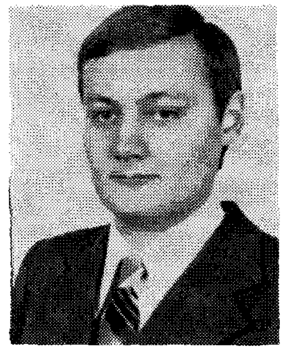
Érzékenységek számítása a módosított csomóponti analízis alapján

VARGA IMRE
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék



ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk új módszert mutat be lineáris hálózatok átviteli függvényeinek bármely hálózati komponens paraméterére vonatkozó elsőrendű érzékenységfüggvényének előállítására. A módosított csomóponti analízis módszerével végzett egyetlen hálózatanalízis után az érzékenységek mind idő-, mind frekvenciatartománybeli kiindulás esetén egy-egy képletből számíthatók. Az ismertetett eljárás szerint működő LINA program hatékony hálózatanalízist tesz lehetővé. (H)

VARGA IMRE

1982-ben szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki Egyetemen. Egyetemi hallgatóként három ízben készített tudományos diákköri dolgozatot lineáris hálózatok számítógépes analízise témakörben. Mindhárom dolgozatával első díjat nyert és részt vett az országos tudományos diákköri konferencián. Jelenleg tudományos továbbképzési ösztöndíjas a Budapesti Műszaki Egyetem Elméleti Villamosságtan Tanszékén. Fő érdeklődési területe a lineáris hálózatok számítógépes analízise, érzékenység- és toleranciaproblémáinak vizsgálata, valamint számítógéppel segített tervezése.

1. Bevezetés

A lineáris invariáns hálózatok analízise sok esetben nemcsak egyes feszültségek vagy áramok időfüggvényének kiszámítását, átviteli függvények, pólus–zérus-kép, Bode-diagram előállítását jelenti, hanem magában foglalja a különböző érzékenységek meghatározását is. A továbbiakban érzékenységfüggvényen a hálózat egy átviteli függvényének valamely hálózati komponens egy paraméterére vonatkozó elsőrendű differenciális érzékenységét értjük, amely az s komplex frekvencia függvénye. A hálózat kimenetének — az egyszerűség kedvéért — üresjárási feszültséget vagy rövidzárási áramot tekintünk.

Az érzékenységfüggvények meghatározására számos módszer ismeretes (pl. [2]—[7]). Ezek egy része az elemparaméterek szimbolikus kezelését igényli, mint az átviteli függvény bilineáris, ill. bikvadratikus alakján és a jelfolyamábrán alapuló eljárás. A módszerek másik részének alkalmazásához a hálózat topológiájának vagy elemértékeinek módosítására, majd ezen újabb hálózat analízisére van szükség. Ilyen eljárás a differenciahányadossal való közelítés, az adjungált (interreciprok) hálózat módszere, az érzékenységfüggvény átviteli függvények szorzataként való előállítása stb.

A cikkben az érzékenységfüggvények meghatározására szolgáló olyan új módszert ismertetünk, amely kizárólag az eredeti hálózat névleges paraméterértékeknél végzett analíziseredményeit használja fel. A hálózatszámítás eszköze a módosított csomóponti analízis, amely nemcsak admittancia-, hanem bármely explicit karakterisztikával jellemzett komponenseket tartalmazó hálózatok vizsgálatára is alkalmas. Ezen belül a redukált egyenletrendszer fokozatos felépítésének módszerét alkalmazzuk [1]. A hálózati egyenletek összességét tartalmazó lineáris egyenletrendszer, a redukált egyenletrendszer mind az időtartományban, mind közvetlenül a frekvenciatartományban felírható.

Beérkezett: 1983. XI. 3.

A 2. szakaszban megmutatjuk, hogyan állítjuk elő az időtartománybeli egyenletrendszerből az átviteli függvényeket és azok érzékenységfüggvényeit racionális törtfüggvény alakban. Ezek egyes frekvenciákon felvett értéke $s=j\omega_k$ helyettesítéssel számítható.

A 3. szakaszban a frekvenciatartománybeli kiindulást tárgyaljuk. Egy rögzített frekvencián felépítjük a komplex együtthatómátrixú redukált egyenletrendszert, amelynek megoldása az átviteli karakterisztika egy pontját adja. Az érzékenységek értékét is ezen frekvencián kapjuk. A számítási eljárást minden előírt frekvencián megismételjük.

A LINA programrendszer az előbb tárgyalt eljárás alapján működik és számos szolgáltatása, interaktív kezelése folytán hatékony analízist biztosít. A program szolgáltatásait a 4. szakaszban ismertetjük.

2. Átviteli függvények és érzékenységfüggvények számítása az időtartománybeli egyenletekből

2.1 Az átviteli függvény meghatározása

A vizsgált lineáris invariáns hálózat egyes N-kapcsú komponensei az alábbi típusú karakterisztikák valamelyikével jellemezhetők:

kapacitív komponens: $\mathrm{i}_C=\boldsymbol{C}\dot{\mathrm{u}}_C$ (1)

induktív komponens: $\mathrm{u}_L=\boldsymbol{L}\dot{\mathrm{i}}_L$ (2)

rezisztív komponens:
$$\left.\begin{aligned}\mathrm{i}_y&=\boldsymbol{G}\mathrm{u}_y+\boldsymbol{N}\mathrm{i}_z+\mathrm{j}\\ \mathrm{u}_z&=\boldsymbol{M}\mathrm{u}_y+\boldsymbol{R}\mathrm{i}_z+\mathrm{v}\end{aligned}\right\}\text{ hibrid típusú karakterisztika}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{u}_a&=\mathbf{0}\\ \mathrm{i}_a&=\mathbf{0}\end{aligned}\right\}\text{ ideális erősítő karakterisztikája}\qquad(3)$$

A hibrid típusú karakterisztikával jellemzett rezisztív komponens bizonyos kapcsai y-típusúak (a feszültségek a független, az áramok a függő változók), más kapcsai z-típusúak (az áramok a független, a feszültségek a függő változók). Az ideális erősítőt nullorként kezeljük: a bemeneti kapocs a-típusú (nullátor), a kimeneti b-típusú (norátor). A fenti általános komponensek speciális esetei az R, L, C elemek, a független és vezérelt generátorok, a girátor stb.

Célunk a hálózat tetszőlegesen kijelölt gerjesztéséhez és kimenetéhez tartozó átviteli függvényt racionális törtfüggvény alakban előállítani az időtartománybeli egyenletekből. Az eljárás részeredménye a hálózat állapotváltozós leírásának normál alakja.

A módosított csomóponti analízis módszerét alkalmazva, felépítjük az alábbi lineáris egyenletrendszert (a redukált egyenletrendszert) a hálózati komponensek paramétereinek fokozatos figyelembevételével [1]:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G^*} & \boldsymbol{N^*} & \boldsymbol{B^*} & \boldsymbol{C^*} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M^*} & \boldsymbol{R^*} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_a^*} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_L} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathrm{i}_z \\ \mathrm{i}_b \\ \dot{\mathrm{u}}_C \\ \mathrm{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B_L} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B_J} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1_V} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1_C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{u}_C \\ \mathrm{i}_L \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{j} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{P}\cdot\mathfrak{i} = \boldsymbol{Q}\cdot\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{e} \end{bmatrix}$$

ahol φ a csomóponti potenciálok vektora, i_z a z-ágak áramait, i_b az ideális erősítők kimeneti áramait tartalmazza és $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} \mathrm{u}_C \\ \mathrm{i}_L \end{bmatrix}$ az állapotváltozók, $\mathrm{e}=\begin{bmatrix} \mathrm{v} \\ \mathrm{j} \end{bmatrix}$ a gerjesztések vektora. Az egyes blokksorok az alábbiakat fejezik ki: áramtörvények, z-típusú kapocskarakterisztikák, ideális erősítők feszültsége, kondenzátorok feszültsége, tekercsek feszültsége. A $\boldsymbol{P}$ együtthatómátrix $\boldsymbol{G^*}$ blokkja y-típusú, $\boldsymbol{R^*}$ blokkja z-típusú karakterisztikával jellemzett rezisztív elemektől függ; a $\boldsymbol{C^*}$ blokk kapacitásokat, $\boldsymbol{L^*}$ induktivitásokat tartalmaz, míg $\boldsymbol{N^*}$-ban áram-, $\boldsymbol{M^*}$-ban feszültségáttétel jellegű mennyiségek szerepelnek; $\boldsymbol{P}$ többi blokkja és a $\boldsymbol{Q}$ mátrix csak 0, +1, −1 (topológiai) értékekből áll, elemparamétert nem tartalmaz.

Az egyenletrendszer előállításának az a lényege, hogy sorra vesszük a hálózati komponenseket és azok paramétereinek értékét egymás után hozzáadjuk az eredetileg zérus $\boldsymbol{P}$ és $\boldsymbol{Q}$ mátrix bizonyos elemeihez, az [1]-ben szereplő szabályok szerint.

Így minden paraméterről tudjuk, hogy az a mátrixok mely elemeiben szerepel. Ezt használjuk majd ki az érzékenységek számításánál. Pl. az l. és j. csomópont között elhelyezkedő G konduktanciájú ellenállás a $\boldsymbol{G^*}$ blokk (ll) és (jj) indexű elemét $+G$-vel, (lj) és (jl) indexű elemét $-G$-vel változtatja meg; ha egy feszültségvezérelt feszültséggenerátor vezérlő (primer) kapcsa az l. és j. csomóponthoz kapcsolódik és kimeneti (szekunder) kapcsa a k-adik z-típusú kapocs, akkor a μ átviteli (erősítési) tényező az $\boldsymbol{M^*}$ blokk (kl) indexű eleméhez hozzáadódik, (kj) indexű eleméből kivonódik, a többi mátrixelem értékét nem befolyásolja.

A (4) egyenletrendszert $\boldsymbol{P}$ invertálásával oldjuk meg, ha a hálózat reguláris, vagyis $\det \boldsymbol{P}\neq 0$:

$$\mathfrak{i}=\boldsymbol{T}\cdot\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{e} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ebből az állapotváltozós normálalak egyetlen $\mathrm{e}=\mathrm{e}_i$ gerjesztésre és $y=y_k$ kimenetre:

$$\dot{\mathrm{x}}=\boldsymbol{A}\mathrm{x}+\mathrm{b}e \tag{6}$$

$$y=\mathrm{c}^T\mathrm{x}+de$$

Mint már a bevezetőben utaltunk rá, az elvi eljárás egyszerűsítése végett az y kimenetnek üresjárási feszültséget vagy rövidzárási áramot tekintünk. Ez megfelel a gyakorlati esetek többségének. (Az összes feszültség felírható φ_l vagy $\varphi_l-\varphi_j$ alakban, tehát üresjárási feszültségként; az áramok egy része i_{z_l}, ill. i_{b_l}, más része j-ben nem szerepel. Ekkor iktassunk be az áram útjával sorosan egy $R=0$ paraméterű z-ágat és ennek i_z-ben megjelenő árama a keresett.) Ily módon az y kimenet közvetlenül szerepel $\mathfrak{i}$-ben, vagyis $y=j_l$-hez tartozó c^T és d az $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ mátrixok l-edik sora.

A (6) állapotegyenlet Laplace-transzformálásával az átviteli függvény

$$W(s)=\frac{Y_k(s)}{E_i(s)}=c^T(s\boldsymbol{E}-A)^{-1}b+d \tag{7}$$

Az $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ racionális törtfüggvényelemű mátrix előállítására a Souriau-Frame algoritmust alkalmazzuk:

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\,(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})}{\det\,(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})}=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{H}_{n-i}s^i}{\sum_{i=0}^{n}q_{n+1-i}s^i} \tag{8}$$

(n a hálózat rendszáma); (7)-be beírva

$$W(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{n}k_{n+1-i}s^i}{\sum_{i=0}^{n}q_{n+1-i}s^i};$$

$$k_{n+1-i}=\mathrm{c}^T\boldsymbol{H}_{n-i}\mathrm{b}+dq_{n+1-i}, \quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{9}$$

A $\boldsymbol{H}_{n-i}$, q_{n+1-i} együtthatók rekurzív képletekkel számíthatók [2]. A (9) kifejezés az átviteli függvényt racionális törtfüggvény alakban adja meg. Az átviteli karakterisztika pontjait az egyes körfrekvenciaértékek behelyettesítésével kapjuk:

$$W(j\omega_k)=W(s)|_{s=j\omega_k} \tag{10}$$

2.2. Az érzékenységfüggvények előállítása

Célunk egy $W(s)$ átviteli függvényre és bármely hálózati komponens egy h-val jelölt paraméterére az

$$S_h^W(s)=\frac{\partial W}{\partial h} \tag{11}$$

(abszolút) érzékenységfüggvény előállítása racionális törtfüggvény alakban.

$W(s)$, h, $S_h^W(s)$ ismeretében a félig relatív és a relatív érzékenységfüggvények már könnyen kifejezhetők. A h paraméter tetszőlegesen jelentheti egy kapacitás értékét, vezérelt generátor átviteli tényezőjét, ideális transzformátor áttételét stb.

Az alább ismertetendő módszer nem kívánja $W(s, h)$ szimbolikus felírását, adjungált hálózat vizsgálatát, újabb hálózatanalízist, hanem csak az előzőekben ismertetett hálózatszámítás eredményeit használja fel.

Tekintve, hogy $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}$, így

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}^{-1}}{\partial h}=-\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{12}$$

(5) felhasználásával

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial h}=\frac{\partial \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}}{\partial h}=\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial h}+\frac{\partial \boldsymbol{P}^{-1}}{\partial h}\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}\boldsymbol{T} \tag{13}$$

hiszen $\boldsymbol{Q}$ elemparamétert nem tartalmaz. (A parciális deriváltak a h paraméter névleges értékénél felvett numerikus értéket jelentik.) A (12) kifejezéshez hasonlóan

$$\frac{\partial(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}}{\partial h}=(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial h}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} \tag{14}$$

Írjuk fel a (11) abszolút érzékenységfüggvényt, vagyis a (7) kifejezés h szerinti parciális deriváltját és alkalmazzuk (14)-et:

$$S_h^W=\frac{\partial W}{\partial h}=\frac{\partial d}{\partial h}+\frac{\partial \mathrm{c}^T}{\partial h}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}b+$$

$$+\mathrm{e}^T(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\frac{\partial \mathrm{b}}{\partial h}+\mathrm{c}^T(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial h}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}b \tag{15}$$

A (8) és (9) kifejezés felhasználásával

$$S_h^W(s)=\frac{\partial W}{\partial h}=\frac{R(s)}{D^2(s)};$$

$$R(s)=D(s)\left[s^n\frac{\partial d}{\partial h}+\sum_{i=0}^{n-1}\left(q_{n+1-i}\frac{\partial d}{\partial h}+\frac{\partial \mathrm{c}^T}{\partial h}\mathrm{z}_{n-i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{v}_{n-i}^T\frac{\partial \mathrm{b}}{\partial h}\right)s^i\right]+$$

$$+\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\mathrm{v}_{n-i}^T\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial h}\right)s^i\right]\left[\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{z}_{n-i}s^i\right] \tag{16}$$

ahol

$$D(s)=\sum_{i=0}^{n}q_{n+1-i}s^i \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{z}_{n-i}&=\boldsymbol{H}_{n-i}\cdot\mathrm{b}\\ \mathrm{v}_{n-i}^T&=\mathrm{c}^T\cdot\boldsymbol{H}_{n-i}\end{aligned}\right\}\quad i=0,1,\ldots,n-1 \tag{18}$$

A $\boldsymbol{H}_{n-i}$ mátrixokat (8) számítása során már meghatároztuk.

A (16) kifejezés megadja az abszolút érzékenységfüggvényt két, legfeljebb 2n-edfokú polinom hányadosaként. A nevező 2n-edfokú polinomja az átviteli függvény $D(s)$ nevezőjének négyzete, míg a számláló két polinom összege. Ezek egyike $D(s)$ és egy skalár-együtthatós polinom szorzata, a másik pedig egy sorvektor együtthatós és egy oszlopvektor együtthatós polinom szorzata. A gyakorlati feladatok többségében a hálózat egy átviteli függvényének több elem paraméterére vonatkozó érzékenysége keresett, ezért lényeges megjegyezni, hogy a (16) kifejezésben szereplő polinomok közül csak kettő függ a h paraméter konkrét jelentésétől.

Az érzékenységfüggvények $R(s)$ számlálópolinomjában (16) szereplő $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial h}$, $\frac{\partial \mathrm{b}}{\partial h}$, $\frac{\partial \mathrm{c}^T}{\partial h}$, $\frac{\partial \partial}{\partial h}$ mennyiségeket a következőképpen határozzuk meg. Kiszámítjuk a $\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial h}$ mátrixot (13) szerint; ehhez $\boldsymbol{P}^{-1}$ és $\boldsymbol{T}$ már ismert (5). A $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$ mátrix felépítése során zérusmátrixból indulunk ki és $h=1$ helyettesítéssel újra alkalmazzuk a $\boldsymbol{P}$ együtthatómátrix képzési szabályai közül azokat, amelyek a h jelű paraméterre vonatkoznak. Így a $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$ mátrix minden eleme 1, -1 vagy 0 értékű. A 2.1 pontban említett két példában: ha $h=G$, akkor a $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$ mátrix (ll) és (jj) eleme 1, az (lj) és (jl) eleme -1, a többi eleme 0; míg ha $h=\mu$, akkor $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$ (kl) eleme 1, (kj) eleme -1, a többi eleme 0. Kiszámítva tehát (13) szerint a

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \mathrm{h}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial h} & \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial h}\\ \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \mathrm{h}} & \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \mathrm{h}}\end{bmatrix} \tag{19}$$

mátrixot (vö. (5) jelöléssel), abból $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial h}$, $\frac{\partial \mathrm{b}}{\partial h}$, $\frac{\partial \mathrm{e}^T}{\partial h}$, $\frac{\partial \mathrm{d}}{\partial h}$ ugyanúgy olvasható ki, mint ahogy $\boldsymbol{A}$, b, c^T, d-t a $\boldsymbol{T}$ mátrixból kifejeztük.

3. Átviteli mennyiségek és érzékenységek számítása a frekvenciatartománybeli egyenletrendszerből

A lineáris hálózatok analízisének egy más útja, hogy a hálózati egyenleteket a frekvenciatartományban írjuk fel. Ilyen kiindulással közvetlenül megkapjuk az átviteli karakterisztika egy-egy pontját.

A vizsgált lineáris invariáns hálózat olyan komponenseket tartalmaz, amelyek karakterisztikája

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{I}_y&=\boldsymbol{Y}\mathbf{U}_y+\boldsymbol{N}\mathbf{I}_z+\mathbf{J}\\ \mathbf{U}_z&=\boldsymbol{M}\mathbf{U}_y+\boldsymbol{Z}\mathbf{I}_z+\mathbf{V}\end{aligned}\right\}\quad \text{vagy}\quad \left.\begin{aligned}\mathbf{U}_a&=0\\ \mathbf{I}_a&=0\end{aligned}\right\}\ \text{(ideális erősítő)} \tag{20}$$

alakú, ahol minden mátrix- és vektorelem egy rögzített frekvencián komplex szám. Az így értelmezett általános komponensek speciális esetei az R, L, C elemek, a független és vezérelt generátorok stb.

A módosított csomóponti analízis módszerét alkalmazva, előállítjuk az alábbi lineáris egyenletrendszert (a redukált egyenletrendszert) a hálózati komponensek paramétereinek fokozatos összegzésével [1]:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}^* & \boldsymbol{N}^* & \mathbf{B}^* \\ \boldsymbol{M}^* & \boldsymbol{Z}^* & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{I}_z \\ \mathbf{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^* \\ \mathbf{V}^* \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{P} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E}^*$$

ahol a $\boldsymbol{P}$ mátrix egy rögzített ω_r körfrekvencián komplex számokat tartalmaz, $\boldsymbol{\Phi}$ a csomóponti potenciálok, $\mathbf{I}_z$ a z-kapcsok árama, $\mathbf{I}_b$ az ideális erősítők kimeneti árama és $\mathbf{J}^*$, $\mathbf{V}^*$ a gerjesztések komplex effektív értékéből alkotott vektor.

Áramgenerátoros gerjesztés esetén az egyszerűség kedvéért válasszuk referenciapontnak a gerjesztő áramgenerátor negatívabb pólusának csomópontját. Ekkor és feszültséggenerátoros gerjesztés esetén az $\mathbf{E}^*$ vektornak csak egy eleme nem nulla; jelöljük ezt E_i^*-vel. Az $Y=F_k$ kimenetre és az E_i^* gerjesztésre

$$W(j\omega_r)=\frac{Y}{E_i^*}=-[\boldsymbol{P}^{-1}]_{ki} \tag{22}$$

Az átviteli karakterisztika ω_r helyen vett értékének meghatározásához a komplex elemű $\boldsymbol{P}^{-1}$ mátrix egy elemére van szükség. $W(j\omega)$ egy tetszőleges h elemparaméterre vonatkozó érzékenységét az ω_r körfrekvencián (12) mintájára írhatjuk fel:

$$S_h^W(j\omega_r)=\left.\frac{\partial W}{\partial h}\right|_{\omega_r}=\left[\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}\boldsymbol{P}^{-1}\right]_{ki} \tag{23}$$

Az érzékenység kiszámításához a $\boldsymbol{P}^{-1}$ mátrix k. sorára és i. oszlopára, valamint $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$-ra van szükség. Ez utóbbi előállítása — az időtartománybeli esethez hasonlóan — a (21) egyenletrendszer $\boldsymbol{P}$ együtthatómátrixának fokozatos felépítésére vonatkozó szabályok alkalmazásán alapul. Most azonban $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$ komplex számokat is tartalmazhat, hiszen pl. a kondenzátorokat y-kapocsként kezelve, azok $j\omega_r C$ admittanciái az $\boldsymbol{Y}^*$ blokkban vannak, így $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$ megfelelő elemeiben

$$\frac{\partial j\omega_r C}{\partial C}=j\omega_r \tag{24}$$

komplex szám áll. A (23)-ban szereplő művelet elvégzésénél érdemes lehet kihasználni azt, hogy $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial h}$ csak néhány nem nulla elemet tartalmaz, és hogy a szorzatnak csak egyetlen eleme keresett.

A frekvenciatartománybeli egyenletrendszerből közvetlenül megkapjuk az átviteli karakterisztika és az érzékenységfüggvények egy pontját; a számítást minden előírt frekvencián megismételjük. Az időtartománybeli kiinduláshoz képest kisebb méretű, de komplex elemű mátrixokkal kell dolgozni.

4. A LINA programrendszer

E cikk szerzője által készített **LINA** hálózatanalízis program [8] lineáris invariáns hálózatok analízisére szolgál. A program **BASIC-PLUS** nyelvű és a Budapesti Műszaki Egyetem Műszer- és Méréstechnika Tanszékén üzemelő **PDP** 11/45 számítógép időosztásos rendszerében futtatható. Célja, hogy a vizsgált hálózatokról minél szerteágazóbb információkat nyújtson, a felhasználó munkáját az interaktív kezelés nyújtotta lehetőségek maximális kihasználásával hatékonnyá tegye.

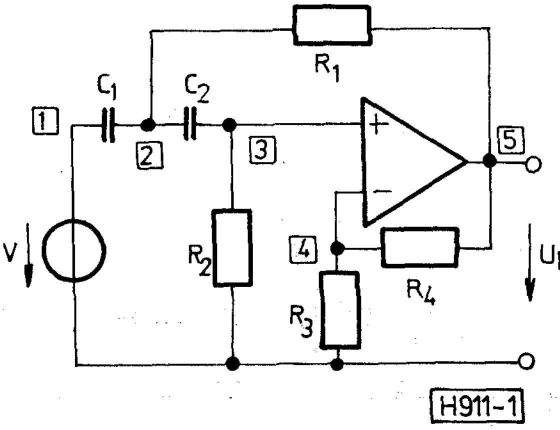
A program a 2. részben leírt módszer szerint működik. Szolgáltatja az állapotegyenlet normál alakját; abból előállítja a felhasználó által tetszőlegesen kijelölhető feszültséghez vagy áramhoz, mint kimenethez és valamely gerjesztéshez tartozó átviteli függvényt racionális törtfüggvény alakban, majd kiszámítja a pólusokat és a zérusokat a Bairstow-módszerrel. Ezután elkészíti a Bode-diagramot a felhasználó által kijelölt frekvenciatartományban grafikus display-re, ill. plotterre és kilistázza annak értékeit.

A **LINA** program az ismertetett módszerrel előállítja a felhasználó által megjelölt átviteli függvénynak bármely R, L vagy C kétpólusú elem értékére vonatkozó $S_h^{(r)W}(s)=\frac{\partial \ln W}{\partial \ln h}$ relatív érzékenységfüggvényét.

A hálózat a meglehetősen bő elemkészletbe [8] tartozó elemek bármelyikét tartalmazhatja, de a program — jelenlegi kiépítésében — csak az R, L, C paraméterekre vonatkozó érzékenységfüggvényeket szolgáltatja. Tervezzük, hogy a program szolgáltatásait kiterjesztjük a többi elem paramétereire vonatkozó érzékenységfüggvények meghatározására is. Itt említjük meg, hogy a program az elvi részben leírtakon túlmenően a hálózat bármely kondenzátorának és ellenállásának áramára, mint kimenetre vonatkozó átviteli függvény érzékenységfüggvényeit soros rövidzár beiktatása nélkül is tudja számolni. Ennek részleteit itt nem tárgyaljuk. Megjegyezzük továbbá, hogy minden ellenállásra az $S_R^{(r)W}(s)$ érzékenységfüggvényt kapjuk, még ha az ellenállás G paraméterét is adjuk meg. A **LINA** program a felhasználó által kijelölt frekvenciákon kiírja az érzékenységek értékét komplex szám alakjában és elkészíti azok valós és képzetes részének grafikonját.

5. Mintapélda

Tekintsük az alábbi egyszerű hálózatot (*Sallen—Key* másodfokú felüláteresztő szűrő):



1. ábra. A mintapélda hálózata ($R_1=R_2=R_3=R_4=10$ kΩ, $C_1=C_2=0{,}1$ μF, $[\omega]=\frac{\text{krad}}{\text{s}}$)

a) Először a 2. szakaszban ismertetett eljárást követjük. A (4) időtartománybeli egyenletrendszert úgy építjük fel, hogy sorra vesszük a hálózati komponenseket és azok hálózatbeli elhelyezkedése alapján az eredetileg zérusmátrix bizonyos elemeit az [1]-ben leírt szabályok szerint megváltoztatjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & -0{,}1 & 0 & 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & -0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ i_z \\ i_b' \\ \dot{u}_{c_1} \\ \dot{u}_{c_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} \begin{bmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ v \end{bmatrix}$$

A $\boldsymbol{P}$ együtthatómátrix invertálása után $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$ felírható. Az (5) alapján a (6) állapotegyenlet mátrixai $\boldsymbol{T}$-ből kiolvashatók:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

az $y=\varphi_5$ kimenetre

$$\mathbf{e}^T=[-2 \quad -2]; \quad d=2.$$

A Souriau-Frame algoritmussal a (8) és (9) egyenletekben szereplő mennyiségek kifejezése:

$$q_1=1 \qquad \boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{E}$$

$$q_2=-\operatorname{sp}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=1 \qquad \boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}+q_2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_3=-\frac{1}{2}\operatorname{sp}\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}=1$$

$$k_1=d=2$$

$$k_2=\mathbf{e}^T\boldsymbol{H}_1\mathbf{h}+dq_2=0$$

$$k_3=\mathbf{e}^T\boldsymbol{H}_2\mathbf{b}+dq_3=0$$

így az átviteli függvény racionális törtfüggvény alakban

$$W(s)=\frac{\Phi_5(s)}{V(s)}=\frac{2s^2}{s^2+s+1}.$$

További célunk az $S_{R_1}^{(r)W}(s)$ érzékenységfüggvény előállítása. A 2. és 5. csomópont között elhelyezkedő R_1 ellenállásra vonatkozó $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial G_1}$ mátrixot, amelynek csak négy eleme nem nulla, közvetlenül a hálózatból, a $\boldsymbol{P}$ mátrix képzési szabályai egy részének újbóli alkalmazásával írjuk fel:

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial G_1}=\begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \quad\; 2 \qquad 5 \\ \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdot\; -& 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdot\; - & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

A 2. szakasz jelöléseivel és kifejezéseivel az érzékenységfüggvény számítása az alábbi lépések elvégzését jelenti:

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial G_1}=-\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial G_1}\boldsymbol{T}; \quad \text{innen}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial G_1}=\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial G_1}=\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial G_1}=[0 \quad 0];$$

$$\frac{\partial d}{\partial G_1}=0.$$

A (16)—(18) képletek szerint

$$\mathbf{z}_1=\boldsymbol{H}_1\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_2=\boldsymbol{H}_2\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1^T=\mathbf{e}^T\boldsymbol{H}_1=[-2 \quad -2]; \quad \mathbf{v}_2^T=\mathbf{e}^T\boldsymbol{H}_2=[0 \quad -2]$$

$$D^2(s)=(s^2+s+1)^2=s^4+2s^3+3s^2+2s+1$$

$$R(s)=(s^2+s+1)\,20s+[-20 \quad -40]s\Big/\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}s\Big/=$$

$$=20s^3-20s^2$$

Az érzékenységfüggvény tehát

$$S_{G_1}^{W}(s)=\frac{20s^3-20s^2}{s^4+2s^3+3s^2+2s+1}.$$

Az R_1-re vonatkozó relatív érzékenységfüggvény ebből már kifejezhető:

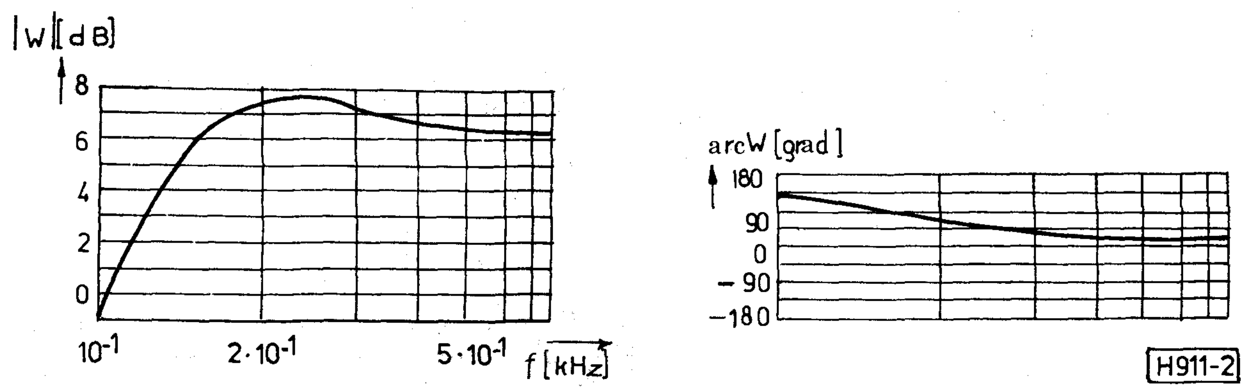
$$S_{R_1}^{(r)W}(s)=-\frac{G_1}{W}S_{G_1}^{W}(s)=\frac{-2s^3+2s^2}{2s^4+2s^3+2s^2}=\frac{-s+1}{s^2+s+1}.$$

Ha pl. $\omega_r=1\,\dfrac{\text{krad}}{s}$, akkor $S_{R_1}^{(r)W}(j)=-1-j$.

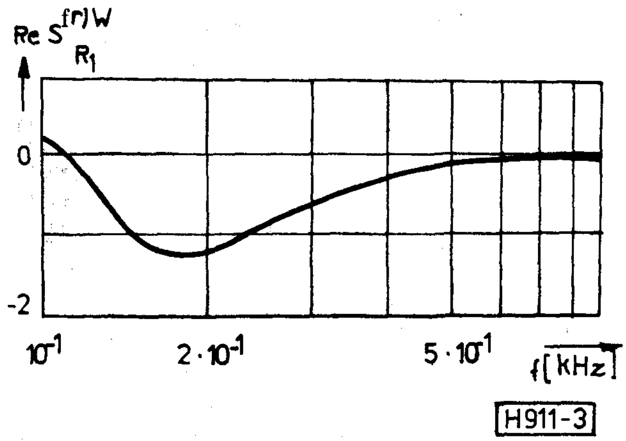
A hálózat más R_i, C_i paraméterére vonatkozó érzékenységfüggvény az előzőekhez hasonlóan számítható. A **LINA** hálózatanalízis program által szolgáltatott eredmények egy része a következő:

```
AZ  ATVITELI  FUGGVENY:
-----------------------

A  GERJESZTES:  VI
A  KIMENET:  U5

                  A  NEVEZO                    A  SZAMLALO
                  EGYUTTHATOI                  EGYUTTHATOI
S^2               1                            2
S^1               1                            0
S^0               1                            0

ERZEKENYSEGFUGGVENYEK:
----------------------

A  VIZSGALT  ATVITELI  FUGGVENY:  W(S)=U5(S)/V1(S)

AZ  ERZEKENYSEGFUGGVENYEK  NEVEZOJENEK  EGYUTTHATOI:

S^4                             2
S^3                             2
S^2                             2
S^1                             0
S^0                             0

A  SZAMLALOK  EGYUTTHATOI:
                  (R)W(S)            (R)W(S)            (R)U(S)
                 S      (S)        S       (S)        S       (S)
                  R1                 C2                 R2
S^4               0                0                  0
S^3              -2                2                  4
S^2               2                2                  2
S^1               0                0                  0
S^0               0                0                  0

AZ  ERZEKENYSEGEK  ERTEKE:
--------------------------

A  VIZSGALT  ATVITELI  FUGGVENY:  U(S)=U5(S)/V1(S)


                                                   (R)W(S)
             FREKVENCIA        AZ  ELEM  (H)      S
                                                   H
             .1                R1                 .276494 -J 1.32522
             .1                C2                 1.31394 -J .325923
             .1                R2                 1.83266 +J .173727
             .159155           R1                 -1 -J .999999
             .159155           C2                 .999999 -J 1
             .159155           R2                 2 -J 1
             .2                R1                 -1.12731 -J .276241
             .2                C2                 .52232 -J 1.03649
             .2                R2                 1.34713 -J 1.41662
             .5                R1                 -.211648 +J .279232
             .5                C2                 .112944E-1 -J .350197
             .5                R2                 .122766 -J .664912
             1                 R1                 -.512851E-1 +J .154917
             1                 C2                 .657866E-3 -J .163184
             1                 R2                 .266294E-1 -J .322234
```

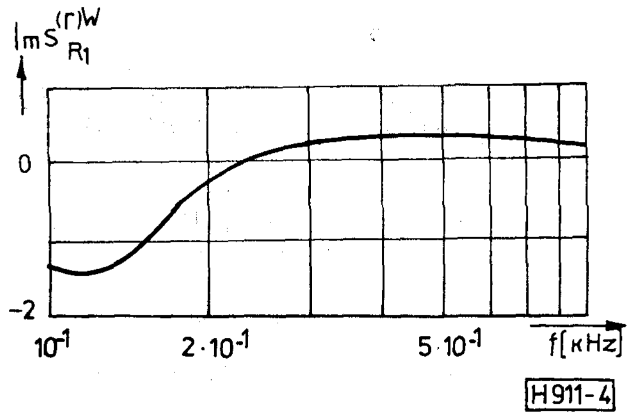
A **LINA** program által a plotteren készített diagramok:



2. ábra. A mintapélda hálózatának Bode-diagramja



3. ábra. Az $S^{(r)W}_{R_1}$ érzékenységfüggvény valós része a frekvencia függvényében



4. ábra. Az $S^{(r)W}_{R_1}$ érzékenységfüggvény képzetes része a frekvencia függvényében

b) Határozzuk meg a hálózat átviteli karakterisztikájának és $S^W_{R_1}$ érzékenységfüggvényének értékét az $\omega_r = 1\ \dfrac{\text{krad}}{\text{s}}$ körfrekvencián a 3. szakaszban tárgyalt módszer alkalmazásával. A (24) frekvenciatartománybeli egyenletrendszert a hálózati komponensek paramétereinek fokozatos összegzésével írjuk fel:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1j & -0{,}1j & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}1j & 0{,}1+0{,}2j & -0{,}1j & 0 & -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1j & 0{,}1+0{,}1j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ I_z \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E}^*$$

A rögzített ω_r körfrekvenciára vonatkozó komplex elemű $\boldsymbol{P}$ invertálásával (22) szerint:

$$W(j\omega_r) = W(j) = \frac{\Phi_5}{V} = -[\boldsymbol{P}^{-1}]_{56} = 2j$$

A hálózat topológiájából közvetlenül felírható

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial G_1} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 5 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} & \overset{2}{\vdots} & & \overset{5}{\vdots} & \\ \cdot\cdot & 1 & \cdot\cdot & -1 & \cdot\cdot \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdot & -1 & \cdots & 1 & \cdot\cdot \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

A (23) képlet szerint az érzékenység értéke

$$S_{G_1}^{W}(j\omega_r) = \left[\boldsymbol{P}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial G_1} \boldsymbol{P}^{-1}\right]_{56} = -20 + 20j.$$

Ebből a relatív érzékenység:

$$S_{R_1}^{(r)W}(j\omega_r) = -\frac{G_1}{W(j\omega_r)} S_{G_1}^{W}(j\omega_r) = -1 - j.$$

6. Összefoglalás

A cikkben új módszert mutatunk be lineáris hálózatok átviteli függvényeinek bármely hálózati komponens paraméterére vonatkozó elsőrendű differenciális érzékenységének előállítására. Az eljárás nem igényli adjungált hálózat vizsgálatát, a paraméterek szimbolikus kezelését, hanem csak a megelőző hálózatanalízis eredményeit használja fel. A hálózat számításának eszköze a módosított csomóponti analízis. Az érzékenységfüggvények meghatározásának módját mind idő-, mind frekvenciatartománybeli kiindulás esetén tárgyaljuk. Az ismertetett eljárás szerint működő **LINA** program interaktív kezelhetősége és számos szolgáltatása révén hatékony hálózatanalízist tesz lehetővé.

7. Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki dr. Fodor György tanszékvezető egyetemi tanárnak, a műszaki tudományok doktorának munkám irányításáért és a kézirat átnézéséért, Cséfalvay Klára tanársegédnek és dr. Péceli Gábor adjunktusnak értékes tanácsaikért.

IRODALOM

[1] Dr. *Fodor Gy.*: Villamos hálózatok csomóponti analízise. Bp. Műszaki K., 1982.

[2] *Chua, L. O., Lin, P. M.*: Computer-aided analysis of electrical circuits. Prentice-Hall, 1975.

[3] Dr. *Géher K.*: Lineáris hálózatok. Bp. Műszaki K., 1968.

[4] *Géher, K.*: Theory of network tolerances. Bp. Akadémiai K., 1971.

[5] *Mitra, S. K.*: Analysis and synthesis of linear active networks. Wiley, 1969.

[6] *Temes, G. C., Lapatra, J. W.*: Introduction to circuit synthesis and design. McGraw-Hill, 1977.

[7] *Brayton, R. K., Spence, R.*: Sensitivity and optimization. Elsevier, 1980.

[8] *LINA* hálózatanalízis-program. Felhasználói útmutató. BME Műszer- és Méréstechnikai Tanszék. 1982. Készítette: Varga Imre.