

Diszkrétidejű hálózatok átviteli karakterisztikájának Bode-diagramja

BAGI ANDRÁSNE

BME Elméleti Villamosságtan Tanszék



ÖSSZEFOGLALÁS

Polytonos idejű hálózatokra az átviteli karakterisztika Bode-diagramjának törtvonalas közelítése könnyen megrajzolható. A cikkben eljárást adunk, mellyel diszkrét idejű hálózatra az átviteli karakterisztika Bode-diagramjának törtvonalas közelítése megszerkeszthető. Az eljárást példával illusztráljuk. (H)

1. Bevezetés

A folytonosidejű, koncentrált paraméterű hálózatok átviteli függvénye az s komplex frekvencia racionális függvénye, átviteli karakterisztikája az ω körfrekvencia (vagy $s=j\omega$) racionális függvénye. Az ilyen hálózatok Bode-diagramja, azaz átviteli karakterisztikájának logaritmikus amplitúdó- és fázisgörbéje könnyen felvázolható, ha ismerjük az átviteli függvény pólusait és zérusait. Az ezek által meghatározott törésponti frekvenciáktól távol ugyanis az egyes gyöktényezőkhöz tartozó görbék aszimptotája meghatározott meredekségű egyenes.

A diszkrétidejű, koncentrált paraméterű hálózatok Bode-diagramjára ez nem érvényes. Ezek átviteli függvénye a $z=e^{sT}$ függvénye, ahol T a mintavételi ciklusidő, így az átviteli karakterisztika $e^{j\omega T}$ racionális, tehát az ω körfrekvencia transzcendens függvénye.

A közismert bilineáris transzformációt $\left(z = \frac{1+w}{1-w}; \right.$ ill. $\left. w = \frac{z-1}{z+1} \right)$ alkalmazva azonban a diszkrét hálózatok átviteli függvénye az új w változóban racionális marad, sőt az átviteli karakterisztika is racionális a $v = \text{Im } w$ változóban. Az így értelmezett v transzformált frekvenciát tekintve független változónak, a Bode-ábrázolásmód diszkrét hálózatokra szinte változatlanul alkalmazható, vagyis a logaritmikus amplitúdó- és fázisgörbe egyszerűen felvázolható, az átviteli függvény egyes pólusainak és zérusainak hatása a görbére könnyen követhető. Az eljárás már E. I. Jury könyvében [3] megtalálható és Csáki F. is említi [4]. Más művek [1, 2] azonban nem ismertetik a módszert, ezért a következőkben [3]-nál részletesebben foglalkozunk vele.

2. Évi alapok

Tekintsük adottnak egy diszkrét idejű hálózat átviteli függvényének:

$$W = W_z(z) = K_z z^{-r} (1 - z^{-1})^k (1 + z^{-1})^h.$$

Beérkezett: 1983. XI. 3.

BAGI ANDRÁSNE

Budapesten szerzett villamosmérnöki diplomát. Az egyetem elvégzése után három évig a Központi Fizikai Kutató Intézet elektronikus főosztá-

lyán dolgozott. Ezután a BME Villamosmérnöki Karra került, azóta az Elméleti Villamosságtan tanszéken dolgozik. Elméleti munkássága az oktatással kapcsolatos.

$$\frac{\prod_{i=1}^{m_1} (i - s_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{m_2} (i + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2})}{\prod_{i=1}^{n_1} (1 - q_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{n_2} (1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2})} \quad (1)$$

normál alakját, ahol $r, m_1, m_2, n_1, n_2, h, k$ természetes számok. A másodfokú tényezőkhöz komplex gyökei vannak, aminek feltétele:

$$b_{2i} > \left(\frac{b_{1i}}{2}\right)^2, \quad \text{ill.} \quad a_{2i} > \left(\frac{a_{1i}}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Stabil hálózat átviteli karakterisztikája ebből $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel adódik. A hálózat stabilitásának feltételei:

$$\text{minden } |q_i| < 1, \text{ továbbá} \quad (3)$$

$$\left(\frac{a_{1i}}{2}\right)^2 < a_{2i} < 1 \quad (4)$$

A $W_z(e^{j\omega T})$ átviteli karakterisztika $2\pi/T$ szerint periodikus, az $|W_z(e^{j\omega T})|$ amplitúdó-karakterisztika az ω páros, az $\text{arc } W_z(e^{j\omega T})$ fáziskarakterisztika az ω páratlan függvénye, ezért elegendő a $0 < \omega < \pi/T$ intervallum vizsgálata. Célunk a

$$k = k_z(\omega) = 20 \lg |W_z(e^{j\omega T})| \text{ dB} \quad (5)$$

és a

$$\varphi = \varphi_z(\omega) = \text{arc } W_z(e^{j\omega T}) \quad (6)$$

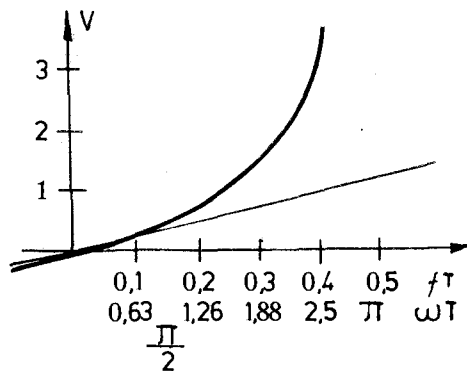
függvények diagramjának felvázolása. A megszokott Bode-technika alkalmazása nem célszerű, mert a gyöktényezők ábrái nem közelíthetők jól egyenesekkel.

Vezessük be azonban az ismert

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad \text{ill.} \quad w = \frac{z-1}{z+1} \quad (7)$$

bilineáris transzformációval az új $w = u + jv$ változót! Speciálisan $z = e^{j\omega T}$ esetén (1. ábra)

$$e^{j\omega T} = \frac{1+jv}{1-jv}; \quad v = \text{tg } \frac{\omega T}{2} = \text{tg } \pi/T \quad (8)$$



H910-1

1. ábra. Az új v változó és a frekvencia, üil. a körfrekvencia kapcsolata

Kellően kis frekvencián $v \approx \omega T/2 = \pi fT$, vagyis a v „transzformált frekvencia” arányos az ω körfrekvenciával. Ez a közelítés $\omega T < 0,77$, ill. $fT < 0,12$ alatt 5%-nál kisebb hibával érvényes. Az információt hordozó $0 < \omega < \pi/T$ vagy $0 < f < 1/2T$ intervallumnak a $0 < v < \infty$ tartomány felel meg. Ebben a tartományban a transzformáció szigorúan monoton. A bilineáris transzformáció az $|z| < 1$ körlemez a $\text{Re } w < 0$ bal félsíkba viszi át.

Az új változó bevezetésével az átviteli függvény:

$$W = W_w(w) = W_z(z) \Big|_{z = \frac{1+w}{1-w}} \quad (9)$$

Az (1) alapján némi rendezéssel az alábbi alakhoz jutunk:

$$W = W_w(w) = K_w \left(\frac{1-w}{1+w} \right)^r \frac{w^k}{(i+w)^l} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} \left(1 - \frac{w}{z_i} \right) \prod_{i=1}^{m_2} \left(1 + 2\zeta'_i \frac{w}{V_i} + \frac{w^2}{V_i^2} \right)}{\prod_{i=1}^{n_1} \left(1 - \frac{w}{p_i} \right) \prod_{i=1}^{n_2} \left(1 + 2\zeta_i \frac{w}{V_i} + \frac{w^2}{V_i^2} \right)} \quad (10)$$

ahol:

$$l = k + h + m_1 + 2m_2 - n_1 - 2n_2 \quad (11)$$

$$K_w = W(z) \Big|_{z=1} = \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (i - s_i) \prod_{i=1}^{m_2} (i + b_{1i} + b_{2i})}{\prod_{i=1}^{n_1} (i - q_i) \prod_{i=1}^{n_2} (1 + a_{1i} + a_{2i})} \quad (12)$$

$$z_i = \frac{s_i - 1}{s_i + 1}; \quad p_i = \frac{q_i - 1}{q_i + 1} \quad (13)$$

$$V_i^2 = \frac{1 + a_{1i} + a_{2i}}{1 - a_{1i} + a_{2i}}; \quad V_i'^2 = \frac{1 + b_{1i} + b_{2i}}{1 - b_{1i} + b_{2i}} \quad (14)$$

$$\zeta_i = \frac{1 - a_{2i}}{\sqrt{(1 + a_{2i})^2 - a_{1i}^2}}; \quad \zeta_i' = \frac{1 - b_{2i}}{\sqrt{(1 + b_{2i})^2 - b_{1i}^2}} \quad (15)$$

Az átviteli függvény (10) alakjának első- és másodfokú gyöktényezőihez a közismert Bode-alapábrák rendelhetők. Ezek összegzésével adódik a

$$k = k_v(v) = 20 \lg |W_w(jv)| \text{ dB} \quad (16)$$

$$\varphi = \varphi_v(v) = \text{arc } W_w(jv) \quad (17)$$

logaritmikus amplitúdó és fázisgörbe. A v tengelyen logaritmikus léptéket felvéve a Bode-diagram a szokásos módon rajzolható. Mivel a Bode-diagramra ω , ill. ωT függvényben van szükség, célszerű mindjárt egy $\omega T = 2 \arctg v$, ill. $f = 1/\pi T \arctg v$ skálázást is bejelölni, amelyen a keresett frekvenciák, ill. körfrekvenciák T ismeretében leolvashatók. Megfontolandó, hogy a boltokban kapható lin-log-papír mintájára előre nyomtatott papírokon ez a kettős skálázás házi-nyomdában elkészíthető.

3. A gyöktényezők ábrái

Emlékeztetőül tekintsük át röviden a (10) alakban szereplő tényezők Bode-diagramjait.

3.1. Az állandó

A K_w állandó amplitúdógörbéje az abszcisszával párhuzamos egyenes, fázisgörbéje $K_w > 0$ esetén a 0° -os tengely, $K_w < 0$ esetén a $+180^\circ$ -os vagy a -180° -os egyenes.

3.2. Valós zérus, ill. pólus

Egy valós z_i zérushoz tartozó

$$W_i = 1 - \frac{w}{z_i}; \quad v_i = |z_i| \quad (18)$$

gyöktényező logaritmikus amplitúdógörbéjének aszimptotái a v_i transzformált frekvenciától balra a 0 dB tengely, ettől jobbra egy $+20$ dB/dekád meredekségű egyenes, amelyek a v_i helyen metsződnek. A logaritmikus fázisgörbe két aszimptotája a 0° -os tengely és $z_i < 0$ esetén a $+90^\circ$ -os egyenes és $z_i > 0$ esetén a -90° -os egyenes; a fázisszög értéke a z_i helyen $\pm 45^\circ$. Mindkét függvény monoton.

A valós pólushoz tartozó

$$W_i = \frac{1}{1 - \frac{w}{p_i}}; \quad v_i = |p_i| \quad (19)$$

ábrái az előzőnek az abszcisszára vonatkozó tükörképei.

Értelemszerű a többszörös zérusok, ill. pólusok ábrája.

3.3. Késleltetés

A z^{-r} késleltetésnek megfelelő tényező az amplitúdógörbét nem befolyásolja. A fázisábrája viszont r előjelétől függően $-r \cdot 180^\circ$ -hoz tart nagy v értékek esetén, míg kis v értékekre 0° . A $v = 1$ helyen a fázisszög értéke pedig $-r \cdot 90^\circ$.

A $W_i = \frac{1}{(1+w)^l}$ tényezőhöz l előjelétől függően többszörös pólus vagy zérus tartozik, amelyhez a többszörös pólusnak, ill. zérusnak megfelelő ábrák rendelhetők.

3.4. Konjugált komplex zéruspár, ill. póluspár

A konjugált komplex zéruspárhoz tartozó másodfokú gyöktényező:

$$W_i = 1 + 2\zeta'_i \frac{w}{V_i} + \frac{w^2}{V_i^2} \quad |\zeta'_i| < 1 \quad (20)$$

A logaritmusos amplitúdógörbe aszimptotái a 0 dB tengely, ill. egy 40 dB/dekád meredekségű egyenes, amelyek a V_i transzformált frekvenciánál metsződnek. A függvénynek $0 < \zeta'_i < 1/\sqrt{2}$ esetén minimuma van, $1/\sqrt{2} < \zeta'_i < 1$ esetén monoton. A logaritmusos fázisgörbe aszimptotái a 0° -os tengely és $\zeta'_i > 0$ esetén a $+180^\circ$ -os egyenes, ill. $\zeta'_i < 0$ esetén a -180° -os egyenes, a függvény monoton.

A konjugált komplex póluspárhoz tartozó

$$W_i = \frac{1}{1 + 2\zeta_i \frac{w}{V_i} + \frac{w^2}{V_i^2}} \quad |\zeta_i| < 1 \quad (21)$$

másodfokú gyöktényező ábrái az előzők tükörképei az abszcisszára.

4. Példák

1. példa

Itt a módszer illusztrálására vizsgáljunk meg először egy z -ben másodfokú átviteli függvényt!

Tekintsük adottnak a

$$W = W_z(z) = K_z \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (22)$$

átviteli függvényt. Ennek transzformáltja:

$$W = W_w(w) = K_w \frac{(1+w)^2}{1 + 2\zeta \frac{w}{V} + \frac{w^2}{V^2}} \quad (23)$$

ahol K_w , ζ és V értékét (12, 14, 15) összefüggésekkel határozhatjuk meg. További számítások nélkül is látható, hogy ennek a $W(w)$ függvénynek máshol van szélsőértéke, mint a nevezőben szereplő másodfokú tagnak. A szélsőérték helye:

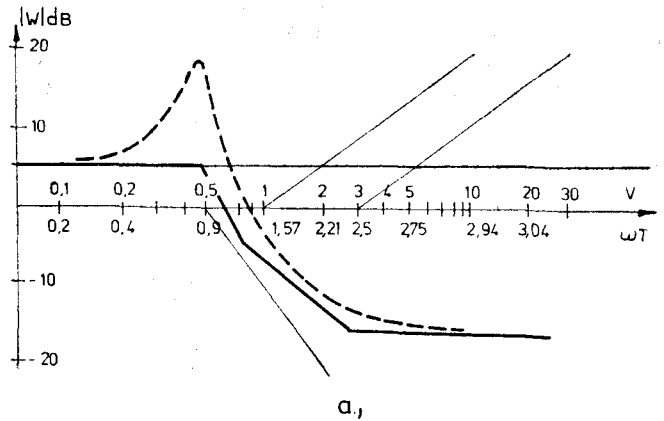
$$v_{\max}^2 = V^2 \frac{2\zeta^2 - 1 - V^2}{V^2(2\zeta^2 - 1) - 1} \quad (24)$$

azaz, ha $W_z(z)$ átviteli függvényt tekintjük építőelemnek, a Bode-diagram ránézésre nem vázolható fel. A fenti szélsőérték helyet bonyolultabb példánál nem mindig érdemes felhasználni, mint ezt a következő példánkban látni fogjuk, mégis szükségesnek tartottuk ennek megemlítését, mivel a (22) függvényhez tartozó átviteli karakterisztika önmagában is érdekes lehet.

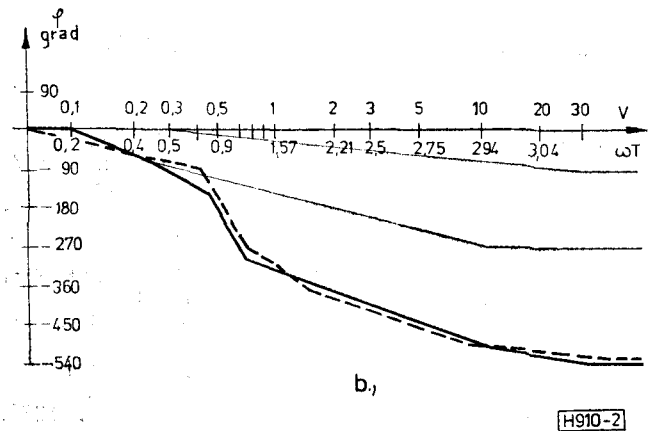
2. példa

Ábrázoljuk végül az alábbi diszkrét átviteli függvényhez tartozó átviteli karakterisztika Bode-diagramját!

$$W_z(z) = 0,5 \frac{z^{-2}(1+2z^{-1})}{1-z^{-1}+0,8z^{-2}} \quad (25)$$



2a ábra. Az amplitúdó-karakterisztika Bode-diagramja



2b ábra. A fáziskarakterisztika Bode-diagramja

A nevezőben levő másodfokú gyöktényezőnek konjugált komplex gyökei vannak, és a rendszer stabil, mert együtthatói eleget tesznek a (4) feltételeknek.

Határozzuk meg a transzformáláshoz szükséges konstansokat! (11–15) összefüggések:

$$K_w = K_z \frac{1 - s_1}{1 + a_1 + a_2} = 1,875 \rightarrow 5,46 \text{ dB}$$

$$z_1 = \frac{s_1 - 1}{s_1 + 1} = 3$$

$$V^2 = \frac{1 + a_1 + a_2}{1 - a_1 + a_2} = 0,28; \quad V = 0,53$$

$$\zeta = \frac{1 - a_2}{(1 + a_2)^2 - a_1^2} = 0,13$$

Így a konstansok beírása után a transzformált átviteli függvény az alábbi:

$$W_w(w) = \frac{1,875 \left(1 - \frac{w}{3}\right) (1+w)}{1 + 2 \cdot 0,13 \frac{w}{0,53} + \frac{w^2}{0,28}} \frac{(1-w)^2}{(1+w)^2}$$

Az átviteli karakterisztika Bode-diagramja a 2. ábrán látható. A 2a ábra az amplitúdó-, a 2b ábra a fáziskarakterisztikát mutatja. A szaggatott vonal

mindkét karakterisztikában a számított pontokból adódó görbe. A szélsőérték helye akár a (24) formulából, akár a Bode-diagramnál megszokott formulából 0,52-re adódik. Ez az érték $\omega T = 0,96$ -nak felel meg, a szélsőérték nagysága 19,6 dB.

5. Köszönetnyilvánítás

Megköszönöm dr. Fodor György professzornak a téma kidolgozásában nyújtott hathatós segítségét, vala-

mint dr. Zombory László docensnek a téma felvetését.

I R O D A L O M

- [1] A. Antoniou: Digital Filters: Analysis and Design. McGraw-Hill Book Co. New York 1979.
 - [2] R. A. Gabel, R. A. Roberts: Signals and Linear Systems. John Wiley & Sons, Inc. Toronto 1980.
 - [3] E. I. Jury: Sampled-Data Control Systems John Wiley & sons Inc. 1958.
 - [4] Csáki F.: Korszerű szabályozáselmélet. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.
-