

Az Erlang-képlet áramkör szám szerinti első, illetve második deriváltjának gyakorlati számítási módszere

DR. TÓTH ENDRE
Postai Tervező Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk az Erlang B-képlet áramkörszám szerinti első és második deriváltjával foglalkozik. Pozitív, ill. negatív áramkörszámok mellett ismerteti a nem (0,1) intervallumba eső áramköri nyalábokra vonatkozó rekurziós képleteket. Végül a deriváltak gyors és a gyakorlat részére megfelelő pontossággal való kiszámítására közelítő képleteket ismertet.

I. Bevezetés

Ismeretes, hogy az Erlang-B képlet általános, tört, illetve negatív áramkörökre és érvényes alakja az alábbi:

$$E_x(A) = \frac{A^x e^{-A}}{\Gamma(x+1, A)} = \frac{A^x e^{-A}}{\int_A^\infty t^x e^{-t} dt} \quad (1)$$

ahol:

- x az áramkörszám,
- A az x áramkörszám részére felajánlott forgalom (erlangban),
- $\Gamma(x+1, A)$ nem teljes Γ -függvény,
- $E_x(A)$ a veszteségi tényező.

Bizonyos számításokhoz célszerű felhasználni az Erlang-képlet áramkörszám szerinti első, illetve második deriváltját.

Ilyen számítás például a trunkhálózatok optimális haránt áramkörszámának differenciális Rapp-módszerrel való meghatározása (13, 14) vagy az ERT-módszer (9, 10, 11, 12, 13) A^* , illetve n^* értékeinek érintőmódszerrel való meghatározása. Ezeknél a módszereknél az Erlang-képlet deriváltjain kívül a túlcsonduló forgalom átlagértékének és szórásnégyzetének áramkörszám szerinti első, illetve második deriváltjai is szerepelnek, amiknek a számítási nehézségét vissza lehet vezetni a veszteségi tényező deriváltjainak számítási nehézségére. Ezeket a nehézségeket szeretném ebben a cikkben feloldani.

A deriváltak értékei

Az első deriváltat először H. Akimaru határozta meg (1, 2, 3) az alábbi képlet segítségével:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_x \left[\ln A - \frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma(x+1, A) \right] \quad (2)$$

Beérkezett: 1983. X. 21. (#)

DR TÓTH ENDRE

Mérnöki diplomáját 1959-ben kapta meg a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karának híradástechnikai szakán. 1969-ben távbeszélőtechnikai szakmérnöki diplomát szerzett. Egyetemi doktori címet 1976-ban kapott a „Körzethálózatok optimális tervezése” című disszertációjáért. 1959. május 11. óta a Postai Tervező Intézet dolgozója.

1981-ig a központos osztályon távbeszélő-központok és helyközi hálózatok méretezésével foglalkozott. Jelenleg a számítástechnikai csoport dolgozója. Távbeszélő forgalomelmélet területén elsősorban a trunkhálózatok optimális méretezésével foglalkozik. Ebben a témában jelennek meg a Híradástechnikában korábbi cikkei is, és ezt az elméletet alkalmazta több helyközi trunk hálózati lervében is.

A képletben a $\frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma(x+1, A)$ a másodfajú, nem teljes ψ -függvény. Segítségével a deriváltat az alábbi módon is felírhatjuk:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_x [\ln A - \psi(x+1, A)] = -E_x \psi' \quad (3)$$

A (3) képletből következik, hogy

$$\psi' = \psi(x+1, A) - \ln A \quad (4)$$

A (3) képlet deriválásával megkapjuk az áramkörszám szerinti második deriváltat is (3):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = E_x \left(\psi'^2 - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) \quad (5)$$

A differenciális Rapp-módszer alkalmazásánál a túlcsonduló forgalom átlagának, illetve szórásnégyzetének áramkörszám szerinti első és második deriváltjában szintén szerepel a ψ' , illetve a $\frac{\partial \psi'}{\partial x}$ kifejezés (14). Ha a (3), illetve az (5) képletet ki tudjuk számítani, azokból a ψ' , illetve a $\frac{\partial \psi'}{\partial x}$ kifejezést is meg tudjuk határozni, aminek segítségével a differenciális Rapp-módszerhez szükséges valamennyi parciális deriváltat elő tudjuk állítani.

A cikk első részében azt szeretném bemutatni, hogy elvileg a veszteségi tényezőhöz hasonlóan a deriváltakat is elég a (0, 1) intervallumban meghatározni, majd rekurziós képletek segítségével bármely pozitív vagy negatív x -re ki lehet számítani azokat. Ebben a részben bemutatom azt is, hogy a rekurzió során hogyan változik a számítás hibája, tehát a gya-

korlatban milyen számtartományban célszerű a rekurzióval számolni.

A cikk második részében egy közelítő képletet mutatunk be, aminek segítségével a $(0, 1)$ intervallumban a gyakorlati számításokhoz kielégítő pontossággal meg lehet közelíteni a deriváltakat, és az irodalomban [1, 2, 3] közölt végtelen sorokhoz, illetve az integrálközelítésekhez képest egy-két nagyságrendnyi gép-
időt meg lehet takarítani, ami a képletek sokszor való kiszámítása esetén az egész hálózatoptimalizálási programban jelentős gépidőnyereséget jelent.

Rekurziós képletek

Kimutatható, hogy a (3), illetve az (5) képletben ismertett deriváltak értékeit tetszőleges x esetére – az Erlang-képlethez hasonlóan – rekurziós képletekkel a tört áramkör számokkal felvett értékekből is ki lehet számítani.

Az első derivált rekurziós képlete (1, 3, 6, 12)

Az első deriváltra az alábbi rekurziós képletet lehet felírni:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} x - 1}{A E_{x-1} + x} E_x. \quad (6)$$

A képletet az alábbi alakban is fel lehet írni:

$$\psi' = (1 - E_{x-1}) \left(\psi'_{x-1} + \frac{1}{x} \right). \quad (7)$$

A második derivált rekurziós képlete

A második derivált rekurziós képlete az alábbi:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} \left[\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x}}{E_x} - \frac{\frac{\partial E_{x-1}}{\partial x}}{E_{x-1}} \right] + \frac{E_x}{E_{x-1}} (1 - E_x) \cdot \frac{\partial^2 E_{x-1}}{\partial x^2}. \quad (8)$$

A (6–8) képletek segítségével az $x-1$ áramkör számnál kiszámított értékekből határozhatjuk meg az x áramkörhöz tartozó értékeket. A képletek többszöri alkalmazásával a $0 \leq x \leq 1$ tartományban kiszámított deriváltakból kiszámíthatjuk az $x > 1$ tartományba eső értékeket is.

A rekurziós képletek kiterjesztése a fiktív negatív áramkör számok tartományára

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy a deriváltakra felírt képleteket ki lehet-e terjeszteni a negatív áramkör számokra is.

Először azt nézzük meg, hogy mikor kell a negatív áramkör számokat figyelembe venni.

Ismeretes, hogy az ERT-módszerben az egyenértékű áramkör szám csúcsos forgalom esetén pozitív, véletlenszerű forgalom esetén pedig nulla. G. Bretschneider bebizonyította (11), hogy simított forgalom esetén negatív egyenértékű áramkör számot kell figyelembe venni. (Ha tehát a negatív áramkör számunk ajánljuk fel az egyenértékű forgalmat, akkor adódik a vizsgált egyenértékű forgalom.) A negatív áramkör számot soha sem kell realizálni. Közben a választás esetén a tényleges áramkör számhoz hozzá kell adni, s az eredő áramkör számról továbbcsúduló, illetve az azon lebonyolódó forgalmat kell a hálózat többi részén figyelembe venni. Utolsó választású forgalom esetén pedig az egyenértékű – véletlenszerű – forgalomból és a veszteségi tényezőből $(m+n^*)$ -ot számítunk ki (az Erlang-B képlet segítségével), ahol „ m ” az utolsó választású áramkör szám, „ n^* ” az egyenértékű áramkör szám – ami simított forgalom esetén negatív. Az utolsó választású áramkör számot $(m+n^*)-n^*$ művelet elvégzése után kapjuk meg, tehát simított forgalom esetén az Erlang-képlettel kapott áramkör szám és az egyenértékű áramkör szám abszolút értékének összegeként. A negatív áramkör szám megvalósításának igénye tehát itt sem merül fel, csak a simított forgalomnak az egyszerűen számítható véletlenszerű forgalomba való transzformálására szolgál.

A továbbiakban nézzük meg, hogy a $(0, 1)$ intervallumban kiszámított veszteségi tényezőből, illetve annak deriváltjaiból a fiktív negatív áramkör számokhoz tartozó megfelelő értékeket milyen rekurziós képletekkel lehet kiszámítani.

Írjuk fel a veszteségi tényező pozitív irányú rekurziójára vonatkozó képletet

$$E_x = \frac{A E_{x-1}}{x + A E_{x-1}}. \quad (9)$$

A képletből kifejezhetjük E_{x-1} -et.

$$E_{x-1} = \frac{x E_x}{A(i - E_x)}. \quad (10)$$

Látható, hogy $x=0$ -nál (ahol $E_x=1$) a képlet $\frac{0}{0}$ alakot vesz fel. Itt a kifejezés határértékére az alábbiakat írhatjuk fel:

$$E_{-1} = \frac{1}{-E_i(-A)Ae^A}, \quad (11)$$

ahol

$$E_i(\xi) = - \int_{\xi}^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt, \quad (12)$$

az úgynevezett integrálexponenciális függvény (1, 3, 11, 15, 16). (Nem szabad összetéveszteni az ugyan-csak E -vel jelölt veszteségi tényezővel.) $-E_i(-A)$ -t $A=0$ esetén az alábbi sorral határozhatjuk meg

$$-E_i(-A) = -C - \ln A + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{A^n}{n \cdot n}, \quad (13)$$

ahol C az Euler-féle állandó ($C=0,577\ 215\ 665$).

Ez a sor kis forgalmaknál gyorsan konvergál.

$A=1$ E felajánlott forgalom esetén $-E_i(-A)$ értéket $2 \cdot 10^{-8}$ relatív hibán belül számíthatjuk ki az alábbi Csebisev-közelítéssel:

$$-E_i(-A) \approx \frac{\varepsilon^{-A}}{A} \cdot \frac{\sum_{r=0}^4 a_r A^r}{\sum_{k=0}^4 b_k A^k} \quad (14)$$

Az a_k és a b_k állandókat a Függelékben adom meg.

Az Erlang-képlethez hasonlóan a deriváltakra is fel lehet írni csökkenő irányú rekurziót.

A (6) képletből az első deriváltra az alábbi csökkenő irányú rekurziót írhatjuk fel:

$$\frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} = \frac{E_{x-1}}{x} \left(\frac{A E_{x-1} + x}{E_x} \frac{\partial E_x}{\partial x} + 1 \right) \quad (15)$$

A (8) képletből pedig a második deriváltra lehet felírni a csökkenő irányú rekurziót:

$$\frac{\partial^2 E_{x-1}}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{E_x} - \frac{\partial E_{x-1}}{E_{x-1}} \right) \right] \cdot \frac{E_{x-1}}{E_x(1-E_x)} \quad (16)$$

Az előzőekben láttuk, hogy a veszteségi tényező re-

$$\frac{\partial E_{-1}}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{E_{x-1} \left(\frac{A \cdot E_{x-1}}{E_x} - x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} + 1 \right)}{x} = \frac{E_{-1}}{1} \left[\left(\frac{A}{E_0} \frac{\partial E_{-1}}{\partial x} + 1 - \frac{A \cdot E_{-1}}{E_0} \frac{\partial E_0}{\partial x} \right) \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{A \cdot E_{-1}}{E_0} \cdot \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} \right] \quad (19)$$

A képletből fejezzük ki a $\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2}$ -et (figyelembe véve, hogy $E_0=1$, valamint a (17) képletet):

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = \frac{2}{A \cdot E_{-1}} \cdot \left(\frac{\partial E_{-1}}{\partial x} + \frac{1}{A \cdot E_{-1}} \right) \quad (20)$$

Ha a $\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2}$ (20) képlet szerinti kifejezését behelyettesítjük a (16) képletbe, kiderül, hogy az $x=0$ helyen a szögletes zárójelen belüli kifejezés 0 lesz, tehát -1 áramkör számításánál az áramkör szám szerinti második derivált rekurziós képlete is $\frac{0}{0}$ alakot vesz fel. Ilyen esetben tehát a második deriváltat is közvetlenül kell meghatározni.

A rekurziós képletek hatása a számítás hibájára

Az előzőekben ismertetett rekurziós képletek használhatóságának eldöntése végett vizsgáljuk meg a hiba változását a rekurzió során, azaz azt, hogy például az x -edik rekurzió hibájának hatására milyen nagyságú lesz az $(x+1)$ -ik, illetve az $(x-1)$ -ik rekurzióban a hiba?

kurziós képlete -1 áramkör számnál $\frac{0}{0}$ alakot vesz fel. Keressük meg a $\frac{0}{0}$ alak határértékét a l'Hospital-szabállyal! Írjuk fel tehát a (10) képlet számlálójának és nevezőjének differenciálhányadosát:

$$E_{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot E_x}{A(1-E_x)} = \frac{E_x}{-A \frac{\partial E_x}{\partial x}} = \frac{E_0}{-\frac{\partial E_0}{\partial x}} \quad (17)$$

Ha a (17) képletből kifejezzük a $\frac{\partial E_0}{\partial x}$ deriváltat, és behelyettesítjük a (15) egyenletbe, kiderül, hogy az $x=0$ helyen a zárójelen belüli kifejezés 0 lesz, tehát -1 áramkör számításánál az áramkör szám szerinti első derivált rekurziós képlete is $\frac{0}{0}$ alakot vesz fel. Ilyen esetben tehát az első deriváltat is közvetlenül kell meghatározni.

A -1 áramkörhöz tartozó első deriváltat az alábbi képlettel lehet közvetlenül felírni (1, 3)

$$\frac{\partial E_{-1}}{\partial x} = \frac{E_{-1}}{E_i(-A)} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[(C + \ln A)^2 + \frac{\pi^2}{6} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-A)^n}{n! n^2} \right\} \quad (18)$$

Írjuk fel az első derivált $\frac{0}{0}$ alakjára is a l'Hospital-szabályt:

Áramkör szám növelésével (pozitív áramkör szám esetén) jelentkező hiba

Itt azt vizsgáljuk meg, hogy az $(x-1)$ -ik rekurzió hibája mekkora hibát okoz az x -ik rekurzióban?

Először az első derivált kiszámítására vonatkozó (6) képletet vizsgáljuk meg! Tételezzük fel, hogy az $(x-1)$ -ik rekurzió után ε_{x-1} , az x -ik rekurzió után pedig ε_x hibával kapjuk meg a $\frac{\partial E}{\partial x}$ deriváltat, s használjuk fel azt a tételt, hogy az áramkör szám növelés rekurziója nem növeli a veszteségi tényező számítás hibáját (11)!

Az (5) képlet alapján felírhatjuk, hogy

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_x = \frac{\frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} + \varepsilon_{x-1}}{A \cdot E_{x-1} + x} \cdot x - 1 \cdot E_x \quad (21)$$

Az egyenlet jobb oldalát osszuk két részre:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_x = \frac{\frac{\partial E_{x-1}}{\partial x}}{A \cdot E_{x-1} + x} \cdot x - 1 \cdot E_x + \frac{\varepsilon_{x-1} \cdot x}{A \cdot E_{x-1} + x} \cdot E_x \quad (22)$$

Az egyenletből kivonva a (6) egyenletet, s az E_x helyére a (9) képlet szerinti rekurziós összefüggést helyettesítve, majd E_{x-1} -gyel egyszerűsítve, ε_x -re az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x-1} \cdot x \cdot \frac{A \cdot E_{x-1}}{A \cdot E_{x-1} + x} = \\ &= \frac{A \cdot x}{(A \cdot E_{x-1} + x)^2} \cdot \varepsilon_{x-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Vezessük be az alábbi k tényezőt:

$$k = \frac{A \cdot x}{(A E_{x-1} + x)^2}. \quad (24)$$

A továbbiakban azt kell bebizonyítani, hogy k értéke minden pozitív x és A értékre $\cong 1$ marad.

Keressük meg azt az X , A értékpárt, amelyre k értéke maximális lesz! Ebből a célból végezzük el a $\frac{\partial k}{\partial x}$ és a $\frac{\partial k}{\partial A}$ deriválást, s a deriváltakat tegyük egyenlővé 0-val!

$A \frac{\partial k}{\partial x} = 0$ egyenletből kapjuk:

$$A E_{x-1} + x = 2x \left(A \frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} + 1 \right). \quad (25)$$

$A \frac{\partial k}{\partial A} = 0$ egyenletből pedig az következik, hogy

$$x = A \left(E_{x-1} + 2A \frac{\partial E_{x-1}}{\partial A} \right). \quad (26)$$

A (25) és (26) egyenlet bonyolult differenciálegyenlet-rendszert alkot, amiben E_{x-1} nem lineárisan függ x -től és A -tól, továbbá a nevezőben integrálos kifejezés áll.

Az egyenletrendszert teljesen analitikus megoldás helyett részben analitikus, részben numerikus módon oldottam meg.

Helyettesítsük be a (26) egyenletbe a $\frac{\partial E_{x-1}}{\partial A}$ értékét (1, 5, 13)! Ebben az esetben az egyenletet az alábbi módon írhatjuk tovább:

$$x = A \left[E_{x-1} + 2A \left(\frac{x-1}{A} - 1 + E_{x-1} \right) E_{x-1} \right]. \quad (27)$$

Az egyenletet A -ra érintőmódszerrel oldjuk meg! Ebből a célból rendezzük 0-ra, s a bal oldalt jelöljük y -nal:

$$y = A \{ E_{x-1} + [2(x-1) - 2A(1 - E_{x-1})] E_{x-1} \} - x. \quad (28)$$

Vezessük be a

$$t = x - A(1 - E_{x-1}) \quad (29)$$

kifejezést! Ebben az esetben E_{x-1} kiemelése után a (28) képletet az alábbi módon írhatjuk:

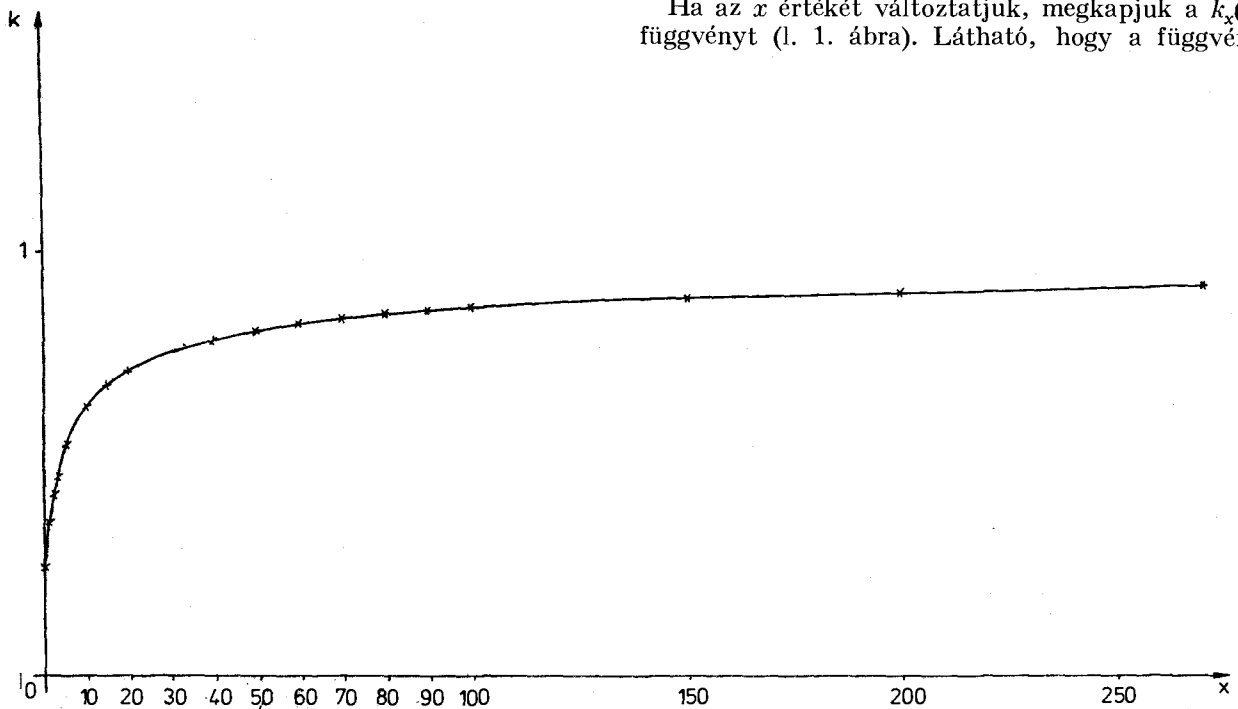
$$y = A \cdot E_{x-1} (2t - 1) - x. \quad (30)$$

Deriváljuk y -t A szerint

$$\frac{\partial y}{\partial A} = E_{x-1} [t(2t - 1) + 2A(t \cdot E_{x-1} - 1)]. \quad (31)$$

Ezután már kiszámíthatjuk az érintő módszerrel azt az A értéket, amihez adott x mellett a maximális k érték tartozik, majd a (24) képlet alapján az x -hez tartozó maximális k értéket (k_x) is kiszámíthatjuk.

Ha az x értékét változtatjuk, megkapjuk a $k_x(x)$ függvényt (l. 1. ábra). Látható, hogy a függvény



1. ábra

H908-1

$x=0$ -tól monoton nő, és aszimptotikusan tart a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A}{x} = i$ értékhez.

Mivel tehát a k értéke nem nő 1 fölé, az első derivált rekurziós képletére igaz, hogy

$$|\varepsilon_x| \leq \varepsilon_{x-1}. \quad (32)$$

Kimondhatjuk tehát, hogy az első derivált rekurziós képletét minden pozitív x -nél felhasználhatjuk a derivált kiszámítására, mert a rekurzió során a számítás hibája nem nő.

A második deriváltra vonatkozó (8) képlet számítási hibájára az alábbiakat írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \varepsilon_x = & 2 \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{E_x}{E_{x-1}} \cdot (1 - E_x) \cdot \left(\frac{\partial^2 E_{x-1}}{\partial x^2} + \varepsilon_{x-1} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

A képlet felírásánál felhasználjuk a (31) képletet, vagyis azt, hogy az első derivált számítási hibája nem nő a rekurzióval, valamint azt a már említett tételt (11), hogy a rekurzió során a veszteségi tényező számítási hibája sem nő.

A (33) egyenlet jobb oldalának második tagját kettéválasztva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \varepsilon_x = & 2 \frac{\partial E_x}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{E_x}{E_{x-1}} \cdot (1 - E_x) \cdot \frac{\partial^2 E_{x-1}}{\partial x^2} + \frac{E_x}{E_{x-1}} \cdot (1 - E_x) \cdot \varepsilon_{x-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Az egyenletből kivonva a (8) egyenletet, s az $\frac{E_x}{E_{x-1}}$ hányadost, illetve az $1 - E_x$ értéket a (9) képletből kifejezve, az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & \frac{E_x}{E_{x-1}} \cdot \frac{x}{A \cdot E_{x-1} + x} \cdot \varepsilon_{x-1} = \\ = & \frac{Ax}{(A \cdot E_{x-1} + x)^2} \cdot \varepsilon_{x-1} = k \cdot \varepsilon_{x-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

A (34) képlet tehát teljesen azonos a (22) képlettel, amiből következik, hogy a második deriváltra is igaz a (32) képlet.

Kimondhatjuk tehát, hogy a második derivált rekurziós képletét is minden pozitív áramkörszám esetén felhasználhatjuk a derivált kiszámítására, mert a számítás hibája nem nő a rekurzió során.

Az áramkörszám csökkentésével (negatív áramkörszám esetén) jelentkező hiba

Itt azt vizsgáljuk meg, hogy az x -ik rekurzió hibája mekkora hibát okoz az $(x-1)$ -ik rekurzióban?

Először a negatív áramkörszámhoz tartozó veszteségi tényező kiszámítására alkalmas (10) képletet vizsgáljuk meg.

Jelöljük az x -ik rekurzió számítási hibáját ε_x -szel, az $(x-1)$ -ik rekurzióét pedig ε_{x-1} -gyel!

A (10) képlet alapján felírhatjuk, hogy

$$E_{x-1} + \varepsilon_{x-1} = \frac{x(E_x + \varepsilon_x)}{A(1 - E_x - \varepsilon_x)}. \quad (36)$$

A képletből kivonva a (10) képletet, az alábbi eredményt kapjuk (feltételezve, hogy $|1 - E_x| \gg |\varepsilon_x|$)

$$\varepsilon_{x-1} = \frac{x}{A(1 - E_x)} \cdot \varepsilon_x = \frac{E_{x-1}}{E_x} \cdot \varepsilon_x. \quad (37)$$

A továbbiakban azt bizonyítjuk be, hogy az $E_{x-1} > E_x$ egyenlőtlenség minden x -re fennáll.

A (2) képlet zárójeles kifejezése második tagjában az x szerinti deriválást elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma(x+1, A) = & \frac{\frac{\partial}{\partial x} \int_A^\infty t^x e^{-t} dt}{\Gamma(x+1, A)} = \\ = & \frac{\int_A^\infty (\ln t) t^x e^{-t} dt}{\Gamma(x+1, A)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Mivel $t \geq 0$ esetén $t^x \geq 0$ és $e^{-t} \geq 0$, továbbá $t \geq A$ esetén $\ln t \geq \ln A$, írhatjuk, hogy

$$\int_A^\infty (\ln t) t^x e^{-t} dt > \ln A \int_A^\infty t^x e^{-t} dt. \quad (39)$$

Az egyenlőséget behelyettesítve a (2) egyenletbe, $A \geq 0$ -ra kapjuk, hogy

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} < 0. \quad (40)$$

Ennek alapján a $(-\infty, \infty)$ intervallumban írhatjuk, hogy

$$E_{x-1} > E_x, \quad (41)$$

vagyis a veszteségi tényező függvénye monoton csökken mind a pozitív, mind pedig a negatív áramkörszám-tartományban.

A (41) képletet a (37) képletbe helyettesítve adódik, hogy

$$\varepsilon_{x-1} > \varepsilon_x. \quad (42)$$

A veszteségi tényező áramkörscökkenetési rekurziójának hibája tehát nő. Néhány $(-6, -8)$ áramkörszám fölött a hiba már jelentősen nagygyá válhat.

Az első derivált áramkör csökkentési rekurziója számítási hibájának meghatározásához induljunk ki a (15) képletből!

$$\frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} + \varepsilon'_{x-1} = \frac{E_{x-1}}{x} \left[\frac{AE_{x-1} + x}{E_x} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon'_x \right) + 1 \right]. \quad (43)$$

A képletben egyszerűség céljából nem vettem figyelembe a veszteségi tényezők számítási hibáját.

A (43) képletből kivonva a (19) képletet, azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon'_{x-1} = \frac{E_{x-1}}{x} \cdot \frac{A \cdot E_{x-1} + x}{E_x} \cdot \varepsilon'_x \quad (44)$$

Az egyenlet jobb oldalát átrendezve:

$$\varepsilon'_{x-1} = \frac{E_{x-1}}{E_x} \cdot \frac{AE_{x-1} + x}{x} \cdot \varepsilon'_x \quad (45)$$

Az $AE_{x-1} + x$ kifejezést a (9) egyenletről levezetve, majd a (45) képletbe helyettesítve, kapjuk, hogy

$$\varepsilon'_{x-1} = \frac{A}{x} \cdot \left(\frac{E_{x-1}}{E_x} \right)^2 \cdot \varepsilon'_x \quad (46)$$

Látható, hogy a kezdeti szakaszban ($A \cong |x|$) a hiba rohamosan nő. A későbbi rekurzió során a növekedés mértéke csökken, majd a hiba csökkenni kezd.

Nagy negatív áramkörszámmal az (1) képlet nevezőjében levő integrál alsó határa közelében a f^x függvény sokkal gyorsabban változik, mint az ε^{-t} függvény, ezért e^{-A} -t kiemelhetjük az integrál elé:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E_x(A) = \frac{A^x e^{-A}}{\int_A^\infty f^x dt} = \frac{x+1}{A} \quad (47)$$

Ekkor az első derivált rekurziós képletének hibája az alábbi lesz:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon'_{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{A}{x} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot \varepsilon'_x = 0 \quad (48)$$

A második derivált áramkör csökkentés rekurziója számítási hibájának meghatározásához induljunk ki a (16) képletből!

$$\frac{\partial^2 E_{x-1}}{\partial x^2} + \varepsilon''_{x-1} = \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \varepsilon''_x - 2 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon'_x \right) \cdot \left(\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon'_x}{E_x} - \frac{\frac{\partial E_{x-1}}{\partial x} + \varepsilon'_{x-1}}{E_{x-1}} \right) \right] \frac{E_{x-1}}{E_x(1-E_x)} \quad (49)$$

A képletben ε'_x , ε'_{x-1} az első, ε''_x , ε''_{x-1} pedig a második derivált rekurzióval számított x -edik, illetve $(x-1)$ -ik áramkörének számítási hibája. A képletben egyszerűség kedvéért nem vettem figyelembe a veszteségi tényező számítási hibáit.

A képletből kivonva a (16) képletet, s figyelembe véve a (46), illetve a (10) képletet, ε''_{x-1} -re a következő összefüggést kapjuk:

$$\varepsilon''_{x-1} = \left\{ \varepsilon''_x + 2\varepsilon'_x \left[\frac{E'_x}{E_x} \cdot \left(2 + \frac{A}{x} \cdot \frac{E_{x-1}}{E_x} \right) + \frac{\varepsilon'_{x-1}}{E_{x-1}} \right] \right\} \frac{A}{x} \cdot \left(\frac{E_{x-1}}{E_x} \right)^2 \quad (50)$$

A (49) képletben szereplő negatív előjeleket a maximális hiba kiszámítása végett változtattam az (50) képletben pozitívvá. (Az ε , ε' , illetve ε'' mennyiségek abszolút értékek.) Az egyszerűség végett az $(\varepsilon_x)^2$, illetve az $\varepsilon_x \cdot \varepsilon'_{x-1}$ tagokat elhanyagoltam.

Látható, hogy az első derivált számítási hibájánál

1. táblázat

x	E_x	E'_x	E''_x	E_k	E'_k	E''_k
-0.10	1.00880798	-0.09150872	0.00114127	1.00879494	-0.09166024	0.00083945
-0.20	1.01796436	-0.09162107	0.00112357	1.01796451	-0.09172461	0.00044794
-0.30	1.02713185	-0.09173104	0.00121078	1.02713855	-0.09174982	0.00005643
-0.40	1.03631021	-0.09183864	0.00109486	1.03631317	-0.09173589	-0.00033509
-0.50	1.04549921	-0.09194385	0.00097932	1.04548443	-0.09168281	-0.00072660
-0.60	1.05469861	-0.09204689	0.00107508	1.05464842	-0.09159057	-0.00111811
-0.70	1.06390820	-0.09214754	0.00096218	1.06380124	-0.09145919	-0.00150962
-0.80	1.07312775	-0.09224598	0.00084967	1.07293895	-0.09128865	-0.00190113
-0.90	1.08235704	-0.09234242	0.00095399	1.08205766	-0.09107896	-0.00229264
-1.00	1.09159585	-0.09243662	0.00095325	1.09115344	-0.09083012	-0.00268415
-2.10	1.19379368	-0.09334258	0.00073498	1.18857416	-0.08550891	-0.00699077
-2.20	1.20313133	-0.09341394	0.00075832	1.19708944	-0.08479026	-0.00738229
-2.30	1.21247603	-0.09348350	0.00078390	1.20553091	-0.08403245	-0.00777380
-2.40	1.22182760	-0.09355141	0.00068955	1.21389463	-0.08323550	-0.00816531
-2.50	1.23118587	-0.09361758	0.00059556	1.22217670	-0.08239939	-0.00855682
-2.60	1.24055069	-0.09368229	0.00075000	1.23037320	-0.08152414	-0.00894833
-2.70	1.24992188	-0.09374521	0.00053364	1.23848022	-0.08060973	-0.00933984
-2.80	1.25929930	-0.09380673	0.00069346	1.24649384	-0.07965617	-0.00973135
-2.90	1.26868277	-0.09386661	0.00073055	1.25441015	-0.07866346	-0.01012286
-3.00	1.27807215	-0.09392489	0.00064208	1.26222523	-0.07763159	-0.01051437
-6.10	1.57131433	-0.09506748	0.00009658	1.43292242	-0.02622492	-0.02265122
-6.20	1.58082175	-0.09508543	0.00018797	1.43543101	-0.02394023	-0.02304273
-6.30	1.59033091	-0.09510235	-0.00003650	1.43770916	-0.02161638	-0.02343424
-6.40	1.59984171	-0.09511833	0.00021725	1.43975298	-0.01925338	-0.02382575
-6.50	1.60935404	-0.09513313	0.00015323	1.44153854	-0.01685123	-0.02421726
-6.60	1.61886781	-0.09514701	0.00025132	1.44312192	-0.01440993	-0.02460877
-6.70	1.62838290	-0.09515973	0.00018873	1.44443922	-0.01192947	-0.02500029
-6.80	1.63789923	-0.09517153	0.00012638	1.44550651	-0.00940987	-0.02539180
-6.90	1.64741669	-0.09518235	0.00006427	1.44631988	-0.00685111	-0.02578331
-7.00	1.65693517	-0.09519209	0.00000238	1.44687543	-0.00425321	-0.02617482

már megismert $\frac{A}{x} \left(\frac{E_{x-1}}{E_x} \right)^2$ szorzón kívül jelentős járulékos tagok is megnövelik a második derivált számítási hibáját.

Az 1. táblázatban $A = 10E$ forgalom és $x = -0,1 - (-1, 0), -2,1 - (-3,0)$, illetve $-6,1 - (-7,0)$ áramkör szám mellett láthatók a veszteségi tényező, valamint a veszteségi tényező első és második deriváltjának a Simpson-módszerrel azonos pontosságú, de sokkal gyorsabb Romberg-módszerrel (17) számított „pontos” és rekurziós képlettel számított közelítő (a táblázatban „k” indexszel jelölt) értékei.

Látható, hogy a veszteségi tényezőt és annak az első deriváltját az első áramkör szám tartományban jól megközelíti a rekurziós képlet. Az első deriváltra a második tartományban a pontos és a rekurziós képlettel számított értékek között már jelentős az eltérés, míg a harmadik tartományban rekurziós képlettel használhatatlan eredményt kapunk. A veszteségi tényező közelítő értéke a harmadik tartományban szintén jelentősen eltér a pontos értéktől. Az is látható, hogy a második derivált számítására a rekurziós képlet mindhárom áramkör szám tartományban használhatatlan.

Gyakorlatban a simított forgalom legtöbbször a haránt áramkörökön lebonyolódó, más haránt áramkörökre, illetve az utolsó választású áramkörökre rácsorduló forgalmakból adódik. Mivel ezen áramkörökre általában más haránt áramkörökről jelentős csúcsos forgalom csordul rá, az eredő csúcossági tényező, ha 1-nél kisebb is, de 1 közelében lesz. Ebből viszont az következik, hogy az eredő egyenértékű áramkör szám ritkán haladja meg a -2 értéket, tehát a veszteségi tényezőt és az első deriváltját a megfelelő rekurziós képlettel lehet számítani, s csak elvétve kell a hosszadalmas Romberg-módszert alkalmazni. A második deriváltat pedig célszerű az első deriváltak különbségi hányadosából meghatározni.

A deriváltak közelítő meghatározása

A deriváltakban szereplő integrálokat zárt alakban nem lehet megoldani, csak valamilyen (Simpson-, Romberg- stb.) integrál közelítő módszerrel. Ezek viszont meglehetősen lassúak. Ha többször (például trunkhálózat tervező programban $10^3 - 10^6$ nagyságrendben) kell a deriváltakat kiszámítani, az egész program futásideje megvalósíthatatlan nagy értékre adódhat. Célszerű ezért a deriváltak meghatározására közelítő módszert alkalmazni.

A $0 \leq x \leq 1$ tartományban Y. Rapp a veszteségi tényezőre az alábbi közelítő képletet vezette le (11):

$$E_k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 \quad (51)$$

ahol: $C_0 = 1, \quad (52)$

$$C_1 = -\frac{A+2}{(1+A)^2 + A}, \quad (53)$$

$$C_2 = \frac{1}{(1+A)[(1+A)^2 + A]}. \quad (54)$$

A közelítő képlet a gyakorlati számításokhoz kiélegítő pontosságú. A képlet deriválásával a veszteségi tényező áramkör szám szerinti deriváltjára is jó közelítő képletet lehet kapni.

A közelítő képlet második deriváltja azonban már nem alkalmas a veszteségi tényező áramkör szám szerinti második deriváltjának közelítésére. A közelítő képlettel számított második derivált egy állandó szám, ami nem felel meg a függvénynek.

A második derivált közelítő függvényének meghatározásához a Rapp-féle másodfokú parabolát egészítsük ki egy harmadfokú taggal!

$$E_k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \quad (55)$$

A továbbiakban a C tényezőket az alábbi kezdeti feltételek segítségével lehet megoldani:

$$E_0 = C_0 = 1, \quad (56)$$

$$E_1 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = \frac{A}{1+A}, \quad (57)$$

$$E'_0 = C_1, \quad (58)$$

$$E'_1 = C_1 + 2C_2 + 3C_3, \quad (59)$$

$$E''_0 = 2C_2, \quad (60)$$

$$E''_1 = 2C_2 + 6C_3, \quad (61)$$

$$E'_1 = \frac{\frac{E'_0}{E_0} - 1}{A \cdot E_0 + 1} E_1 = \frac{E'_0 - 1}{A + 1} E_1, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} E''_1 &= 2E'_1 \left(\frac{E'_0}{E_1} - \frac{E'_0}{E_0} \right) + \frac{E_1}{E_0} (1 - E_1) E''_0 = \\ &= 2E'_1 \left(\frac{E'_1}{E_1} - E'_0 \right) + E_1 (1 - E_1) E''_0. \end{aligned} \quad (63)$$

Az egyenletrendszerben E_0 a veszteségi tényező az $x=0$ helyen, E_1 a veszteségi tényező az $x=1$ helyen. Hasonlóképpen lehet értelmezni az E'_0, E'_1 első, illetve az E''_0, E''_1 második deriváltakat is.

A (62) képletet a (6), a (63) képletet pedig a (8) rekurziós képlet alapján lehet felírni.

Az egyenletrendszert megoldva, C_1 -re az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$a \cdot C_1^2 + b C_1 + c = 0, \quad (64)$$

ahol

$$a = \frac{A^2}{(1+A)^3}, \quad (65)$$

$$b = 1 + \frac{4A}{(1+A)^2} + \frac{A(1-A)}{(1+A)^3} + \frac{A^2}{(1+A)^4}, \quad (66)$$

$$c = \frac{3}{1+A} - \frac{2A}{(1+A)^2} + \frac{2A}{(1+A)^3} - \frac{A^2}{(1+A)^4}. \quad (67)$$

C_1 -re a másodfokú egyenlet megoldóképletének csak a pozitív diszkriminánsát kell figyelembe venni, tehát

$$C_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (68)$$

x	$E(x)$	$E_k(x)$	$E'(x)$	$E'_k(x)$	$E''(x)$	$E''_k(x)$
0.05	0.99523716	0.99505745	-0.09150116	-0.09149558	0.00123714	0.00122978
0.10	0.99066383	0.99048422	-0.09143894	-0.09143375	0.00126774	0.00124325
0.15	0.98609364	0.98591409	-0.09137616	-0.09137125	0.00130858	0.00125671
0.20	0.98152659	0.98134710	-0.09131273	-0.09130808	0.00126137	0.00127018
0.25	0.97696273	0.97678329	-0.09124875	-0.09124424	0.00132273	0.00128364
0.30	0.97240209	0.97222269	-0.09118412	-0.09117972	0.00130640	0.00129711
0.35	0.96784469	0.96766533	-0.09111889	-0.09111453	0.00132962	0.00131057
0.40	0.96329058	0.96311125	-0.09105302	-0.09104866	0.00131477	0.00132404
0.45	0.95873977	0.95856048	-0.09098655	-0.09098212	0.00135827	0.00133750
0.50	0.95419230	0.95401305	-0.09091942	-0.09091491	0.00136389	0.00135097
0.55	0.94964820	0.94946900	-0.09085163	-0.09084703	0.00136066	0.00136444
0.60	0.94510751	0.94492836	-0.09078321	-0.09077847	0.00137707	0.00137790
0.65	0.94057026	0.94039116	-0.09071412	-0.09070924	0.00138463	0.00139137
0.70	0.93603648	0.93585744	-0.09064438	-0.09063933	0.00141155	0.00140483
0.75	0.93150020	0.93132724	-0.09057397	-0.09056875	0.00142962	0.00141830
0.80	0.92697946	0.92680058	-0.09050286	-0.09049750	0.00142970	0.00143176
0.85	0.92245630	0.92227750	-0.09043106	-0.09042558	0.00142129	0.00144523
0.90	0.91793674	0.91775803	-0.09035857	-0.09035298	0.00145960	0.00145869
0.95	0.91339154	0.91324221	-0.09026854	-0.09027971	0.00145893	0.00147216

(Mivel a közelítő képletben a gyakorlatban a másodfokú tag az eredményt csak kis mértékben befolyásolja, számítógépen gyorsabb és pontosabb eredményt kapunk az érintő módszer alkalmazásával.)

C_1 ismeretében C_2 -t, majd C_1 -ből és C_2 -ből C_3 értékét az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

$$C_2 = \frac{A}{(1+A)^2} - \frac{3}{1+A} - C_1 \left[2 + \frac{A}{(1+A)^2} \right], \quad (69)$$

$$C_3 = -\frac{1}{1+A} - C_1 - C_2. \quad (70)$$

Az (55) képlet deriválásával jó közelítő képleteket írhatunk fel a veszteségi tényező deriváltjaira is:

$$E'_k = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2, \quad (71)$$

$$E''_k = 2C_2 + 6C_3x, \quad (72)$$

ahol: E'_k az áramkörszám szerinti első derivált,

E''_k pedig a második derivált közelítő értéke.

A közelítő képletek pontosságának bemutatására $A=10E$ forgalom mellett, $x=0,05-0,95$ áramkörszám tartományban kiszámoltam az Erlang-képletet és a deriváltjait a pontosnak tekinthető (integrál közelítéssel meghatározott), valamint a közelítő számítás alapján. A számítás eredményét a 2. táblázatban tüntettem fel.

A táblázat fejlécén látható a veszteségi tényező (E) és annak közelítő értéke (E_k), a veszteségi tényező első deriváltja (E') és annak közelítő értéke (E'_k), valamint a veszteségi tényező második deriváltja (E'') és annak közelítő értéke (E''_k).

A számítás elvégeztem $10E$ -nél kisebb, illetve nagyobb forgalom mellett is. A számítás eredménye az 1. táblázathoz hasonló lett. A táblázatból látható, hogy pozitív áramkörszám esetén a pontos és a közelítő számítás eredménye gyakorlatilag azonos.

Az előző fejezet végén megemlítettem, hogy pozitív irányú rekurzió során a számítás hibája csökken. Ha a közelítő számítás és a pontos számítás közötti különbséget számítási hibának fogjuk fel, a pozitív rekurzió során az is csökken.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Baumgartner Rezsőnek és Tóth Ilonának, hogy a cikk létrejöttéhez jelentősen hozzájárultak a vele kapcsolatos számítógépes programok megírásával és lefuttatásával.

I R O D A L O M

- [1] Akimaru, H., Nishimura, T.: Derivates of Trunk Functions for Full Availability Systems. Internal Report (Seika Hokoku No. 3550) of ECL. 1-5. oldal.
- [2] Akimaru, H.: Optimum Design of Switching Systems. Review of the Electrical Communication Laboratory. Vo. 10. No 7-8. July-August. 1962. 385-401. oldal.
- [3] Akimaru, H., Nishimura, T.: The Derivatives of Erlang's B Formula. Review of the Electrical Communication Laboratory Volume, 11. No 9-10. September-October 1983. 428-445. oldal.
- [4] Akimaru, H., Tokushima, H., Nishimura, T.: Derivates of Wilkinson Formula and Their Application to Optimum Design of Alternative Routing Systems. ITC-9. 1-6. oldal.
- [5] Akimaru, H., Takahashi, H.: Asymptotic Expansion for Erlang Loss Function and Its Derivative. IEEE Transactions on Communications. Vol. Com. 29. No. 9. September 1981.
- [6] Nivert, K., Schantz, C.: Some Methods for Improving the Efficiency of Simulation Programs. ITC-7. 1-5. oldal.
- [7] Rappaport, S.: Calculation of Some Functions Arising in Problems of Queueing and Communications Traffic. IEEE Transactions on Communications. Vol. Com. 27. No 1. January 1979.
- [8] Sanders, B.: Comments on „Calculation of Some Functions Arising in Problems of Queueing and Communications Traffic” IEEE Transactions on Communications. Vol. Com. 28. No 6. June, 906-907. oldal.
- [9] Wilkinson, R. I.: Theories for Toll Traffic Engineering in the U.S.A. Bell System Technical Journal. 35. (1956.) 421-514. oldal.
- [10] Wallström, B.: Congestion Studies in Telephone Systems with Overflow Facilities. Ericsson Technics. No 3. 1966. 189-351. oldal.
- [11] Bretschneider, G.: Extension of the Equivalent

- Random Method to Smooth Traffics. ITC—7. 1—9. oldal.
- [12] *Rapp, Y.*: Planning of Junction Network in a Multi-exchange Area. I. General Principles. Ericsson Technics. No 1. (1964) 77—130. oldal.
- [13] *Dr. Tóth Endre*: Optimális trunkhálózat számítása a veszteségi tényező, az átlagérték, valamint a szórásnégyzet deriváltjai alapján. Híradástechnika. (Beküldött kézirat.)
- [14] *Dr. Tóth Endre*: Optimális trunkhálózat számítása számítógéppel a veszteségi tényező, az átlagérték, valamint a szórásnégyzet deriváltjai alapján. INFO. (A Postai Tervező Intézet Információs tájékoztatója.) 1983. 7. évfolyam/6.
- [15] *Pattantyús*: Gépész- és villamosmérnökök kézikönyve. 1. Műszaki Könyvkiadó.
- [16] *Bronstein—Szemengyajev*: Matematikai zsebkönyv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- [17] *Ralston, A.*: Bevezetés a numerikus analízisbe. Műszaki Könyvkiadó. 1969.

Függelék

A (14) képlet együtthatóinak értéke:

$a_0 = 0,267\ 773\ 734\ 3;$	$b_0 = 3,958\ 496\ 922\ 8$
$a_1 = 8,634\ 760\ 892\ 5;$	$b_1 = 21,099\ 653\ 082\ 7$
$a_2 = 18,059\ 016\ 973\ 0;$	$b_2 = 25,632\ 956\ 148\ 6$
$a_3 = 8,573\ 328\ 740;$	$b_3 = 9,573\ 322\ 345\ 4$
$a_4 = 1$	$b_4 = 1$