Érzékenységek számítása diszkrét idejű hálózatokban

CSÉFALVAY KLÁRA–VARGA IMRE
Budapesti Műszaki Egyetem

CSÉFALVAY KLÁRA

1966-ban szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetemen. Az egyetem elvégzése után a BME Villamosmérnöki Kar Elméleti Villamosságtan Tanszékére került. Fő érdeklődési területe folyamatos és diszkrét idejű hálózatok számítógépes analízise, illetve számítógéppel segített tervezése, valamint hullámváltozós hálózatok analízise, gyakorlati alkatmazások vizsgálata. Munkássága az oktatással kapcsolatos.

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk lineáris diszkrét idejű hálózatok átviteli függvényeinek, azok együtthatóinak és gyökeinek bármely szorzótényező szerinti érzékenységének számításával, félszimbolikus átviteli függvények előállításával foglalkozik. A bemutatott módszerrel a névleges paraméterértékeknél végzett egyetlen numerikus (idő-, z-, ill. frekvenciatartománybeli) analízis eredményeiből az érzékenységeken túlmenően az átviteli függvények félszimbolikus alakja is meghatározható.

1. Bevezetés

A cikk lineáris diszkrét idejű hálózatok analízisével, nevezetesen átviteli függvények, ezek szorzótényezők szerinti érzékenységfüggvényeinek, az együttható- és gyökök érzékenységének számításával, félszimbolikus átviteli függvények előállításával foglalkozik.

A 2. pontban azt a kiindulást követjük, hogy a hálózati egyenleteket az időtartományban írjuk fel. Ebből z-transzformációval, majd az egyenletek megoldásával kapjuk az átviteli függvények racionális törtfüggvény alakját. A bemutatott eljárás szerint bármely szorzó paramétere szerinti érzékenységfüggvény, együttható- és gyökérzékenységek számításához csupán a névleges paraméterértékek mellett égzett egyetlen analízis eredményeire van szükség.

A 3. pontban a hálózati egyenleteket a z-tartományban írjuk fel. Ennek megoldása az átviteli üggvényeket, azok érzékenységfüggvényeit, az gyüttható- és gyökérzékenységeket szolgáltatja.

A 4. pontban rögzített frekvencián az állandósult lapotbeli válasz és érzékenységének számítását tárgyaljuk.

Az 5. pontban megmutatjuk, hogy valamely m szorzótényező névleges értéke mellett végzett egyetlen numerikus analízis eredményeiből nem csupán az érzékenységek kaphatók meg, hanem meghatározható az átviteli függvény m bármely más értéke mellett is (félszimbolikus alak).

Végül a bemutatott eljárásokra mintapéldát közlünk.

2. Átviteli függvények és érzékenységek számítása a diszkrét idejű hálózatot leíró differenciaegyenletekből

2.1. Az átviteli függvény meghatározása

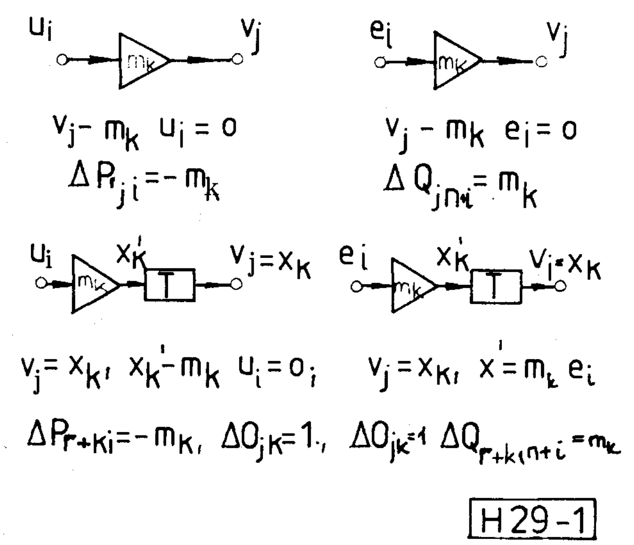
Olyan lineáris diszkrét idejű hálózatokkal foglalkozunk, amelyek az alábbi komponenseket tartalmazhatják: forrás, összegző, szorzó, szorzó és késleltető együtt. Célunk a hálózat tetszőlegesen kijelölt gerjesztéséhez és válaszához tartozó átviteli függvényét racionális törtfüggvény alakban előállítani az időtartománybeli egyenletekből. Az eljárás részeredménye a hálózatot az időtartományban leíró diszkrét állapotegyenlet normál alakja.

A hálózati egyenleteket a jelfolyamgráf alapján építjük fel. A jelfolyamgráf összesen r számú csúcsának mindegyikéhez egy változót rendelünk (az i-edikhez $v_i(pT)$-t), minden késleltető kimenete egy állapotváltozó (az i-ediké $x_i(pT)$, így az i-edik késleltető bemenete $x_i(pT+T)$). A hálózat rendszáma (jele n), az állapotváltozók száma a késleltetők számával egyezik meg. A forrásmennyiségek $e(pT)$ diszkrét értékei adottak. Az időtartománybeli lineáris differencia-egyenletrendszer

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathrm{v}(pT)\\ \mathrm{x}(pT+T)\end{bmatrix}=\mathbf{Q}\begin{bmatrix}\mathrm{x}(pT)\\ \mathrm{e}(pT)\end{bmatrix} \tag{1}$$

alakú. Ezt úgy építjük fel, hogy sorra vesszük a hálózatot alkotó komponenseket és azok hálózatbeli elhelyezkedése szerint paramétereik értékét egymás után hozzáadjuk a kiinduláskor egységmátrix $\mathbf{P}$ és zérusmátrix $\mathbf{Q}$ megfelelő elemeihez. Nevezetesen az i-edik és j-edik csúcs között a j-edik felé irányítottan elhelyezkedő k-adik szorzó m_k szorzótényezőjét úgy kell figyelembe venni (1) felépítésekor, hogy azt le kell vonni a $\mathbf{P}$ mátrix (j, i) indexű eleméből, ha az i-edik csúcs nem forráscsúcs, illetve hozzá kell adni a $\mathbf{Q}$ mátrix $(j, \mathrm{n}+i)$ indexű eleméhez, ha az i-edik csúcshoz forrás is kapcsolódik. Hasonlóképp, az i-edik és j-edik csúcs között elhelyezkedő k-adik szorzó és késleltető komponens m_k paraméterét $P(\mathrm{r}+k, i)$ indexű eleméből le kell vonni, ha i nem forráscsúcs, illetve $Q(\mathrm{r}+k, \mathrm{n}+i)$ indexű eleméhez hozzá kell adni, ha i forráscsúcs, ezen kívül $Q(j, k)$ indexű elemét eggyel meg kell növelni. Az összeadó és a forrás csak a topológia által meghatározott 1 értékkel szerepel a mátrixokban, ezeknek a komponenseknek paraméterük nincs. A fenti eljárást az 1. áb-

Beérkezett: 1984. XII. 5. (H)



1. ábra. Komponensek karakterisztikái, paraméterek figyelembevétele az időtartománybeli egyenletrendszerben

rán szemléltetjük. Végighaladva a hálózat összes elemén, a fenti szabályok alkalmazásával az (1) egyenletrendszert előállítottuk. Az érzékenységszámításnál azt fogjuk kihasználni, hogy minden szorzótényező mátrixbeli helye ismert.

Az (1) egyenletrendszert $\mathbf{P}$ invertálásával oldjuk meg, az átviteli függvény számításához kijelölt $y(pT)$ válaszváltozóval és $e(pT)$ gerjesztéssel az állapotegyenlet normál alakja

$$\begin{bmatrix} y(pT) \\ x(pT+T) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} x(pT) \\ e(pT) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c^T & d \\ \mathbf{A} & b \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A (2) állapotegyenlet z-transzformálásával az átviteli függvény

$$W(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = c^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}b + d. \quad (3)$$

A $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mátrix invertálására a Souriau—Frame algoritmust alkalmazzuk:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} q_i z^{-i}}, \quad (4)$$

ahol az együtthatók rekurzív képletekkel számolhatók [5]:

$$q_0 = 1, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i-1}\mathbf{A} + q_{i-1} \cdot \mathbf{I}$$

$$q_i = -\frac{1}{i} \operatorname{tr}(\mathbf{H}_i \mathbf{A}), \quad i = 1, \ldots, n \quad (5)$$

(tr a mátrix nyomát jelöli).

Az átviteli függvény racionális törtfüggvény alakja tehát

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n} k_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} q_i \cdot z^{-i}}, \quad (6)$$

VARGA IMRE

1982-ben szerzett villamosmérnöki, 1984-ben kitüntetéses szakmérnöki oklevelet a BME Villamosmérnöki Karán. Egyetemi hallgatóként számítógépes hálózatanalízis témakörben három tudományos diákköri dolgozatával nyert első díjat. 1982—1984 között a BME Elméleti Villamosságtan Tanszéken volt tudományos továbbképzési ösztöndíjas, elkészítette egyetemi doktori disszertációját. Jelenleg a BME Híradástechnikai Elektronika Intézetben dolgozik tanársegédként. Fő érdeklődési területe a számítógépes áramkörtervezés. A HTE tagja.

ahol a nevező együtthatói (5) szerint adottak, a számlálóé együtthatói

$$k_0 = d, \quad k_i = q_i d + e^T \mathbf{H}_i h, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (7)$$

2.2. *Az érzékenységfüggvények számítása*

Ebben a pontban azt mutatjuk meg, miként állítható elő kizárólag az előzőkben leírt analízis eredményeinek felhasználásával a $W(z)$ átviteli függvény bármely szorzó m-mel jelölt szorzótényezőjére vonatkozó

$$S_m^W(z) = \frac{\partial W}{\partial m} \quad (8)$$

abszolut érzékenységfüggvénye racionális törtfüggvény alakban (ebből a többi értelmezett relatív, ill. félig relatív érzékenységfüggvény már kifejezhető).

A $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$ összefüggésből

$$\frac{\partial \mathbf{P}^{-1}}{\partial m} = -\mathbf{P}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial m} \mathbf{P}^{-1} \quad (9)$$

(2) deriváltjának kifejezése

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c^T}{\partial m} & \frac{\partial d}{\partial m} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m} & \frac{\partial b}{\partial m} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{Q}}{\partial m} = \mathbf{P}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial m} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial m} \cdot \mathbf{T}\right) \quad (10)$$

A (10) kifejezés kiértékeléséhez a kijelölt műveleteket a fenti formában nem kell elvégezni, mert $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial m}$ és $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial m}$ egyike mindig zérusmátrix, a másik is csak egyetlen nem nulla elemet tartalmaz. Visszaidézve ugyanis az (1) egyenletrendszer képzési szabályait, az i-edik és j-edik csúcs között elhelyezkedő szorzóra a $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial m}$

mátrix (j, i) indexű eleme -1, többi eleme és $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial m}$ minden eleme nulla, így

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial m}\right)_{l,s} = (\mathbf{P}^{-1})_{l,j}(\mathbf{T})_{i,s}; \quad \begin{matrix} l=1,\ \dots,\ n+1, \\ s=1,\ \dots,\ n+1, \end{matrix} \qquad (11)$$

ha nem az i-edik csúcshoz kapcsolódik a gerjesztő forrás, illetve

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial m}\right)_{l,n+i} = (\mathbf{P}^{-1})_{l,n+l}; \quad l=1,\ \dots,\ n+1 \qquad (12)$$

és a többi oszlopa nulla (ha az i-edik csúcshoz kapcsolódik a gerjesztő forrás).

Hasonlóképp az i-edik és j-edik csúcs között elhelyezkedő k-adik szorzó és késleltető komponensre

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial m}\right)_{l,s} = (\mathbf{P}^{-1})_{l,i'}(\mathbf{T})_{r+k,s}; \quad \begin{matrix} l=1,\ \dots,\ n+1, \\ s=1,\ \dots,\ n+1, \end{matrix} \qquad (13)$$

a nem az i-edik csúcshoz kapcsolódik a gerjesztés, lletve

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial m}\right)_{l,n+i} = (\mathbf{P}^{-1})_{l,r+k}; \quad l=1,\ \dots,\ n+1 \qquad (14)$$

a többi oszlopa nulla (ha az i-edik csúcshoz kaplódik a forrás). A (10) kifejezés tehát csak formá-, ténylegesen (11)—(14) alapján állítjuk elő a $\frac{\mathbf{T}}{\partial m}$ mátrixot. Ennek particionált alakjából a $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m}$, $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial m}$, $\frac{\partial \mathbf{c}^T}{\partial m}$, $\frac{\partial d}{\partial m}$ mennyiségek kiolvashatók (10).

Az érzékenységfüggvényt (3) m szerinti parciális deriváltja adja:

$$S_m^W = \frac{\partial W}{\partial m} = \frac{\partial d}{\partial m} + \frac{\partial \mathbf{c}^T}{\partial m}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{b} +$$

$$+ \mathbf{c}^T(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial m} + \mathbf{o}^T(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m}\cdot(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{b}. \qquad (15)$$

Felhasználva a (4)—(7) összefüggéseket, az érzékenységfüggvény racionális törtfüggvény alakja

$$S_m^W(z) = \frac{R(z^{-1})}{D^2(z^{-1})};$$

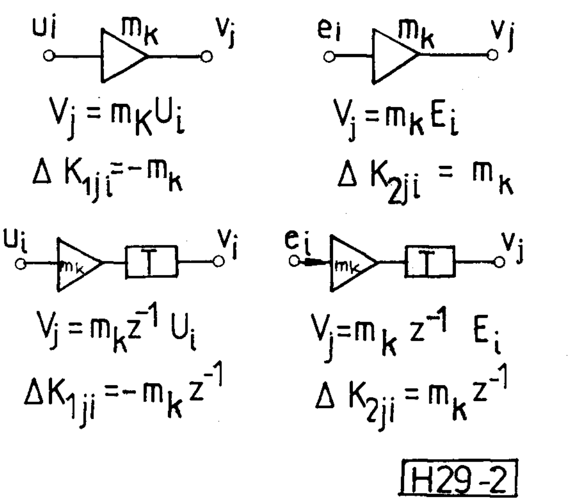
$$R(z^{-1}) = D(z^{-1})\left[\frac{\partial d}{\partial m} + \sum_{i=1}^{n}\left(q_i\frac{\partial d}{\partial m} + \frac{\partial \mathbf{c}^T}{\partial m}\mathbf{f}_i + \mathbf{v}_i^T\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial m}\right)z^{-i}\right] +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{v}_i^T\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m}\right)z^{-i}\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\cdot z^{-i}\right], \qquad (16)$$

ahol

$$D(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n} q_i z^{-i} \qquad \left.\begin{matrix} \mathbf{f}_i = \mathbf{H}_i\mathbf{b} \\ \mathbf{v}_i^T = \mathbf{c}^T\mathbf{H}_i \end{matrix}\right\} i=1,\ \dots,\ n. \qquad (17)$$

Az érzékenységfüggvényt két polinom hányadosa adja. A nevező $W(z)$ nevezőjének négyzete, a számláló polinomszorzatok összege, amelyben csak két polinom függ attól, hogy éppen melyik szorzótényezőre vonatkozó érzékenység keresett. Az érzékenységfüggvények számítása tehát lényegében csak a hálózatanalízisből már ismert mennyiségek (16)—(17) képletekbe való behelyettesítéséből áll.



2. *ábra.* Komponensek z-tartománybeli karakterisztikái, paraméterek egyenletrendszerbeli szerepe

2.3. *Együttható és gyökérzékenységek*

A következőkben az átviteli függvény k_i és q_i együtthatóinak bármely m szorzótényező szerinti abszolut érzékenységével, vagyis parciális deriváltjával foglalkozunk. Az (5)—(7) összefüggések m szerinti deriválásával

$$S_m^{q_0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial m} = \mathbf{0}, \qquad S_m^{k_0} = \frac{\partial d}{\partial m}$$

$$S_m^{q_i} = -\frac{1}{i}\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial m}\mathbf{A} + \mathbf{H}_i\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m}\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial m} = \mathbf{H}_{i-1}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m} + \frac{\partial \mathbf{H}_{i-1}}{\partial m}\mathbf{A} + \frac{\partial q_{i-1}}{\partial m}\mathbf{I}$$

$$S_m^{k_i} = \frac{\partial \mathbf{c}^T}{\partial m}\mathbf{H}_i\mathbf{b} + \mathbf{c}^T\mathbf{H}_i\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial m} + \mathbf{c}^T\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial m}\mathbf{b} + \frac{\partial d}{\partial m}q_i + d\frac{\partial q_i}{\partial m}$$

$$i=1,\ \dots,\ n. \qquad (18)$$

A (18)-ban szereplő $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m}$, $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial m}$, $\frac{\partial \mathbf{c}^T}{\partial m}$, $\frac{\partial d}{\partial m}$ mennyiségek meghatározásának módjáról már az előző pontban szóltunk. Kiszámítva tehát ezeket (10) szerint, egymástól függetlenül mind az érzékenységfüggvények, mind az együttható-érzékenységek a megfelelő (15), ill. (18) képlettel kiszámolhatók. Az együttható-érzékenységek — az együtthatókhoz hasonlóan — rekurzív képletekkel számíthatók.

Az átviteli függvény zérusainak és pólusainak érzékenységét, vagyis a gyökérzékenységeket a gyökök és az együttható-érzékenységek segítségével fejezzük ki. Az átviteli függvény nevezője a q_i együtthatókkal, ill. a p_i pólusokkal

$$D(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n} q_i z^{-i} = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i z^{-1}). \qquad (19)$$

Ebből m szerinti parciális deriválással

$$\frac{\partial D}{\partial m}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial m}z^{-i}=-Dz^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\partial p_i}{\partial m}}{1-p_i z^{-i}}. \tag{20}$$

A pólusérzékenység tehát

$$S_m^{p_j}=-\frac{\sum_{i=0}^{n}S_m^{q_i}p_j^{1-i}}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}(1-p_j p_i^{-1})}. \tag{21}$$

A zérusérzékenység hasonlóképpen

$$S_m^{z_j}=-\frac{\sum_{i=0}^{n}S_m^{k_i}z_j^{1-i}}{k_0\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1-z_j z_i^{-1})}. \tag{22}$$

A gyökök kiszámítását követően, az együttható-érzékenységekből a gyökérzékenységek már könnyen kifejezhetők.

3. Átviteli függvények és érzékenységek számítása a z-tartománybeli egyenletrendszerből

3.1. *Az átviteli függvény előállítása*

Szorzót, forrást, összegzőt, szorzót és késleltetőt tartalmazó lineáris diszkrét idejű hálózatokat vizsgálunk. A hálózati egyenleteket a z-tartományban írjuk fel és ebből fejezzük ki az átviteli függvényeket.

A hálózat jelfolyamgráfja r számú csúcsának mindegyikéhez egy változót rendelünk (az i-edikhez $V_i(z)$-t). A forrásvektort $\mathbf{E}(z)$-vel jelölve, a hálózatot a z-tartományban leíró lineáris egyenletrendszer alakja

$$(\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_2z^{-1})\mathbf{V}(z)=(\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4z^{-1})\mathbf{E}(z). \tag{23}$$

A (23) egyenletrendszert a hálózati komponensek paramétereinek fokozatos összegzésével állítjuk elő. Kiinduláskor $\mathbf{K}_1$ egységmátrix, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$, zérusmátrix. Az i-edik és j-edik csúcs között elhelyezkedő m paraméterű szorzó úgy szerepel (23)-ban, hogy $\mathbf{K}_1$ (j, i) indexű eleméből m-et le kell vonni, ha az i-edik csúcshoz forrás nem kapcsolódik, illetve $\mathbf{K}_3$ (j, i) indexű eleméhez m-et hozzá kell adni, ha az i-edik csúcshoz forrás is kapcsolódik. A szorzó és késleltető komponens m paraméterére a fenti szabályok a $\mathbf{K}_2$, ill. $\mathbf{K}_4$ mátrixokra érvényesek. A fenti eljárást a 2. ábrán szemléltetjük.

Oldjuk meg a (23) lineáris egyenletrendszert: szorozzuk be balról mindkét oldalát $\mathbf{K}_1$ inverzével (ez mindig létezik) és fejezzük ki a $\mathbf{V}(z)$ ismeretleneket:

$$\mathbf{V}(z)=(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2z^{-1})^{-1}\cdot\mathbf{K}_1^{-1}(\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4z^{-1})\cdot\mathbf{E}(z). \tag{24}$$

A tetszőlegesen kijelölhető összes lehetséges gerjesztéshez ($E(z)$ egy eleme) és válaszhoz ($V(z)$ egy eleme) tartozó átviteli függvényeket mind tartalmazza az alábbi átviteli mátrix:

$$\mathbf{W}(z)=(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2z^{-1})^{-1}\cdot\mathbf{K}_1^{-1}(\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4z^{-1}). \tag{25}$$

(25) meghatározására a Souriau—Frame-algoritmust alkalmazzuk, így kiküszöbölhetők a z-ben szimbolikus műveletek:

$$\mathbf{W}(z)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{F}_iz^{-i}}{\sum_{i=0}^{n}q_iz^{-i}}; \tag{26}$$

$$\mathbf{F}_i=\mathbf{H}_{i+1}\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_3+\mathbf{H}_i\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_4,\qquad i=1,\ \ldots,\ n-1$$

$$\mathbf{F}_0=\mathbf{H}_1\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_3,$$

ahol a $\mathbf{H}_i$, q_i együtthatók az (5) rekurzív formulákkal számíthatók, amelyekben $\mathbf{A}=\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2$ jelentésű. A (26) összefüggés az átviteli függvényeket racionális törtfüggvény alakban szolgáltatja.

3.2. *Az érzékenységfüggvények meghatározása*

Az összes átviteli függvényt tartalmazó átviteli mátrix bármely m szorzótényező szerinti abszolut érzékenységét (25) parciális deriválásával kapjuk:

$$S_m^{\mathbf{W}}=\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial m}=(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2z^{-1})^{-1}\cdot z^{-1}\frac{\partial\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2}{\partial m}\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2z^{-1})^{-1}\cdot\mathbf{K}_1^{-1}\cdot(\mathbf{K}_3+\mathbf{K}_4z^{-1})+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2z^{-1})^{-1}\left(\frac{\partial\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_3}{\partial m}+\frac{\partial\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_4}{\partial m}z^{-1}\right), \tag{27}$$

ahol

$$\frac{\partial\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_l}{\partial m}=\mathbf{K}_1^{-1}\left(\frac{\partial\mathbf{K}_l}{\partial m}-\frac{\partial\mathbf{K}_1}{\partial m}\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_l\right). \tag{27}$$

$l=2,\ 3,\ 4$

Beírva (27)-be az inverz polinommátrixot (26) szerint és racionális törtfüggvény alakra rendezve, az érzékenységfüggvény

$$S_m^{\mathbf{W}}(z)=\frac{\mathbf{R}(z^{-1})}{\left(\sum_{i=0}^{n}q_iz^{-i}\right)^2}; \tag{29}$$

$$\mathbf{R}(z^{-1})=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{H}_iz^{-i}\right)\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2}{\partial m}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{H}_i\mathbf{K}_1^{-1}(\mathbf{K}_3z^{-i-1}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{K}_4z^{-1-2}\right)+\sum_{i=0}^{n}q_i\left(\frac{\partial\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_3}{\partial m}z^{-i}+\frac{\partial\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_4}{\partial m}z^{-i-1}\right).$$

Mint az előző pontban tárgyaltuk, a (23) egyenletrendszer képzési szabályai szerint egy m szorzótényező egyszerre csak $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4$ mátrixok egyikében és annak is csak egyetlen helyén szerepel. Ennélfogva ezen mátrixok m szerinti deriváltmátrixa közül három mindig zérusmátrix, egy pedig csak egyetlen nem nulla elemet (+1 vagy −1) tartalmaz. Az érzékenységfüggvények előállítása során először a (28), majd a (29) kifejezést kell kiértékelni, ehhez minden mennyiség a hálózatanalízisből ismert.

3.3. *Együttható és gyökérzékenységek*

A (26) átviteli függvényeket tartalmazó átviteli mátrixot a (23) lineáris egyenletrendszer Souriau—

Frame-algoritmussal való megoldásával kaptuk. Emiatt az együttható-érzékenység képletei emlékeztetnek a 2. részben bemutatottakra:

$$S^{q_0}_m=0,\quad \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial m}=\mathbf{O},\quad S^{F_0}_m=\mathbf{H}_1\frac{\partial \mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_3}{\partial m};$$

$$S^{q_i}_m=-\frac{1}{i}\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial m}\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2+\mathbf{H}_i\frac{\partial \mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2}{\partial m}\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial m}=\mathbf{H}_{i-1}\frac{\partial \mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2}{\partial m}+\frac{\partial \mathbf{H}_{i-1}}{\partial m}\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_2+\frac{\partial q_{i-1}}{\partial m}\mathbf{I},\tag{30}$$

$$S^{F_i}_m=\mathbf{H}_{i+1}\frac{\partial \mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_3}{\partial m}+\frac{\partial \mathbf{H}_{i+1}}{\partial m}\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_3+\mathbf{H}_i\frac{\partial \mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_4}{\partial m}+$$

$$+\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial m}\mathbf{K}_1^{-1}\cdot\mathbf{K}_4.$$

Az együttható-érzékenységek az együtthatókhoz hasonlóan rekurzívan számíthatók, a (28) és (30) képletekkel. A (28) kiértékelését követően az érzékenységfüggvények, ill. az együttható-érzékenységek egymástól függetlenül állíthatók elő, az ismert mennyiségek megfelelő (27), ill. (30) képletekbe való behelyettesítésével.

A gyökérzékenységek az együttható-érzékenységek számítását követően a gyökök ismeretében most is a (21) és (22) kifejezésekkel határozhatók meg.

4. Átviteli karakterisztika és érzékenysége

A lineáris diszkrét idejű hálózat szorzót, forrást, összegzőt, szorzót és késleltetőt együtt tartalmazhat. A gerjesztések ω_r körfrekvenciájú szinuszos mintasorozatok, az állandósult állapotbeli válasz számítását végezzük. A hálózatot a rögzített ω_r körfrekvencián a frekvenciatartománybeli egyenletrendszerrel írjuk le, amely (23)-ból $z=e^{j\omega_r T}$ formális helyettesítéssel kapható:

$$\mathbf{P}\cdot\overline{\mathbf{V}}=\mathbf{Q}\cdot\overline{\mathbf{E}},\tag{31}$$

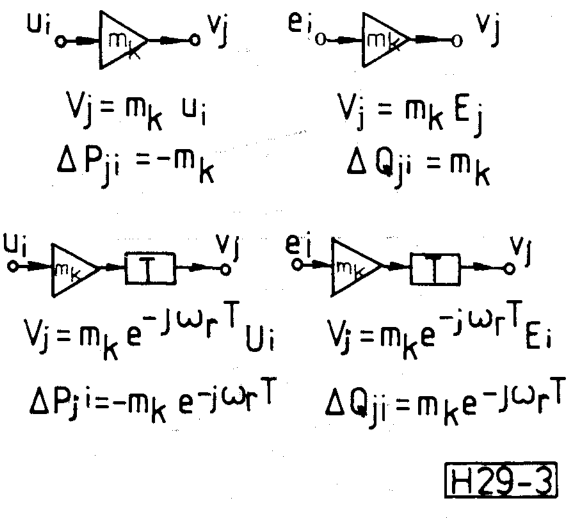
ahol $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ komplex elemű mátrix, $\overline{\mathbf{V}}$, ill. $\overline{\mathbf{E}}$ a jelfolyamgráf csúcsaihoz rendelt változók, ill. a gerjesztések komplex effektív értékét jelenti az ω_r körfrekvencián.

A (31) egyenletrendszert a hálózatot alkotó komponensek paramétereinek fokozatos összegzésével állítjuk elő. Kiinduláskor $\mathbf{P}$ egységmátrix, $\mathbf{Q}$ zérusmátrix. Az i-edik és j-edik csúcs között elhelyezkedő szorzó m paraméterét $\mathbf{P}(j, i)$ indexű eleméből le kell vonni (ha az i-edik csúcshoz forrás nem kapcsolódik), illetve $\mathbf{Q}(j, i)$ indexű eleméhez hozzá kell adni (ha az i-edik csúcshoz forrás is kapcsolódik).

A szorzó és késleltető komponensre ezek a szabályok az m helyett az $m\cdot e^{-j\omega_r T}$ mennyiségre vonatkoznak (3. ábra).

Az $\overline{Y}=\overline{V}_k$ válaszhoz és $\overline{E}=\overline{E}_i$ gerjesztéshez tartozó átviteli karakterisztika értéke az ω_r körfrekvencián:

$$W(e^{j\omega_r T})=\frac{\overline{Y}}{\overline{E}}=\mathbf{T}_{ki};\quad \mathbf{T}=\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{Q}.\tag{32}$$



3. ábra. Komponensek karakterisztikái. Paraméterek hatása a frekvenciatartománybeli egyenletrendszerre

Bármely szorzó m paraméterére vonatkozó érzékenység az ω_r körfekvencián:

$$S^W_m(e^{j\omega_r T})=\left[\mathbf{P}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial m}-\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial m}T\right)\right]_{k,i}.\tag{33}$$

Mivel (31) képzési szabályai szerint egy m szorzótényező csak $\mathbf{P}$ vagy $\mathbf{Q}$ mátrix egyikében szerepel és annak is csak egy elemében, a (33)-ban szereplő különbség egyik tagja mindig nulla és az érzékenység kiszámításához a teljes $\mathbf{P}^{-1}$ mátrixra nincs szükség, csupán annak k-adik sorára és i-edik oszlopára.

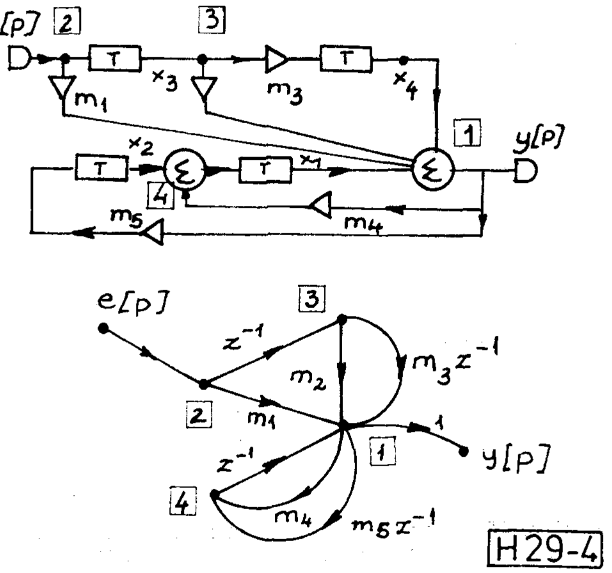
5. Félszimbolikus átviteli függvény előállítása az együttható-érzékenységek ismeretében

Ebben a pontban azt tárgyaljuk, hogyan számítható egy szorzótényező csupán egyetlen (pl. névleges) értékére a 2. vagy 3. szakasz szerint végzett numerikus analízis eredményeiből az átviteli függvény ezen szorzótényező bármely más értéke mellett. Az együttható-érzékenységek ismeretében előállítjuk az átviteli függvény m paraméterben félszimbolikus alakját, amely m-ben lineáris törtfüggvény („bilineáris") [4].

A (2), ill. (23) egyenletrendszer struktúrájából következően az átviteli függvény nevezőpolinomjában z^0 együtthatója mindig 1, miközben a többi együttható m lineáris függvénye. Eszerint az átviteli függvény Souriau—Frame-algoritmussal kapott alakja (6), ill. (26)

$$W(z,m)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i z^{-i}}{1+\sum\limits_{i=0}^{n}q_i z^{-i}}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}(k_i'+mk_i'')z^{-i}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}(q'+mq_i'')z^{-i}}=$$

$$=\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{n}k_i'z^{-i}\right)+m\left(\sum\limits_{i=0}^{n}k_i''z^{-i}\right)}{\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}q_i'z^{-i}\right)+m\left(\sum\limits_{i=1}^{n}q_i''z^{-i}\right)}.$$



4. ábra. Másodfokú alaptag

Felismerve, hogy

$$k_i''=S_m^{k_i},\quad q_i''=S_m^{q_i}$$

$$k_i'=k_i-\mathrm{m}S_m^{k_i},\quad q_i=q_i-\mathrm{m}S_m^{q_i},\qquad (35)$$

a k_i, q_i együtthatók és az $S_m^{k_i}$, $S_m^{q_i}$ együttható-érzékenységek ismeretében (35) szerint rendelkezésre áll az átviteli függvény m-ben félszimbolikus alakja (34). Ebből m bármely értékére $W(z)$ meghatározható. A lényeges tehát az, hogy m névleges értéke mellett végzett egyetlen numerikus analízis eredményeiből m bármely más értékére $W(z)$ már kiszámítható.

6. Mintapélda

A továbbiakban a számítás menetének illusztrálására mintapéldát mutatunk be. Tekintsük az alábbi lineáris diszkrét hálózatot (4. ábra).

A hálózat adatai:

(komponens, kiinduló, végcsomópont, érték)

M1: 0, 2, 1	D1: 4, 1, 1
M2: 2, 1, 0·351721	D2: 1, 4, m=0·789512
M3: 3, 1, 0·703442	D3: 2, 3, 1
M4: 1, 4, 0·975045	D4:3, 1, 0·351721.

Az időtartománybeli egyenletrendszer:

Az egyenletrendszert **P** mátrix inverzével beszorozva kapjuk a hálózat állapotegyenletét.

A diszkrét állapotegyenlet:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -0{,}351\,721 & -0{,}703\,442 & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . \\
-0{,}975\,045 & . & . & 1 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & -1 & 1 & . & . & . \\
0{,}789\,512 & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & -1 & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & -0{,}351\,721 & . & . & . & . & 1
\end{array}\right]}_{\mathbf{P}}
\left[\begin{array}{c}
v_1[p]\\ v_2[p]\\ v_3[p]\\ v_4[p]\\ \hline x_1[p+1]\\ x_2[p+\mathrm{i}]\\ x_3[p+1]\\ x_4[p+1]
\end{array}\right]=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & . & . & 1 & .\\
. & . & . & . & 1\\
. & . & 1 & . & .\\
. & 1 & . & . & .\\
\hline
. & . & . & . & .\\
. & . & . & . & .\\
. & . & . & . & .\\
. & . & . & . & .
\end{array}\right]}_{\mathbf{Q}}
\left[\begin{array}{c}
x_1[p]\\ x_2[p]\\ x_3[p]\\ x_4[p]\\ \hline \mathrm{e}[p]
\end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{c}
y[p]\\ \hline x_1[p+1]\\ x_2[p+\mathrm{i}]\\ x_3[p+1]\\ x_4[p+1]
\end{array}\right]=
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & . & 0{,}703\,442 & 1 & & 0{,}351\,721\\
\hline
0{,}975\,045 & 1 & 0{,}685\,888 & 0{,}975\,045 & & 0{,}334\,386\\
-0{,}789\,512 & . & -0{,}563\,271 & -0{,}789\,512 & & -0{,}277\,688\\
. & . & . & . & & 1\\
. & . & 0{,}351\,721 & . & & .
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_1[p]\\ x_2[p]\\ x_3[p]\\ x_4[p]\\ \hline e[p]
\end{array}\right]$$

Az állapotegyenlet megoldása a Souriau–Frame-algoritmussal:

$$W(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{n}k_i\cdot z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{n}q_i\cdot z^{-i}}=$$

$$=\frac{0{,}351721+0{,}703442z^{-1}+0{,}351721\cdot z^{-2}}{1-0{,}975045z^{-1}+0{,}789512z^{-2}}.$$

Az átviteli függvény zérusai: $z_1=z_2=-1$.

Az átviteli függvény pólusai: $p_{12}=0{,}487523\pm$ $\pm j0{,}742855$.

Az m paraméterre vonatkozó érzékenységfüggvények számítása a 2. pont alapján:

$$S_m^{w}=\frac{0{,}351721z^{-2}+0{,}703442z^{-3}+0{,}351721z^{-4}}{(1-0{,}975045z^{-1}+0{,}789512z^{-2})^2}.$$

$$S_m^{q_0}=0,\qquad S_m^{q_1}=-\operatorname{tr}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial m}=0,$$

$$S_m^{q_2}=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial \mathrm{m}}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{H}_2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial \mathrm{m}}\right)=-1$$

$$S_m^{k_0}=0,\qquad S_m^{k_1}=\mathrm{c}^T\mathbf{H}_1\frac{\partial\mathrm{b}}{\partial m}=0,$$

$$S_m^{k_2}=\mathrm{d}S_m^{q_2}+\mathrm{c}^T\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial m}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{e}^T\mathbf{H}_2\cdot\frac{\partial b}{\partial \mathrm{m}}=0$$

$$S_m^{z_1}=0,\qquad S_m^{z_2}=0,\qquad S_m^{p_1}=-\frac{s_m^{q_2}\cdot p_1^{-1}}{1-p_2\cdot p_1^{-1}}=j0{,}673079$$

$$S_m^{p_2}=-j0{,}673079.$$

Az 5. pont alapján az átviteli függvény félszimbolikus alakja:

$$W(z,\ \mathrm{m})=\frac{0{,}351721+0{,}703442z^{-1}+0{,}351721\cdot z^{-2}}{(1-0{,}975045z^{-1})+\mathrm{m}\cdot z^{-2}}.$$

Érzékenységek számítása a z-tartománybeli kiinduló egyenletrendszer alapján:

z-tartománybeli kiinduló egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}351721 & -0{,}703442 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 0{,}970\,545 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0{,}351721 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -0{,}789512 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} z^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} E.$$

Az átalakított z-tartománybeli egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_z \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdot & 0{,}703442 & 0{,}351721 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -0{,}789512 & 0{,}685888 & 0{,}342944 & 0{,}975045 \end{bmatrix} z^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0{,}351721 \\ 1 \\ \cdot \\ 0{,}334386 \end{bmatrix} E.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -0{,}351721 & (-1{,}037949+j0{,}108688) & (-0{,}951057+j0{,}309017) \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & (-0{,}951057+j0{,}309\,017) & 1 & \cdot \\ (-0{,}224117-j0{,}243973) & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \\ \overline{V}_3 \\ \overline{V}_4 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \overline{E}.$$

Ha az egyenletrendszert a Souriau—Frame-algoritmussal oldjuk meg, és felhasználjuk a 3. részben közölt számítási eljárásokat, akkor az előzőkben megadott átviteli függvényt és érzékenységfüggvényeket kapjuk.

A számításokat a frekvenciatartománybeli egyenletrendszer alapján is elvégezhetjük frekvenciánként.

A frekvenciatartománybeli egyenletrendszer: $(\omega_r T=0{,}1\pi)$

Az átviteli karakterisztika:

$$W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_r T})=\frac{\overline{V}_1}{\overline{E}}=(\mathbf{P}^{-1})_{1,\,2}=1{,}880\,62\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5{,}1134^\circ}.$$

Az $S_m^{W(e^{\mathrm{j}\omega_r T})}$ érzékenység:

$$S_m^{w(e^{\mathrm{j}\omega_r T})}=-(\mathbf{P}^{-1})_{1,4}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_r T}(\mathbf{P}^{-1})_{1,2}=2{,}576\ 95\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20{,}2227^\circ}.$$

7. Összefoglalás

A cikk lineáris diszkrét idejű hálózatok érzékenységeinek számításával és félszimbolikus átviteli függvények előállításával foglalkozik. Az átviteli függvények, azok bármely szorzó paramétere szerinti érzékenységfüggvényei racionális törtfüggvény alakban kaphatók meg a bemutatott eljárással mind időtartománybeli, mind z-tartománybeli kiindulás esetén. Az érzékenységfüggvények, együttható- és gyökérzékenységek számításához csupán egyetlen, a névleges értéknél végzett analízisre van szükség.

Megmutattuk azt is, hogy a névleges paraméterértékre végzett egyetlen numerikus analízis eredményeiből megkapható az átviteli függvény valamely szorzótényező bármely más értéke mellett is.

8. Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki Fodor György tanszékvezető egyetemi tanárnak, a műszaki tudományok doktorának értékes tanácsaiért és a kézirat átnézéséért.

IRODALOM

[1] *Brayton, R. K., Spence, R.:* Sensitivity and optimization. Elsevier, 1980.

[2] *Fodor Gy.:* Villamosságtan. Tankönyvkiadó, Budapest (megj. alatt).

[3] *Geher, K.:* Theory of network tolerances. Bp. Akadémiai K. 1971.

[4] *Palurobo, M.:* Root sensitivity of digital circuit ISCAS. 1981.

[5] *Temes, G. C., Lapatra, J. W.:* Introduction to circuit synthesis and design. Mc. Graw-Hill. 1977.

[6] *Varga I.:* Érzékenységek számítása a módosított csomóponti analízis alapján. Híradástechnika, 1984/4. szám.

[7] *Varga I.:* Érzékenységszámítás és alkalmazása hálózatoptimalizálásra. Egyetemi doktori disszertáció, BME, 1984.