Tanszékén. Fő érdeklődési területe digitális szűrők szimbolikus számítógépes analízis, érzékenységtulajdonságaik, valamint realizálási lehetőségeik és problémáik vizsgálata.

INICIALIZÁLÁS:

SET $F(j) \leftarrow 0$, $P(j) \leftarrow 0$ minden j-re $1 \leq j \leq n$
SET $k \leftarrow 1$
SET ISE $(k) \leftarrow R(1, 1)$ és $F(\mathrm{ISE}(k)) \leftarrow 1$
GO TO a TOVÁBBLÉPÉSRE

TOVÁBBLÉPÉS:

SET $k \leftarrow k+1$
GO TO a KERESŐ LÉPÉSRE

KERESŐ LÉPÉS:

(1) IF $R(P(k), k) \begin{cases} \neq 0 & \text{GO TO (2)} \\ = 0 & \text{GO TO (5)} \end{cases}$

(2) IF $F(R(P(k), k)) \begin{cases} = 0 & \text{GO TO (3)} \\ \neq 0 & \text{GO TO (4)} \end{cases}$

(3) SET ISE $(k) \leftarrow R(P(k), k)$

SET $F(\mathrm{ISE}(k)) \leftarrow 1$

IF $k \begin{cases} = n & \text{GO TO SIKERES LÉPÉS} \\ \neq n & \text{GO TO TOVÁBBLÉPÉS} \end{cases}$

(4) SET $P(k) \leftarrow P(k)+1$ GO TO (1)

(5) IF $k \begin{cases} = 1 & \text{GO TO VÉGSŐ LÉPÉS} \\ \neq 1 & \text{GO TO VISSZALÉPÉS} \end{cases}$

VISSZALÉPÉS:

SET $P(k) \leftarrow 1$
SET $k \leftarrow k-1$
SET $F(\mathrm{ISE}(k)) \leftarrow 0$
SET $P(k) \leftarrow P(k)+1$
GO TO KERESŐ LÉPÉS

SIKERES LÉPÉS:

Egy valós sorozatot sikeresen generáltunk, a továbbiakban csak dekódolás szükséges. Más lehetséges valós sorozatot keressünk!
SET $F(\mathrm{ISE}(n)) \leftarrow 0$, $F(\mathrm{ISE}(n-1)) \leftarrow 0$
SET $P(n) \leftarrow 1$, $P(n-1) \leftarrow P(n-1)+1$
SET $k \leftarrow n-1$
GO TO KERESŐ LÉPÉS

VÉGSŐ LÉPÉS:

Minden lehetséges valós számsorozatot megtaláltunk. A Sannuti—Puri ISE sorozatok generálása kis mátrixokra rendkívül gyors, míg viszonylag nagyméretű mátrixok esetén az ISE sorozatok előállítása és kiértékelése lassú. Az ISE sorozatok alapján generáljuk az ISE előjeleket

$$g_j = \mathrm{SIGN}(\mathrm{ISE})_j \tag{3.7}$$

Algoritmus az ISE előjelek megállapítására:

Kezdjük egy adott ISE_j számsorozattal. Legyen $i=1$. A számsorozat i. helyén álló pozitív szám l. Mozgassuk l-et az l. pozícióba, ez l-i elmozdulást jelent. A módosított sorozatban ha az i. helyen $l=l$ pozitív szám áll, akkor növeljük meg i-t 1-gyel, és ismételjük meg az eljárást mindaddig, míg $i=n$ lesz. Megjegyezzük, hogy minden lépésben az előzőleg már módosított ISE jelsorozaton végezzük el a mozgatást.

Az eredeti ISE jelsorozat előjele pozitív, ha $l=1$-től n-ig a mozgatások száma páros, az előjel negatív, ha a mozgatások száma páratlan.

Például ISE: 3 1 4 2, a teljes mozgatások száma 3 (egy mozgatás $i=1$-re, és két mozgatás $i=2$-re), így $g = \mathrm{SIGN}(\mathrm{ISE})$ negatív lesz.

A (3.6) alatt adott **A** mátrixhoz tartozó Sannuti—Puri sorozatok és előjelek:

+ 1 2 3 4
− 1 4 3 2
− 3 1 4 2
− 3 2 1 4
+ 3 4 1 2

Az **A** mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24} -$$
$$- a_{31}a_{12}a_{43}a_{24} - a_{31}a_{23}a_{13}a_{41} + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24}$$

A 3.4-ben kijelölt műveletek elvégzése előtt a hálózat egyes paramétereit jelentő szimbólumokhoz numerikus kódokat rendelünk, mert a kódolásos módszer alkalmazása gyorsabbnak és hatékonyabbnak bizonyult, mint a betűszimbólumok közötti karakteres műveletvégzés. A kódolásnál kihasználtuk, hogy a 2. pontban megengedett elemkészlet paramétereire az átviteli függvény bilineáris alakú [2], azaz ezen elemek szimbólumai legfeljebb elsőfokon szerepelhetnek az átviteli függvény számlálójában és nevezőjében.

A kódolásnál 2 hatványaira épülő kódrendszert használunk. Minden elemszimbólumhoz más-más nemnegatív egész kitevőt rendelünk. A kódolt mennyiségek numerikus együtthatóit külön tároljuk. Mivel az átviteli függvény számlálója és nevezője s magasabb hatványait is tartalmazhatja, ezért s számára egy kitevőtartományt kell fenntartani. A W^{-1} szimbólum csak egy helyen fordul elő a hálózati egyenletrendszerben, így a kifejtett determináns W^{-1}-re nézve is bilineáris lesz, azaz elég hozzá egyetlen 2-hatványt rendelni. Az így kialakított hatványrendszer jól alkalmazható, mert a létrehozott kódok helyes műveletvégzés esetén nem kerülnek fedésbe, és a közöttük kijelölt műveletek és a dekódolás könnyen végrehajthatók.

A cikkben leírt elven alapuló SYMBOL programrendszert PDP 11/45 számítógépen fejlesztettük ki. Egy egész típusú változó ezen a gépen 16 bites, ekkora számábrázolási tartomány az eredmény áttekinthetőségét figyelembe véve elégnek bizonyult.

Az előjelbitet a kódolásnál nem használtuk fel, a további 15 bit felhasználása a következő:

1.—10. bit: elemszimbólumokhoz rendelt kódok
11.—14. bit: s hatványaihoz rendelt kódok
15. bit: W^{-1}-hez rendelt kód

Ez a felosztás 10 elem szimbolikus kezelését engedi meg. Ugyanakkor az átviteli függvény számlálója, ill. nevezője s-ben maximum 15-öd fokú lehet. E korlátok természetesen önkényesek (célunknak, a kis és közepes méretű hálózatok vizsgálatának megfelelnek), nem a kódolás elvéből következnek. Egész típusú vektor vagy valós változó használata egyszerű bővítési lehetőséget ad.

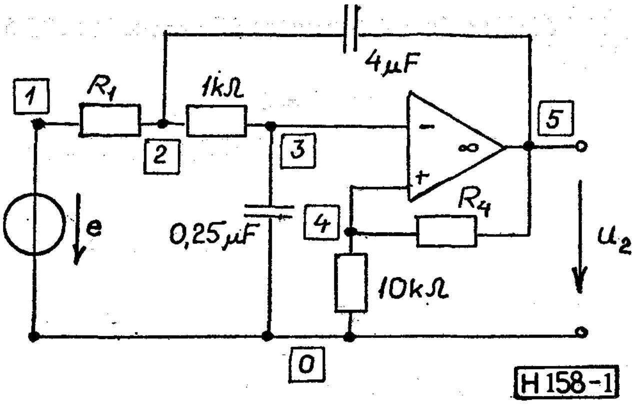
A (3.4) összefüggés szorzatösszeg formában állítja elő egy mátrix determinánsát. Ezért a korábban létrehozott kódok között két olyan műveletet kell értelmezni, melyek eredeti tartománybeli megfelelői az előjeles összeadás és a szorzás.

Két kódolt mennyiség szorzásakor a kódokat összeadjuk, a külön tárolt numerikus együtthatókat pedig összeszorozzuk. Kódolt mennyiségek összeadását csak azonos kódú mennyiségek között végezzük el (a numerikus együtthatók előjeles összeadásával), a különbözőeket egy adatvektor különböző celláiba jegyezzük be, azaz tagonként tároljuk a heterogén tagokból álló összeget.

Dekódolásnál annyi tagunk lesz, ahány elemű az adatvektorunk, az egy-egy tagon belüli tényezők pedig az egymást át nem fedő, definiált alapkódok lehetnek. Az átviteli függvény számláló, ill. nevező polinomjának elkülönítésében segít a W^{-1} szimbólum. Az ennek megfelelő kód ugyanis az együtthatómátrix szorzatösszeg alakú determinánsában csak a számláló polinom tagjaiban szerepel (a det $\mathbf{H}=0$ összefüggés miatt).

Mivel a (3.1) egyenletrendszer együtthatómátrixa rendkívül ritka (sparse), ezért jelentősen csökkenthetjük az egyenletrendszer megoldásakor igénybe vett memóriaterületet. A tárolásnál a sparse tárolási módszert használjuk, $\mathbf{H}$ nullától különböző mátrixelemeinek sor- és oszlopindexét és az itt szereplő szimbólumok numerikus kódjait tároljuk. Minél nagyobb a vizsgált hálózat mérete (az együtthatómátrix rendszáma), annál kedvezőbb ez a tárolási módszer.

Csak a (3.4)-ben kijelölt műveletek elvégzése és a számláló és nevező szétválasztása után, közvetlenül a szimbolikus átviteli függvény kinyomtatása előtt dekódoljuk a numerikus kifejezéseket az eredeti szimbólumok kifejezésébe.



1. ábra. Sallen—Key aluláteresztő szűrő

A SYMBOL program sparse tárolási módszerét, a paraméterek numerikus, illetve kódolt formájú tárolását, a Sannuti—Puri algoritmusra épülő determinánskifejtést, és végül az átviteli függvény félszimbolikus alakú előállítását mutatjuk be a Sallen—Key másodfokú aluláteresztő szűrő analízise kapcsán.

A vizsgálandó aktív RC hálózat az 1. ábrán látható. Feladatunk a $W(s)=U_2(s)/E(s)$ átviteli függvény félszimbolikus alakú előállítása.

A szimbólumokhoz numerikus kódokat rendelünk:

$$R_1 \rightarrow 512 \quad R_4 \rightarrow 256 \quad s \rightarrow 1024 \quad W \xrightarrow{-1} 16384$$

A hálózati egyenletrendszer:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc:cc:cc:c}
. & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 & . \\
. & (1+4s) & -1 & . & -4s & -1 & . & . & . & . \\
. & -1 & (1+0{,}25s) & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 0{,}1 & . & . & 1 & . & . & . \\
. & -4s & . & . & 4s & . & -1 & 1 & . & . \\
\hdashline
-1 & 1 & . & . & . & R_1 & . & . & . & . \\
. & . & . & -1 & 1 & . & R_4 & . & . & . \\
\hdashline
. & . & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . \\
-1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
\hdashline
. & . & . & W^{-1} & . & . & . & . & . & -1
\end{array}\right]}_{\mathbf{H}}
\left[\begin{array}{c}
\varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \hdashline \mathbf{I}_{R1} \\ \mathbf{I}_{R4} \\ \hdashline \mathbf{I}_M \\ \mathbf{I}_e \\ \hdashline \mathbf{E}
\end{array}\right] = 0$$

Az egyenletrendszer sparse tárolása:

Sor szám	Sor	Oszlop	Előjel + numerikus érték	Kód	Sorszám	Sor	Oszlop	Előjel + numerikus érték	Kód
1	2	2	1	0	7	7	4	−1	0
2	2	3	−1	0	8	7	5	1	0
3	3	2	−1	0	9	4	7	1	0
4	3	3	1	0	10	5	7	−1	0
5	4	4	0,1	0	11	8	4	−1	0
6	2	2	4	1024	12	8	3	1	0
7	2	5	−4	1024	13	5	8	1	0
8	5	2	−4	1024	14	9	10	1	0
9	5	5	4	1024	15	9	1	−1	0
10	3	3	0,25	1024	16	1	9	1	0
1	6	6	1	512	17	10	10	−1	0
2	6	1	−1	0	18	10	5	1	16 384
3	6	2	1	0					
4	1	6	1	0					
5	2	6	−1	0					
6	7	7	1	256					

A Sannuti—Puri sorozat:

SIGN (ISE)	ISE (jl, j2, ... jn)
−1	6 3 8 4 10 2 7 5 1 9
1	6 3 8 7 10 2 4 5 1 9
1	9 2 3 8 7 6 4 5 1 10
−1	9 3 2 8 7 6 4 5 1 10
1	9 3 8 4 2 6 7 5 1 10
−1	9 3 8 7 2 6 4 5 1 10
−1	9 6 3 8 7 2 4 5 1 10

A det $\mathbf{H}$ kifejtése az ISE sorozatok alapján numerikus és kódolt formában:

1	−1	0	s^0	Nevező
2	−0,25	1024		
3	−0,25	1536	s^1	
4	0,4	1792		
5	−1	2560	s^2	
6	1	16384		Számláló
7	0,1	16640	s^1	

Dekódolás után a determináns félszimbolikus alakú kifejezése:

$$\det \mathbf{H} = 0$$

$$W^{-1}+0{,}1R_4W^{-1}-1-0{,}25s-0{,}25R_1s+0{,}4sR_1R_4-$$

$$-s^2R_1 = 0$$

Az átviteli függvény félszimbolikus alakban:

$$W(s) = \frac{1+0{,}1R_4}{1+0{,}25s+0{,}25R_1s-0{,}4R_1R_4s+R_1s^2}$$

Ha

$$R=1 \quad \text{és} \quad R=0{,}9375 \quad [R]=h\Omega$$

az átviteli függvény:

$$W(s) = \frac{1{,}09375}{1+0{,}125s+s^2}$$

4. Az amplitúdó és fáziskarakterisztika relatív érzékenységfüggvényeinek számítása

A 2. pont alatt megadott elemkészlet lehetővé teszi, hogy a $W(s)$ átviteli függvény tetszőleges h paramétertől való függését felírjuk a következő bilineáris alakba:

$$W(s,h) = \frac{N(s,h)}{D(s,h)} = \frac{A(s)+B(s)\cdot h}{C(s)+F(s)\cdot h} \tag{4.1}$$

ahol $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $F(s)$ a h paramétertől független polinomok.

Az $S_h^W(s,h)$ relatív érzékenységfüggvényt definíció szerint képezve:

$$S_h^W(s,h) = \frac{h}{W(s,h)}\cdot\frac{\partial W(s,h)}{\partial h} =$$

$$= h\frac{B(s)\cdot C(s)-F(s)\cdot A(s)}{N(s,h)\cdot D(s,h)} \tag{4.2}$$

Az átviteli függvény érzékenységfüggvényének ismeretében az amplitúdókarakterisztika és a fáziskarakterisztika érzékenységfüggvényeinek kifejezése:

$$S_h^W(j\omega,h) = S_h^{|W|}(\omega,h)+j\varphi(\omega,h)\cdot S_h^{\varphi}(\omega,h) \tag{4.3}$$

ahol

$$\varphi(\omega,h) = \operatorname{arc} W(j\omega,h)$$

Az (4.2), valamint az (4.3) kifejezésekből az amplitúdókarakterisztika és fáziskarakterisztika relatív érzékenységfüggvénye:

$$S_h^{|W|}(\omega,h) = \operatorname{Re}\left\{h\frac{B(j\omega)C(j\omega)-F(j\omega)A(j\omega)}{N(j\omega,h)\cdot D(j\omega,h)}\right\} \tag{4.4}$$

$$S_h^{\varphi}(\omega,h) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(\omega,h)}\operatorname{Im}\left\{h\frac{B(j\omega)C(j\omega)-F(j\omega)A(j\omega)}{N(j\omega,h)\cdot D(j\omega,h)}\right\} \tag{4.5}$$

Az $S_h^{|W|}(\omega,h)$ és $S_h^{\varphi}(\omega,h)$ számítására az (4.4) és (4.5) alapján egyszerű összefüggést tudunk adni, ha az $S_h^{W(j\omega,h)}$ érzékenységfüggvény számlálóját és nevezőjét ω páros és páratlan hatványkitevőjű tagjait tartalmazó részekre bontjuk fel:

$$S_h^W(\omega,h) = \frac{N_e(\omega,h)+jN_0(\omega,h)}{D_e(\omega,h)+jD_0(\omega,h)} \tag{4.6}$$

A (4.3) alapján az átviteli karakterisztika amplitúdó és fázis érzékenységfüggvényei:

$$S_h^{|W|}(\omega,h) = \frac{N_e(\omega,h)D_e(\omega,h)+N_0(\omega,h)D_0(\omega,h)}{D_e^2(\omega,h)+D_0^2(\omega,h)} \tag{4.7}$$

$$S_h^{\varphi}(\omega,h) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(\omega,h)}\,\frac{N_0(\omega,h)D_e(\omega,h)-N_e(\omega,h)D_0(\omega,h)}{D_l^2(\omega,h)+D_0^2(\omega,h)} \tag{4.8}$$

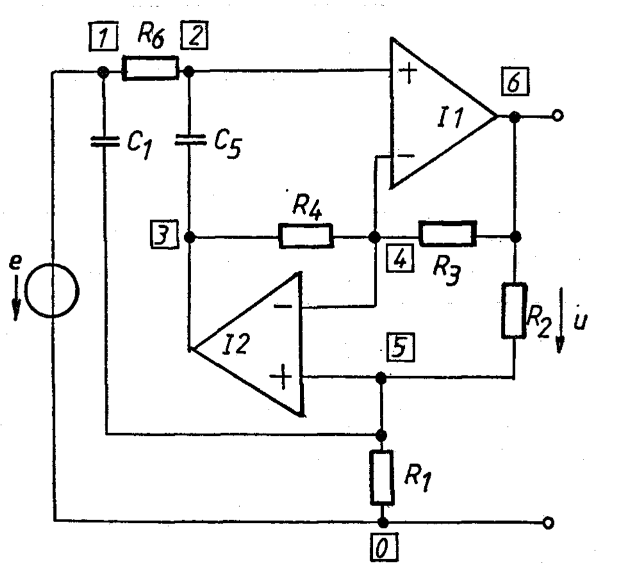
A (4.7) és (4.8) kifejezések kedvezők az érzékenységek számítógéppel történő kiszámítására. A szimbolikus és numerikus érzékenységfüggvények számítása, valamint azok grafikus megjelenítése is a SYMBOL programcsomag szolgáltatásai közé tartozik.

5. Mintapéldák

A 2. ábra ideális erősítőket tartalmazó hálózatának gerjesztése e, válasza a bejelölt u feszültség. Feladat a szimbolikus alakú $W(s)=U(s)/E(s)$ átviteli függvény meghatározása.

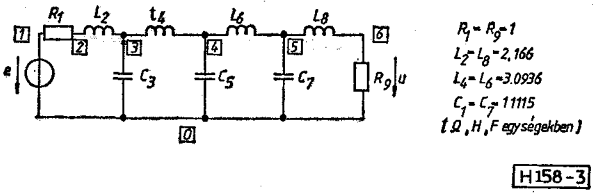
A SYMBOL által szolgáltatott eredmény:

$$W(s) = \frac{(R2\cdot R3+R1\cdot R3)+s^2\cdot R1\cdot R2\cdot R4\cdot R5\cdot C1\cdot C2}{R1\cdot R3+s\cdot R2\cdot R4\cdot R5\cdot C2+s^2\cdot R1\cdot R2\cdot R4\cdot R5\cdot C1\cdot C2}$$



H 158-2

2. *ábra.* Fiiege elliptikus alaptag



3. ábra. Hetedfokú LC aluláteresztő szűrő Csebisev approximációval

2. *példa. Hetedfokú LC aluláteresztő szűrő Csebisev approximációval*

Tekintsük a 3. ábra *LC* létrahálózatát, gerjesztése *e*, válasza az *u* feszültség. Feladat a $W(s, C5)$ félszimbolikus alakú átviteli függvény előállítása, adott *C*5 esetén az amplitúdó és fáziskarakterisztika számítása és Bode-diagramjaik ábrázolása, valamint az $S_{C5}^{|W|}(\omega)$ relatív érzékenységfüggvény számítása és ábrázolása. A SYMBOL által szolgáltatott eredmény:

$W(s, C5)=1/D(s, C5)$

$D(s, C5)=2+(12{,}742+C5)s+(23{,}384+10{,}519\cdot C5)s^2+(47{,}864+34{,}54\cdot C5)\cdot s^3+(33{,}113+51{,}066\cdot C5)s^4+(35{,}861+90{,}169\cdot C5)\cdot s^5+51{,}219\cdot C5\cdot s^6+55{,}471\cdot C5\cdot s^7$

Ha $C5=1{,}1735F$, akkor $W(s)=1/D(s)$

$D(s)=2+13{,}915s+35.728s^2+88{,}398s^3+93{,}039s^4+141{,}675\cdot s^5+60{,}106s^6+65{,}095s^7$

A szűrő amplitúdókarakterisztikájának diagramját a 4. ábra mutatja.

A fáziskarakterisztika diagramja az 5. ábrán látható.

Az $S_{C5}^{|W|}(\omega)$ relatív érzékenységfüggvény:

$S_{C5}^{|W|}(\omega)=N(\omega)$

$N(\omega)=8{,}358\omega^2+106{,}888\omega^4-1811{,}98\omega^6+7613{,}48\omega^8-14189{,}7\cdot\omega^{10}+12\,497{,}5\omega^{12}-4237{,}35\omega^{14}$

$R(\omega)=4+50{,}733\omega^2-811{,}553\cdot\omega^4+4868{,}45\cdot\omega^6-13\,907{,}9\cdot\omega^8+20\,395{,}8\omega^{10}-14\,831{,}9\cdot\omega^{12}+4237{,}35\cdot\omega^{14}$

Az $S_{C5}^{|W|}(\omega)$ érzékenységfüggvény és a $|W|(\omega)$ amplitúdókarakterisztika diagramja a 6a, b, ábrán látható.

3. *példa. Hetedfokú LC aluláteresztő szűrő Bruton-transzformáltja*

Tekintsük az előző mintapélda *LC* létrahálázatából Bruton-transzformációval előállított *RD* létrahálóza-

```
       -74.219 -64.480 -54.740 -45.001 -35.261 -25.522 -15.782 -6.0428  DB
0.2000                                                          *-7.0528
0.2244                                                          *-7.0491
0.2518                                                          *-6.9846
0.2825                                                           *-6.8412
0.3170                                                           *-6.6120
0.3557                                                            *-6.3247
0.3991                                                            *-6.0765
0.4477                                                            *-6.0428
0.5024                                                            *-6.3516
0.5637                                                           *-6.8438
0.6325                                                           *-7.0469
0.7096                                                            *-6.5254
0.7962                                                            *-6.0556
0.8934                                                           *-7.0455
1.0024                                                           *-7.2530
1.1247                                             *-24.326
1.2619                                  *-37.283
1.4159                           *-47.860
1.5887                   *-57.261
1.7825            *-65.967
2.0000      *-74.219
      FREKV.
```

H158-4

4. ábra

```
        -162.34 -114.27 -66.195 -18.123  29.948  78.020  126.0°  174.16  FOK
0.2000                        *-70.317
0.2244                       *-78.013
0.2518                      *-86.741
0.2825                    *-96.844
0.3170                  *-108.83
0.3557              *-123.37
0.3991            *-141.16
0.4477       *-162.34
0.5024                                                                          * 174.16
0.5637                                                                    * 149.85
0.6325                                                               * 124.22
0.7096                                                        * 92.217
0.7962                                              * 44.561
0.8934                                    *-11.838
1.0024                *-114.38
1.1247                                                                       * 168.29
1.2619                                                                    * 148.28
1.4159                                                                 * 137.28
1.5887                                                               * 129.70
1.7825                                                              * 123.96
2.0000                                                             * 119.39
                                         FREKV.
```

H158-5

5. ábra

```
          -43.948 -36.098 -29.048 -21.598 -14.148 -6.6976  0.7524  8.2025  08
0.3500                                     *-16.409
0.3557                                    *-16.617
0.3615                                    *-16.891
0.3674                                    *-17.241
0.3734                                   *-17.684
0.3794                                   *-18.238
0.3456                                  *-18.933
0.3919                                 *-19.806
0.3983                                *-20.916
0.4048                              *-22.358
0.4113                            *-24.301
0.9180                         *-27.097
0.4249                    *-31.718
0.4318       *-43.948
0.4388               *-36.767
0.4459                       *-28.761
0.4532                            *-24.532
0.4606                               *-21.628
0.4681                                 *-19.419
0.4757                                   *-17.649
0.4835                                     *-16.187
0.4913                                      *-14.956
0.4993                                       *-13.909
0.5075                                        *-13.014
0.5157                                         *-12.248
0.5241                                          *-11.593
0.5326                                          *-11.037
0.5413                                           *-10.570
0.5501                                           *-10.183
0.5591                                            *-9.8703
0.5682                                            *-9.6267
0.5774                                            *-9.4480
0.5868                                            *-9.3312
0.5964                                            *-9.2743
0.6061                                            *-9.2760
0.6160                                            *-9.3364
0.6260                                            *-9.4566
0.6362                                            *-9.6392
0.6466                                            *-9.8884
0.6571                                           *-10.211
0.6678                                           *-10.616
0.6787                                          *-11.117
0.6897                                          *-11.734
0.7009                                         *-12.495
0.7124                                        *-13.447
0.7240                                      *-14.658
0.7357                                     *-16.254
0.7477                                   *-18.476
0.7599                                *-21.907
0.7723                        *-28.698
0.7848               *-38.320
0.7976                               *-23.464
0.8106                                    *-17.778
0.8238                                       *-14.006
0.8372                                          *-11.082
0.8509                                             *-8.6345
0.6647                                               *-6.4932
0.8788                                                 *-4.5727
0.8931                                                   *-2.8394
0.9076                                                     *-1.3097
0.9224                                                      *-0.0819
0.9374                                                       * 0.5552
0.9527                                                      *-0.2877
0.9682                                               *-7.0939
0.9840                                                    *-1.7304
1.0000                                                              * 8.2025
                                                      FREKV.
```

H 158-6a

6a), ábra

tot (7. ábra). Feladat a frekvenciafüggő negatív ellenállásokat (FDNR) tartalmazó hálózat $W(s, D5)$ félszimbolikus alakú átviteli függvényének előállítása.

A SYMBOL eredményei:

$$W(s, D5) = \frac{N(s)}{D(s, D5)}$$

$$N(s) = 110{,}51 + s \cdot 11051$$

$$D(s, D5) = 221{,}029 + 24\,316{,}4 \cdot s +$$
$$+(143\,316 + 121\,85{,}9 \cdot D5) \cdot s^2 +$$
$$+(266\,885 + 122\,071 \cdot D5) \cdot s^3 +$$
$$+(532\,474 + 387\,160 \cdot D5) \cdot s^4 +$$
$$+(373\,484 + 580\,827 \cdot D5) \cdot s^5 +$$
$$+(396\,307 + 1\,00\,1910 \cdot D5) \cdot s^6 +$$
$$+(577\,704 \cdot D5) \cdot s^7 + (613\,007 \cdot D5) \cdot s^8$$

ha

$$D5 = 1{,}1735$$

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$N(s) = 110{,}51 + s \cdot 11\,051$$

$$D(s) = 221{,}029 + 24\,316{,}4 \cdot s + 157\,616 s^6 +$$
$$+410\,136 s^3 + 986\,806 s^* + 1\,055\,080 \cdot s^5 +$$
$$+1\,572\,040 \cdot s^6 + 677\,936 s^7 + 719\,364 s^8.$$

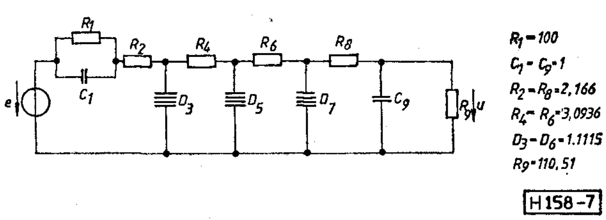
```
        -7.0194 -6.8768 -6.7341 -6.5915 -6.4489 -6.3062 -6.1636 -6.0209  DB
0.3500                                     *-6.4031
0.3557                                       *-6.3615
0.3615                                        *-6.3201
0.3674                                          *-6.2794
0.3734                                            *-6.2398
0.3794                                              *-6.2018
0.3856                                                *-6.1658
0.3919                                                  *-6.1325
0.3983                                                   *-6.1025
0.4048                                                     *-6.0762
0.4113                                                      *-6.0544
0.4180                                                       *-6.0375
0.4249                                                        *-6.0262
0.4318                                                        *-6.0209
0.4388                                                        *-6.0222
0.4459                                                       *-6.0304
0.4532                                                      *-6.0458
0.4606                                                     *-6.0685
0.4681                                                    *-6.0986
0.4757                                                  *-6.1359
0.4835                                                *-6.1802
0.4913                                             *-6.2309
0.4993                                           *-6.2875
0.5075                                        *-6.3490
0.5157                                    *-6.4147
0.5241                                 *-6.4833
0.5326                             *-6.5536
0.5413                         *-6.6242
0.5501                     *-6.6937
0.5591                 *-6.7606
0.5682             *-6.8232
0.5774          *-6.8799
0.5868       *-6.9292
0.5964     *-6.9693
0.6061   *-6.9986
0.6160  *-7.0158
0.6260  *-7.0194
0.6362   *-7.0082
0.6466    *-6.9814
0.6571       *-6.9381
0.6678          *-6.8784
0.6787              *-6.8027
0.6897                   *-6.7122
0.7009                         *-6.6092
0.7124                               *-6.4973
0.7240                                      *-6.3814
0.7357                                            *-6.2682
0.7477                                                  *-6.1661
0.7599                                                     *-6.0845
0.7723                                                        *-6.0334
0.7848                                                         *-6.0219
0.7976                                                       *-6.0563
0.8106                                                  *-6.1387
0.823*                                             *-6.2650
0.8372                                    *-6.4249
0.8509                          *-6.6018
0.8647                 *-6.7744
0.8788        *-6.9178
0.8931  *-7.0048
0.9076  *-7.0080
0.9224        *-6.9029
0.9374                   *-6.6770
0.9527                                      *-6.3554
0.9682                                                      *-6.0639
0.9840                                                  *-6.1272
1.0000  *-7.0184
        FREKV.
```

H158–6b

6b). ábra

6. Összegezés

A cikkben új módszert mutatunk be folyamatos idejű KLI hálózatok szimbolikus analízisére. A hálózati egyenletrendszert az általánosított csomóponti analízis segítségével közvetlenül az s-tartományban írjuk fel. Ismertetjük a szimbólumokat tartalmazó egyenletrendszer megoldásának módszerét, és egy lehetséges számítási eljárást az amplitúdó és fáziskarakterisztika relatív érzékenységfüggvényeinek meghatározására a



7. ábra
Hetedfokú LC aluláteresztő szűrő Bruton-transzformáltja

szimbolikus átviteli függvényből. Az itt bemutatott módszereket felhasználó, BASIC PLUS programnyelven megírt SYMBOL programrendszer a megjelölt gerjesztés és válasz közötti szimbolikus alakú átviteli függvényt, az amplitúdó és fáziskarakterisztikának, és ezek relatív érzékenységfüggvényeinek grafikonját és listáját szolgáltatja tetszőleges frekvenciatartományban. A programrendszer a BME Műszer- és Méréstechnika Tanszékének PDP 11/45 számítógépén futtatható. A kidolgozott szimbolikus analízis módszer rendkívül hatékony, ezt az egyenletrendszer gyors felépítésének és sparse tárolásának, valamint a Sannuti—Puri gyors determinánskifejtő algoritmusnak köszönheti.

7. Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki dr. Fodor György professzornak, a műszaki tudomány doktorának értékes megjegyzéseiért és a kézirat átnézéséért, és dr. Simonyi Ernőnek, a műszaki tudomány kandidátusának rendszeres szakmai támogatásáért.

IRODALOM

[1] *L. O. Chua and P. M. Lin.:* Computer-aided Analysis of Electornics Circuits, Englewood Cliffs, New Jersey Prentice Hall. 1975.

[2] *Dr. Fodor Gy.:* Villamos hálózatok csomóponti analízise. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[3] *Kunsági L.:* Átviteli függvény szimbolikus generálása, érzékenységfüggvény számítása 1982. TDK.

[4] *P. Sannuti—N. N. Puri:* Symbolic Network Analysis-An Algebraic Formulation, IEEE Trans. on Circuits yand Systems vol. CAS—27 pp. 679—687. Aug. 1980.