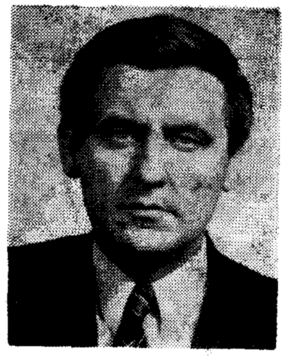
Optimális trunkhálózat számítása a veszteségi tényező, az átlagérték, valamint a szórásnégyzet deriváltjai alapján

DR. TÓTH ENDRE
Postai Tervező Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk a haránt-rendszerű trunkhálózat pontos és gyors méretezését ismerteti a hálózat összköltségének a haránt áramkörszám szerinti deriváltja alapján. A számításhoz felhasználja a veszteségi tényező, valamint a túlcsorduló forgalom és a szórásnégyzet-forgalom, illetve áramkörszám szerinti deriváltjait. A módszer alkalmazásának hasznosságát egy példán keresztül mutatja be. (*)

Bevezetés

Ismeretes, hogy az optimális trunkhálózat általában haránt rendszerű. Ennek határeseteként tekinthetjük a közvetlen (szövevényes), illetve a sugaras (csillagrendszerű) hálózatot.

A haránt rendszerű hálózat méretezésére sajnos nincs explicit képlet. A méretezés a Rapp-módszer alapján történik. A módszer lényege az, hogy a haránt áramkörök számát addig kell változtatni, amíg a hálózat összköltsége minimális nem lesz.

A hagyományos Rapp-módszer hiányossága, hogy — a haránt áramköröknek próbálgatással való meghatározása miatt — lassú.

Kézenfekvő az a gondolat, hogy a költségminimumhoz tartozó haránt áramkörszámot az összköltségnek a haránt áramkörök szerinti deriváltjából számítsuk ki.

Az összköltséget az alábbi képlettel fejezhetjük ki:

$$C=\sum_j B_j \cdot N_j \tag{1}$$

ahol N_j a j-edik összeköttetés áramkörszáma,

B_j a j-edik összeköttetés egy áramkörének költsége (a számolás egyszerűsítése végett feltételezzük, hogy $\frac{\partial B_j}{\partial N_j}=0$),

C a hálózat összköltsége.

Az összköltségnek az i-edik haránt összeköttetés szerinti deriváltja

$$\frac{\partial C}{\partial N_i}=B_i+\sum_{i\neq j} B_j \frac{\partial N_j}{\partial N_i} \tag{2}$$

* A szükséges matematikai apparátus a Postai Tervező Intézet információs tájékoztatójában (INFO—1983/6. szám) hozzáférhető.

Beérkezett: 1982. XI. 24.

DR. TÓTH ENDRE

Mérnöki diplomáját 1959-ben kapta meg a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karának híradástechnikai szakán. 1969-ben távbeszélő-technikai szakmérnöki diplomát szerzett. Egyetemi doktori címet 1976-ban kapott a „Körzethálózatok optimális tervezése" című disszertációjáért. 1959. május 11-től a Postai Tervező Intézet dolgozója. 1981-ig az Intézet központos osztályán távbeszélő központok és helyközi hálózatok forgalmi méretezésével foglalkozott. Jelenleg a számítástechnikai csoport rendszerprogramozója. Távbeszélő forgalomelmélet területén elsősorban a kerülőutas trunkhálózatok optimális méretezésével foglalkozik. Ezzel kapcsolatban jelent meg a Híradástechnikában két korábbi cikke is, és ezt az elméletet alkalmazta több helyközi írunk hálózati tervében is.

Az összköltség ott minimális, ahol a derivált 0.

Mivel az $N_j=N_j(N_i)$-t nem lehet explicit függvényként felírni, a deriválást csak lépésenként lehet elvégezni, s az N_i gyököt is csak valamilyen iterációs módszerrel lehet kiszámítani. Célszerű az érintő módszert alkalmazni. Ehhez fel kell írni a (2) képlet deriváltját:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial N_i^2}=\sum_{i\neq j} B_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial N_i^2} \tag{3}$$

A módszert természetesen többhurkos hálózatra is lehet alkalmazni, de ez esetben nemlineáris egyenlet helyett egyenletrendszert kell megoldani.*

A módszer alkalmazása

A továbbiakban nevezzük az optimális hálózatnak egész harántáramkörökkel, próbálkozásos felvétellel való meghatározását hagyományos Rapp-módszernek, a költségfüggvények deriváltjaival való meghatározását pedig differenciális Rapp-módszernek! Vizsgáljuk meg azt, hogy a két módszer miben egyezik meg egymással, illetve miben különbözik egymástól.

1. Mindkét módszernél célszerű közelítő eljárásból meghatározott haránt áramkörszámból kiindulni. Nulla, illetve kis veszteségű áramkörszámból kiindulva általában hosszadalmas számítási módszerhez jutunk.

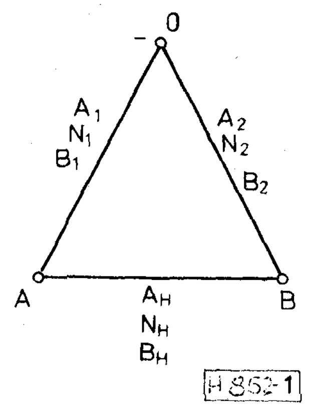
   A közelítő számítások általában a túlcsorduló forgalomnak csak az átlagértékét veszik figyelembe.

Több közelítő módszer is van. Az ismertebbek az alábbiak.

a) Első svéd módszer. Képezzük a haránt összeköttetés, valamint a kerülőút egy áramköre költségének hányadosát (ε-t)

$$\varepsilon=\frac{B_H}{B_1+B_2} \tag{4}$$

ahol B_H a haránt összeköttetés egy áramkörének költsége,
B_1 B_2 a kerülő irányok egy áramkörének költsége (lásd 1. ábra).



1. ábra. Egyhurkos hálózat felépítése

Optimális esetben

$$\varepsilon \approx F_H=A_H(E_{N_{H-1}}-E_{N_H}) \tag{5}$$

ahol A_H a haránt összeköttetésnek felajánlott forgalom,
E_{N_H} a haránt összeköttetés veszteségi tényezője,
$E_{N_{H-1}}$ az egy áramkörrel csökkentett haránt áramköri nyaláb veszteségi tényezője,
F_H a haránt összeköttetés utolsó áramkörének kihasználási tényezője (tulajdonképpen a túlcsorduló forgalom átlagának differenciahányadosa).

A módszer előnye az egyszerűsége. Hátránya az, hogy az utolsó választású irányokra 100%-os kihasználtságot tételez fel, ami közelítőleg is csak nagy forgalom, illetve nagy veszteségi tényező esetén igaz.

b) Második svéd módszer. Ennél az alábbi képlettel számítható ki az ε:

$$\varepsilon=\frac{B_H}{\dfrac{B_1}{F_1}+\dfrac{B_2}{F_2}} \tag{6}$$

A képletben F_1, F_2 a kerülő irányok utolsó áramkörének kihasználási tényezője.
A (6) képlet pontosabb eredményt ad, mint a (4), de kiszámításához meg kell határozni a kerülő irányok áramkörszámát, ami a számítás idejét jelentősen megnöveli.

c) A Rapp-féle közelítő képlet. Y. Rapp az ε alábbi módosítását javasolja:

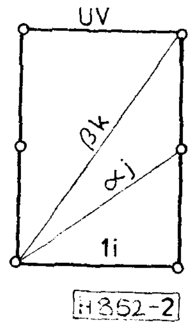
$$\varepsilon'=\varepsilon[1-0{,}3(1-\varepsilon^2)] \tag{7}$$

A további számításokban ezt az ε'-t kell ε helyett figyelembe venni. A módszer pontosabb, mint az I. svéd módszer és kisebb az időigénye, mint a II. svéd módszeré. Számítógépes optimumkereséshez ezt a módszert célszerű alkalmazni.

d) Lotze-módszer. Az előző módszerek a haránt irányt és a közvetlen kerülőutat vették figyelembe, a Lotze-módszer az összes kerülőutat.
Vizsgáljuk például a 2. ábrán látható hálózatot. Erre a hálózatra A. Lotze az alábbi eredő költségarányt vezette le:

$$\varepsilon=\frac{B_{UV}}{B_{1i}}\left[\frac{1-F_{\alpha j}}{\dfrac{B_{UV}}{B_{\alpha j}}\cdot\dfrac{\Delta Y_{\alpha j}}{\Delta Y_{UV}}}+\frac{E_{\alpha j}(1-E_{\beta k})}{\dfrac{B_{UV}}{B_{\beta k}}\cdot\dfrac{\Delta Y_{\beta k}}{\Delta Y_{UV}}}+E_{\alpha j}E_{\beta k}(1-E_{UV})\right] \tag{8}$$

ahol Y a lebonyolított forgalom (az indexben levő kifejezések a 2. ábra útvonalaira utalnak).



2. ábra. A 6. képlethez tartozó hálózat

Látható, hogy a Lotze-módszer a közelítő módszerek közül a legpontosabb, de a legbonyolultabb is. Használata akkor indokolt, ha elegendőnek tartjuk a közelítés pontosságát.

2. A közelítő haránt áramkörszám után a hagyományos és a differenciális Rapp-módszerrel különbözőképpen kell a pontos haránt áramkörszámot meghatározni. Az eltérést egy példán mutatom be.

Legyen egy egyhurkos hálózatunk (1. ábra). Legyen mindhárom felajánlott forgalom $5E$, mindhárom egységköltség 1 egység, s a hálózat átlag veszteségi tényezője 0,01!

A haránt irányra azért vettem fel $5E$-t, hogy egyértelműen kiadódjon a haránt áramkör szüksége. Az utolsó választású irányokra pedig azért, hogy az utolsó áramkör kihasználása 100%-nál jóval kisebb legyen.

Az 1:1-es költségarány jól megközelíti a valóságot, mert a nagy csatornaszámú vonali berendezések fajlagos költsége általában egy nagyságrenddel alatta marad a végponti (modem-, központ-, épület-, áram-

1. táblázat

X	C(X)	C1(X)	C2(X)
6.000000000000000	29.635283977970910	-0.516713307010375	0.38938048935045
7.325312040303117	29.224349184009510	-0.086450833532457	0.37364951789808
7.556680821950687	29.213823781971670	-0.004419396699133	0.36919699389392
7.568651116325302	29.213796168790410	-0.000173641685903	0.36890719207003
7.569121808384541	29.213795705033570	-0.000006665559011	0.36839538889134
7.569139877352632	29.213796160969500	-0.000000329420380	0.36839498123314
7.569140770344939	29.213796269347090	0.000000005299456	0.36839485499534
7.569140755979178	29.213796310005160	-0.000000005571857	0.36839483151924
7.569140771083366	29.213796267256930	0.000000005353302	0.36839485607503
7.569140755202685	29.213796312202700	-0.000000006159453	0.36839483025689
7.569140771899728	29.213796264946690	0.000000006476053	0.36839485740216
7.569140754344447	29.213796314631490	-0.000000006808892	0.36839482836170
7.569140772301988	29.213796262393090	0.000000007153841	0.36839485836901
7.569140753395805	29.213796317316500	-0.000000007526805	0.36839482731937
7.569140773799466	29.213796259569800	0.000000007913728	0.36859486049073

ellátás stb.) fajlagos költségének. Mivel pedig az utóbbiak fajlagos költsége első közelítésben független a vonalkapacitástól, nem követünk el nagy hibát, ha minden útvonalra azonos költséget veszünk.

Példánkban a közelítő módszerrel 6, a pontos módszerrel pedig 8 haránt áramkört kapunk.

Hagyományos módszerrel kedvező esetben három (7, 8, 9), kedvezőtlen esetben négy (5, 7, 8, 9) lépésben jutunk el a hagyományos Rapp-módszerrel a közelítő áramkörszámtól a pontos áramkörszámig. Mivel előre nem tudhatjuk, hogy a pontos áramkörszám kisebb-e vagy nagyobb a közelítő értéknél, átlagosan 3,5 lépés szükséges a példa szerinti pontos áramkörszám meghatározásához.

A differenciális Rapp-módszernek akkor van értelme, ha a hagyományosnál kevesebb lépésben határozza meg a pontos áramkörszámot. Esetünkben tehát minimálisan 3 lépésben célhoz kell jutni.

Az 1. táblázatban látható a számítás eredménye. X a haránt áramkörszám, $C(X)$ a hálózat összköltsége, $C1(X)$ a költség első deriváltja (ami egyben a közelítés hibája is), $C2(X)$ pedig a második derivált.

A differenciális Rapp-módszerben a költségek kiszámításával egyidejűleg megkapjuk a következő közelítés áramkörszámát. Így a közelítő áramkörszám költségének kiszámításánál megkapjuk az első módosítás áramkörszámát (második sor), az első módosítás költségének kiszámításakor megkapjuk a második módosítás áramkörszámát (harmadik sor) stb.

Az 1. táblázatból látható, hogy az első módosítás után már nagyságrendileg megkapjuk a tényleges haránt áramkörszámot (7,556681 . . .), míg a második közelítés után az optimumkeresés hibája elhanyagolhatóan kis érték ($C_1(X) \approx -1{,}73 \cdot 10^{-4}$). Ezzel szemben a hagyományos Rapp-módszerrel kedvező esetben is csak a harmadik módosítás után kapjuk meg a tényleges optimumot.

A táblázatból az is látható, hogy a módszer eleinte gyorsan konvergál, de a gyök közelében még dupla pontosságú számokkal dolgozva is annyira halmozódnak a részhibák, hogy a számítás pontatlanná válik, a gyököt csak egy bizonyos kis, de véges hibával lehet meghatározni (a gyakorlati igényeket azonban ez a pontosság — $\leqq 2 \cdot 10^{-5}$ áramkör — is jóval meghaladja).

Előfordulhat az is, hogy a közelítő haránt áramkörszám megegyezik a tényleges haránt áramkörszámmal. Ez a hagyományos Rapp-módszer alkalmazása esetén két lépés ($N_H - 1$, $N_H + 1$) után derül ki, míg a differenciális Rapp-módszer alkalmazásánál vagy már a közelítő áramkörszám költségszámításánál, vagy az első módosítás után. A módosítások számában tehát itt is elérhető a megtakarítás.

Ha nem gazdaságos a haránt áramkör alkalmazása, az a hagyományos Rapp-módszer esetén egy módosítás után derülhet ki. Itt $X_H \approx 0{,}5$ esetén a differenciális Rapp-módszer alkalmazásánál is szükség lehet egy módosító lépésre. Ebben az esetben tehát a két módszer azonos lépésszámból állhat.

Végül kis veszteségű haránt áramkör esetén hagyományos Rapp-módszerrel, két, differenciális Rapp-módszérrel egy lépésben lehet a hálózat minimális voltát igazolni.

Látható tehát, hogy a differenciális Rapp-módszerrel általában legalább egy módosító lépést meg lehet takarítani a hagyományos Rapp-módszerhez képest, ami több száz órás futásidő mellett jelentős gépidő-megtakarítást jelent.

Az egész haránt áramkörszám meghatározása

A differenciális Rapp-módszer általában tört haránt áramkörszámot eredményez. Mivel azonban csak egész áramkört lehet megvalósítani, a tört áramkörszámot egész áramkörre kell átalakítani.

Ha a költségfüggvény a gyök környezetében (az $[X_{H-1}, X_{H+1}]$ intervallumban) szimmetrikus (a második derivált is szimmetrikus vagy állandó), a tört áramkörszám kerekítésével megkapjuk a minimális költséget adó haránt áramkörszámot.

Ebből a célból vizsgáljuk meg a költségeket, illetve a deriváltakat 7, 8, illetve 9 haránt áramkör esetén (2. táblázat).

2. táblázat

N_H	$C(N_H)$	$C'(N_H)$	$C''(N_H)$
7	29,250 29	– 0,197 379	0,37 667
8	29,245 93	0,151 495	0,25 655
9	29,556 549	0,469 563	0,29 413

A táblázatból és az 1. táblázatból látható, hogy a második derivált a 7, 8 intervallumban valóban közel állandó, ezért az 1. táblázatban kapott tört áramkörszámot 8-ra lehet kerekíteni. Ugyancsak látható, hogy valóban 8 haránt áramkörnél minimális a hálózat összköltsége.

Az 1. és a 2. táblázatból az is látható, hogy a második derivált nem egészen állandó, hanem monoton csökken. Ennek megfelelően a kerekítés is eltolódik. Ha a II. derivált változását lineárisnak tekintjük, a kerekítési pont 0,0012-del negatív irányba tolódik. Ezt azonban nem érdemes figyelembe venni, mert a számítás idejét megnöveli, s helytelen irányba való kerekítés esetén (aminek 2,2‰ a valószínűsége) sem nő a költségszámítás hibája 0,001 fölé.

A pontos Rapp-módszer alkalmazásának előnye

Felmerül az a kérdés, hogy érdemes-e a közelítő módszerek helyett egy nagy gépidejű, bonyolult programot írni?

Ebből a célból vizsgáljuk meg ismét az I. és a II. táblázatot! Látható, hogy a közelítő módszerrel nyert 6 áramkörhöz 29,635, míg a pontos számítással kapott 8 áramkörhöz pedig 29,2459 költségegység tartozik. A pontos számítással tehát

$$\frac{29{,}635-29{,}2459}{29{,}635}\cdot 100 \approx 1{,}3\%$$

költségmegtakarítást lehet elérni, ami a nagy költségigényű trunkhálózatok beruházásánál jelentős összeg lehet.

IRODALOM

[1] Rapp, Y.: Planning of function Network in a Multi-exchange Area. I. General Principles Ericsson Technics No. 1. (1964) 77—130. oldal.

[2] Wilkinson, R. I.: Theories for Toll Traffic Engineering in the U.S.A. Bell System Technical Journal. 35 (1956) 421—514. oldal.

[3] Wallström, B.: Congestion Studies in Telephone Systems with Overflow Facilities. Ericsson Technics. No. 3. 1966. 189—351. oldal.

[4] Akimaru, H., Tokushima, H., Nishimura, T.: Derivates of Wilkinson Formula and Their Application to Optimum Design of Alternative Routing Systems. ITC-9. 1—6. oldal.