

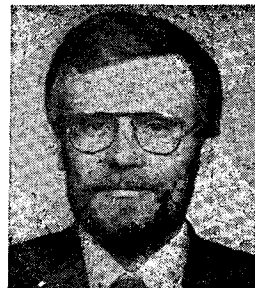
Új FFT eljárás transzponált transzformációval

DR. HENK TAMÁS

Távközlési Kutató Intézet

LEEB FERENC

BME Híradástechnikai Elektronikai Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk a DFT kiszámítására alkalmas gyors eljárások közül a Winograd-féle eljárásból kiindulva új eljárást mutat be a diszkrét Fourier-transzformáció mátrixának faktorizációjára. Elsőként ismerteti a Winograd algoritmust, majd a matematikai módszer ismertetése után bemutatja a DFT mátrix transzponált transzformációval végzett faktorizációját. Rámutat a DFT és az IDFT felbontása közötti kapcsolatra, ezután felveti egy új transzformáció bevezetésének lehetőségét. Végül a transzponált transzformáció függelékben megadott kispontszámú moduljait összeveti a WFTA moduljaival a műveletigény szempontjából.

1. Bevezetés

A DFT a diszkrét idejű jelfeldolgozás egyik kitüntetett eljárása a véges hosszúságú sorozatok leírására. Véges sorozat 1—D diszkrét Fourier-transzformáltján

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cdot \omega_N^{ik}, \quad \omega = e^{-i(2\pi/N)} \quad (1.1)$$

sorozatot értjük. A fenti egyenlet mátrix alakban is megfogalmazható:

$$X = D_N \cdot x, \quad (1.2)$$

ahol

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N^1 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Az N -pontos DFT közvetlen kiértékeléséhez N^2 komplex szorzást és $(N-1)N$ komplex összeadást kell elvégezni. Ez az eljárás nagyon időigényes, ezért a DFT redundanciáját kihasználva annak kiszámítására FFT (Fast-Fourier-Transform) eljárásokat dolgoztak ki [1]. Ezek közül az egyik a Winograd által 1975-ben publikált WFTA eljárás [1—6], amely az eredeti D_N mátrix

$$D_N = S_N \cdot C_N \cdot T_N \quad (1.4)$$

alakú felbontáson alapul, ahol $C_N(M \times M)$ méretű diagonálmátrix és S_N , ill. T_N csak 1, 0, -1 elemeket tartalmazó $(N \times M)$, ill. $(M \times N)$ méretű mátrixok [8]. Általában $M > N$, $M \sim N$, ezáltal a DFT elvégzéséhez szükséges szorzások száma N -nel lesz arányos. Winograd kis pontszámokra külön-külön optimalizálva megadta az (1.4) szerinti felbontást [7], azonban a felbontásban szereplő mátrixok egymáshoz való viszonya nem ismeretes.

Beérkezett: 1986. II. 26. (□)

DR. HENK TAMÁS

1973-ban végzett a BME Villamosmérnöki Karán. Azóta a TKI-ban dolgozik, jelenleg tudományos tanácsadóként. A TKI-ban az adatátviteli medemcsalád, számítógéppel segített tervezés és az Interscat úrtávközlő berendezés kidolgozásában vett részt. Kutatási területei: li-

nearis és nemlineáris hálózatelmélet, adatátvitel, digitális jelfeldolgozás. 1977—79-ben a Dublini Egyetemen volt vendégkutató. 1980-ban kapta egyetemi doktorátusát és 1985 óta a műszaki tudomány kandidátusa. A TKI-ban az Úrtávközlő Berendezések Osztály vezetője és a HTE-ben a Műszaki Tudományos Bizottság elnöke.

2. Faktorizáció sor-oszlop transzformációval

Ebben a cikkben a D_N mátrix sor-oszlop transzformációján alapuló faktorizációját mutatjuk be, amely

$$D_N = L_N \cdot K_N \cdot L_N^T \quad (2.1)$$

alakú. Az $L_N(N \times N)$ méretű, csak 1, 0, -1 elemeket tartalmazó mátrix, a K_N pedig $(N \times N)$ méretű kvázi-diagonál mátrix.

a) Matematikai alapok

A lineáris algebra alapján [9] az $A(n \times m)$ méretű mátrixon sor-oszlopműveleteket végezve $D(n \times n)$ méretű diagonál alakra hozható. Mátrixszorzás formájában megfogalmazva létezik olyan $S(n \times m)$, $T(m \times m)$ mátrix, hogy

$$D = S \cdot A \cdot T. \quad (2.2)$$

Megjegyezzük, hogy a (2.2) szerinti felbontás nem egyértelmű.

b) A D_N mátrix transzponált transzformációs felbontása

Felhasználva, hogy a D_N mátrix transzponáltja megegyezik önmagával, a diagonálizálásra vonatkozó eljárást speciálisan alkalmazzuk oly módon, hogy egy sor-művelet után annak oszlopműveleti megfelelőjét is elvégezzük. Az egyes lépéseknél ügyelünk arra, hogy az elő- és utórendező elemei csak 1, 0, -1 értékűek legyenek, e cél érdekében általában le kell mondanunk arról, hogy a K_N mátrix diagonál legyen, beérjük azzal, hogy a szóban forgó mátrix kvázi-diagonál legyen. Ily módon a D_N mátrix

$$K_N = M_N \cdot D_N \cdot M_N^T \quad (2.3)$$

alakban írható. Mivel a (2.3) egyenletben szereplő M_N ($N * N$) méretű nonszinguláris mátrix, így invertálható és a

$$D_N = M_N^{-1} \cdot K_N \cdot (M_N^T)^{-1} \quad (2.4)$$

alakú felbontáshoz jutunk. Az $M_N^{-1} = L_N$ alapján a (2.4) egyenlet a (2.1)-nek megfelelő alakban írható. A felbontásnál a (2.3) egyenletet invertálva a

$$K_N^{-1} = (M_N^T)^{-1} \cdot D_N^{-1} \cdot M_N^{-1} \quad (2.5)$$

egyenlethez jutunk, Figyelembe véve továbbá, hogy a DFT és az IDFT transzformációs párt alkot, azaz

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} D_N^* \quad (2.6)$$

írható, a (2.5)-ből az

$$N \cdot (K_N^{-1})^* = M_N^{-1} \cdot D_N \cdot (M_N^T)^{-1} \quad (2.7)$$

egyenletet kapjuk. A (2.1)-ben szereplő mátrixok tehát invertálás nélkül, egyszerűen megkaphatók a (2.7) szerinti felbontásból.

c) Az IDFT és a DFT felbontásának kapcsolata

A (2.7) egyenletet invertálva és rendezve a

$$D_N^{-1} = L_N \cdot (N \cdot K_N^*) \cdot L_N^T \quad (2.8)$$

egyenletre jutunk, amely az IDFT felbontását adja. Látható, hogy a transzponált tulajdonság megmarad és a felbontásban szereplő kvázi-diagonál mátrix is egyszerűen származtatható a DFT felbontásában szereplő mátrixból.

d) Új transzformáció bevezetése

Az előzők alapján egy teljes jelfeldolgozási, szűrési folyamat

$$y = D_N^{-1} \cdot F_N \cdot D_N \cdot x \quad (2.9)$$

alakban fogalmazható meg, ahol x , ill. y a gerjesztés, ill. a felelet időfüggvények oszlopvektora és F_N a szűrést kifejező ($N * N$) méretű diagonál mátrix. A (2.9) egyenletben a DFT, ill. az IDFT (2.4), ill. (2.8) szerinti felbontását felhasználva az

$$y = L_N \cdot (N \cdot K_N^*) \cdot L_N^T \cdot F_N \cdot L_N \cdot K_N \cdot L_N^T \cdot x \quad (2.10)$$

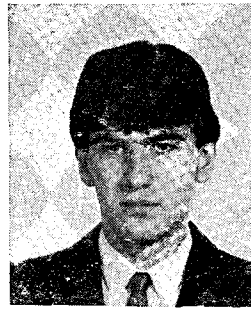
egyenletet kapjuk. A szűrést modellező F_N mátrixot a D_N^{-1} , ill. $L_N \cdot K_N$ -nel összevonhatjuk:

$$y = H \cdot L_N^T \cdot x \quad (2.11)$$

Ezáltal új transzformáció bevezetésére nyílik lehetőség

$$z = L_N^T \cdot x \quad x = (L_N^T)^{-1} \cdot z \quad (2.12)$$

Az L_N^T mátrix csak 1, 0, -1 elemeket tartalmaz, így $(L_N^T)^{-1}$ elemei 2 hatványaiként adódnak (Függelék 2), ezért a transzformáció gyorsan, szorzások nélkül végrehajtható. A transzformáció hasonló a digitális képfeldolgozásban alkalmazott Walsh-transzformációhoz, előnye, hogy közvetlen kapcsolatot teremt a Fourier-transzformációval.



LEEB FERENC

A Budapesti Műszaki Egyetem végzős hallgatója. Tudományos diákköri tevékenységét 1983 óta a BME HEI Áramkörök Osztályán MOS EC szűrők témakörben véggezte. Az 1984. évi TDK Konferencián dolgozata I. díjat nyert. Érdeklődési területe a digitális jelfeldolgozás.

3. Kis pontszámú modulok

Az előzőekben bemutatkozott eljárással meghatároztuk 2, 3, 4, 5, 6 és 8 pontszám esetén a D_N mátrix felbontását (Függelék 1), ezekből a nagyobb pontszámú modulok a WFTA eljárásnál alkalmazott módon, a kisebb pontszámú mátrixok Kronecker-szorzataként származtathatóak.

a) A WFTA és a transzponált transzformáció kis pontszámú moduljainak összehasonlítása

A kétfajta eljárás értékelésénél az egyik döntő tényező a DFT kiszámításához szükséges idő, ugyanis gyakran ez korlátozza a maximális jelfeldolgozási frekvenciát. A műveletvégzési idő pedig a szükséges szorzások és összeadások számával becsülhető, ezért ilyen szempontból hasonlítjuk össze a kétfajta eljárás kis pontszámú moduljait. A szükséges szorzások és összeadások számát az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat

N	WFTA		Transz. tr.	
	Szorzás	Összeadás	Szorzás	Összeadás
2	0	2	0	3
3	2	6	2	6
4	0	8	0	8
5	5	17	5	17
6	5	18	5	16
8	2	26	2	29

4. Következtetés

A kétfajta eljárás kis pontszámú moduljai a műveletigény szempontjából nem térnek el jelentősen egymástól. Azonban a sor-oszlop transzformációs eljárással nyert felbontás kapcsolatot teremt az elő- és utórendező között, ugyanis ezek egymás transzponáltjai. Ezzel lehetőséget nyújt egy új transzformáció bevezetésére, amely jelfeldolgozási előnyöket nyújthat a Walsh-transzformációhoz képest.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak dr. Kocsis Ferenc aspiránsnak (BME—HEI, TK1) az irodalmak rendelkezésre bocsátásáért és dr. Fülöp Tamás adjunktusnak (BME—HEI), aki munkánkat kezdettől fogva támogatta és figyelemmel kísérte.

IRODALOM

- [1] Simonyi E.: Digitális szűrők. Műszaki Könyvkiadó Bp., 1984.
- [2] Kocsis F.: Gyors eljárások a DFT kiszámítására 1—3. Híradástechnika, 544—549, 1984 (12), XXXV. évf., 31—39, 1985 (1) XXXVI. évf., 14—21. 1985. (5) XXXVI. évf.

[3] *Gád J.—Kocsis F.—Prónay G.—Solymos J.*: Spektrumanalízis DFT felhasználásával, BME—HEL tanulmány 1984.
 [4] *S. Winograd*: On the Number of Multiplications Necessary to Compute Certain Functions, *Communication on Pure and Applied Mathematics* 23 (1970), 165—179
 [5] *S. Winograd*: On the Multiplicative Complexity of the DFT *Advances in Mathematics* 32 (1979), 83—117

[6] *S. Winograd*: On multiplication in Algebraic fields. *Theoretical Computer Science* 8 (1979), 359—377
 [7] *S. Winograd*: On Computing the DFT, *Mathematics of Computation* 32 (1978), 175—199
 [8] *H. Silvermann*: An Introduction to Programming the WFTA, *IEEE Trans. On Acoustics, Speech and Signal and Processing ASSP—25* (1977), 152—165
 [9] *H. Kowalsky*: *Lineare Algebra*, 1970, Berlin, Gruyter

Függelék 1

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1.5 \\ 0 & 0-j\sqrt{3}/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -jb & 0 & jd \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & jd & 0 & -jb \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a = 5/4 \quad b = \sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$$

$$c = \sqrt{5}/4 \quad d = \sqrt{10-2\sqrt{5}}/4$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j\sqrt{3}/2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j\sqrt{2}/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Függelék 2

$$(L_2^{T-1}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_3^{T-1}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_4^{T-1}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_5^{T-1}) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(L_6^{T-1}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_8^{T-1}) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$