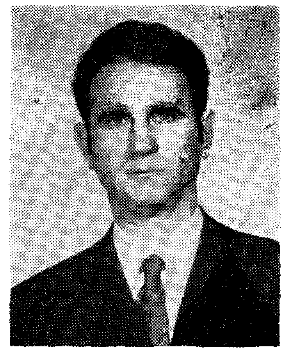
A hírközlés korlátai és az információelmélet

DR. KERPÁN ISTVÁN
Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola



ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk felhívja a figyeimet a hírközlést érintő „alapvető korlátok" aktualitására, az utolsó egy-két év szakirodalmi közlései alapján. Részletesebben két, az információelmélettel szorosan összefüggő korlátproblémával foglalkozik: (I) Az egy bit átviteléhez minimálisan szükséges energiával termikus zajban; (II) Az üzenetforrás által igényeltnél kisebb bitsebesség hatását kifejező „rátatorzítás függvénnyel". Utóbbinak a megfelelő modellhez kapcsolódó kvantitatív kifejezését egy igen egyszerű gondolatmenettel vezeti be (felhasználva az alapfogalmaknak szerző korábbi munkáiban kifejtett szemléletét). (#)

DR. KERPÁN ISTVÁN

A Budapesti Műszaki Egyetemen 1959-ben villamosmérnöki oklevelet, 1966-ban átviteltechnikai szakmérnöki oklevelet, 1970-ben pedig műszaki doktori címet szerzett. Hat éven át volt a BHG Híradástechnikai Vállalat mérnöke, majd tanári kinevezést kapott a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolára, ahol hosszabb ideig a Vezetékes Híradástechnikai Tanszék vezetője volt. Jelenleg a Híradásipari Intézet igazgatója. Szakmai munkásságának főbb területei: a légnedvességgel összefüggő technológiai és konstrukciós kérdések; vizsgálati technológiák és eszközök; a jel- és információelmélet egyes kérdései. Egy találmánynak, több főiskolai jegyzetnek, mintegy két tucat szakcikknek, számos egyéb publikációnak a szerzője, ill. társszerzője.

1. Bevezetés

Korunk tudományos és technikai fejlődése nyomán mind gyakrabban és közelebbről kell szembenéznünk az információ szállítása, tárolása és feldolgozása területén különböző korlátokkal. (A technikai fejlődés tette gyakorlati problémává pl. a sebességnek a relativitáselmélet által feltárt korlátját is.)

Vannak alapvető korlátok („fundamental limits"), amelyek a világnak a fizikai elméletekben és az anyagokra vonatkozó ismereteinkben tükröződő tulajdonságaira vezethetők vissza. (Ilyenek pl. az információs folyamatokkal járó energia disszipáció, a keletkező hő elvezetésének a nehézségei, az információt a statisztikus ingadozási jelenségekkel szemben megőrizni képes feszültségnagyság stb.) Más esetekben tapasztalati korlátok merülnek fel (pl. az egy tranzisztorra számított összekötőhuzal hosszúság növekedésének a tendenciája az IC-ben az integráltság fokának növekedésével, vagy a tervezési és ellenőrzési nehézségek rohamos növekedése a nagybonyolultságú eszközök komplexitásával). Az efféle korlátoknak még nincs átfogó elmélete. (L. [1].)

Az alapvető határok „átlépéseinek" az útja: újabb eszközök és eljárások kidolgozása, olyanoké, amelyekre más, számunkra kedvezőbb határok érvényesek. (Pl. egy bit detektálásához mikrohullámú rádióátvitelnél — az ott lényeges szerepet játszó háttérsugárzás folytán — majd öt teljes nagyságrenddel nagyobb energia szükséges, mint fénysávú átvitelhez — 1 foton/bit ideális detektorban — L [2].)

Azóta hírt szerezhettünk 2,5 bit/detektált foton arányról. (L. [3].)

A hírközlést érintő korlátok iránti nemzetközi érdeklődés hazai reflexiói közül [4]-re (tárgyunk szempontjából különösen Budinszky József és Csurgay Árpád írásaira), továbbá [5]-re utalunk.

A hírközlés korlátai szempontjából különleges diszciplína az információelmélet. Ennek ugyanis éppen egyes (pl. a kódolásban döntő szerepet betöltő) korlátok tanulmányozása adja a fő tartalmát. Emlékeztetőül: az egymástól statisztikusan független x_i üzeneteket ($i=1, 2, \ldots, N$), $0 \leq P(x_i) \leq 1$ valószínűségekkel ($\Sigma P(x_i)=1$) kibocsátó üzenetforrás entrópiája:

$$H(x)=\Sigma P(x_i)\log_2\frac{1}{P(x_i)}\ \text{(shannon/üzenet)} \qquad (1)$$

az üzenetek kódolásához szükséges bináris kódszavak átlagos szóhosszának a minimuma (l. pl. [6]. Azaz:

$$(\bar{n}_i)_{\min}\ \text{(bit/üzenet)}=H(x). \qquad (2)$$

((2)-ben az információelmélet 1. alaptétele jut kifejezésre.) Továbbá: ha zajos (megbízhatatlan) csatornán, melyen bármely x_i adott és ennek hatására y_j vett üzenetpár feltételes valószínűsége $0<P(x_i/y_j)<1$, szemben az ideális csatornára érvényes

$$P(x_i/y_j)=\begin{cases}1, & \text{ha}\quad i=j\\ 0, & \text{ha}\quad i\neq j\end{cases}\quad \begin{pmatrix}i=1, 2, \ldots, N\\ j=1, 2, \ldots, N\end{pmatrix}$$

összefüggéssel megbízható üzenetátvitelt akarunk elérni (többletjelölőket alkalmazva, ezzel a jelölők kihasználási hatásfokát lerontva), a csatorna (C') szimbólumkapacitása adja meg a jelölők kihasználási hatásfokának a maximumát:

$$C'=1-\frac{H(X/Y)}{H_{\max}(X)}\quad\left(\frac{\text{shannon}}{\text{bit}}\right)=\eta_{\max} \qquad (3)$$

((3)-ban az információelmélet második alaptétele jut kifejezésre.) Memóriamentes forrást feltételezve $H(X)=H_{\max}(X)$, ha $P(x_i)=\frac{1}{N}$, tehát konstans min-

Beérkezett: 1983. XI. 3.

den i-re. Abban az esetben, ha $P(y_j)=\frac{1}{N}=\text{konst.}$,

akkor a „veszteség":

$$H(X/Y)=\Sigma P(x_i/y_j)\log_2\frac{1}{P(x_i/y_j)}\quad\left(\frac{\text{shannon}}{\text{üzenet}}\right).$$

Ezt $H_{max}(X)$-szel osztva az egy bitre jutó veszteséget kapjuk. Ha $P(y_j)\neq\text{konst.}$, akkor még a $P(y_j)$ értékekkel átlagolni kell. Bináris szimmetrikus csatornán (BSC) p nagyságú bithiba valószínűséggel, a 0 és 1 szimbólumok $P(0)=P(1)=\frac{1}{2}$ valószínűségével:

$$H(X/Y)=H(p;1-p)=$$

$$=p\log_2\frac{1}{p}+(1-p)\log_2\frac{1}{1-p}\quad(\text{shannon/bit})\qquad(4)$$

és $H_{max}(X)=1$. (L. pl. [7].) Fentieknek megfelelően (stacionárius rendszerben) 1 shannonnyi információnak 1 bit a reprezentációja, ha azt kódoláskor a leggazdaságosabban alkalmaztuk és megbízhatóan kezeltük. ((4) utolsó egyenlőségjelétől jobbra az ún. bináris entrópia függvény áll.)

Az információelméleti kutatások további korlátokat kvantifikálnak. Közülük mutatunk be egyet a 2. pontban — egyszerűsítő feltételek kikötése mellett ([8] forrást felhasználva). Majd a 3. pontban ([1] forrásra támaszkodva) bemutatjuk, hogy az információelméleti korlátok és más (fizikai) alapvető korlátok kombinálásával további korlát ismerhető fel.

2. A „rátatorzítás" alsó határa: rátatorzítási függvény

A (2)-ben megadottnál rövidebb átlagos szóhossz is alkalmazható. Ennek ára az üzenetátvitel bizonytalansága. Ezzel a problémával foglalkozunk e pontban. Tekintsük az 1. ábrát.

Az X üzenetforrás 0 és 1 bináris szimbólumokat (biteket) bocsát ki véletlenszerűen, $P(0)=P(1)=1/2$ valószínűségekkel. Tehát $H(X)=H_{max}(X)=$ $=1\left(\frac{\text{bit}}{\text{üzenet}}\right)$.

Vizsgáljuk a K darab bitből álló $\{x_i\}_{i=1}^{K}$ blokkokat (K tetszés szerinti egész szám lehet, beleértve a $K\to\infty$ határátmenetet is).

A kódolóval a bit/üzenet arányt az R „ráta" szerint 1-ről $R<1$-re redukáljuk. Vagyis az $RK<K$ darab bitből álló $\{y_j\}_{j=1}^{RK}$ sorozatot rendeljük az eredeti $\{x_i\}_{i=1}^{K}$ bitsorozathoz.

(A zajmentes és memóriamentes csatornának mind a bemenetén, mind a kimenetén ugyanaz az RK tagú y_j sorozat van jelen — a jelkésési időtől itt eltekintve —, szimbólumkapacitása: $C'=\text{shannon/bit}$.)

A dekódolóval az $\{y_j\}_{j=1}^{RK}$ sorozatból előállítjuk az x forrás által eredetileg kibocsátott $\{x_i\}_{i=1}^{K}$ sorozat egy becslését, $\{\widehat{x_i}\}_{i=1}^{K}$-t.

Ezt — (2) értelmében — csak valamilyen D hibával lehet megtenni. Különböző (0; 1) variációkra (s esetleg ismétléseikre is) D különbözhet. Átlagos értékét $\bar{D}$-sal jelöljük és „rátatorzításnak" nevezzük.

($R\geq H(x)$ esetén, megfelelő kódolás mellett nem lép fel a rátatorzítás, tehát $\bar{D}=0$.)

D-re (s ezzel $\bar{D}$-re) különböző kritériumok adhatók. A legelterjedtebb a (D_H-val jelölt) Hamming-torzítás:

$$D_H=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad \hat{x}_r=x_r\\ 1, & \text{ha}\quad \hat{x}_r\neq x_r\end{cases}\qquad(5)$$

(x_r az eredeti, $\hat{x}_r$ a becsléssel előállított sorozatok r-edik bitjei.)

(5)-ből megállapítható, hogy — BSC-re — D_H nem más, mint a p bithibaarány (bithiba-valószínűség).

$\bar{D}_H$ nem lehet kisebb, mint egy R-től függő alsó korlát, amelyet d(R)-rel jelölünk és „rátatorzítás függvény"-nek nevezünk. Azaz:

$$\bar{D}_H\geq d(R)=p_{min}\qquad(6)$$

Az egyenlőség általában csak bonyolult kódolással, $K\to\infty$ mellett érhető el.

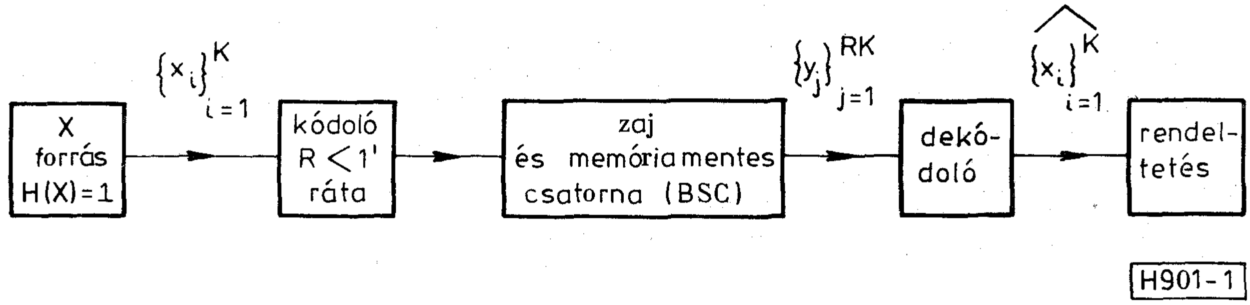
$$[d(R)]_{min}=d(R)|_{R\geq H(x)}=0.$$

(Ha R eléri az 1 bit/shannont — mint arra már rámutattunk — nem lép fel rátatorzítás.)

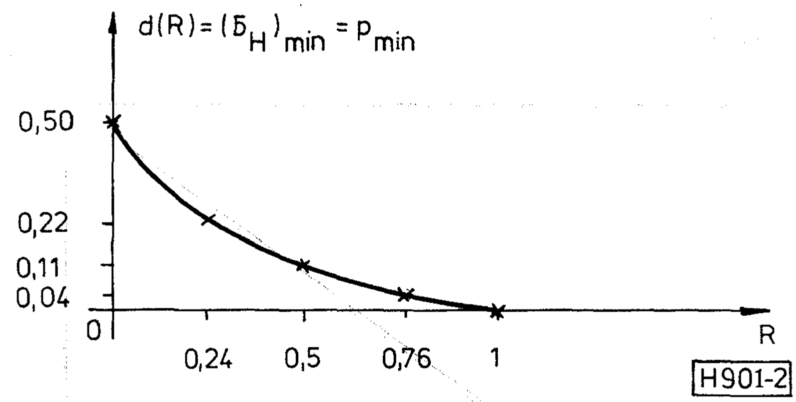
$$[d(R)]_{max}=d(0)=p_{max}=1/2.$$

(Ha a forrás $P(0)=P(1)=1/2$ valószínűséggel bocsát ki 0, ill. 1 szimbólumokat, de egyetlen bitet sem viszünk át — azaz $R=0$ —, hanem pl. csupa nullát „dekódolunk", a biteknek átlagosan a felét helyesen kapjuk meg, tehát $p_{max}=1/2$.)

Végül: d(R) R monoton, nem növekvő függvénye. (Mivel inverze, az $R(d)$ egy előírt $d(P)=p_{min}$-nak monoton, nem csökkenő függvénye.)



1. ábra. Modell a rátatorzítás értelmezéséhez



2. ábra. A rátatorzítás függvény jellege (7) alapján

(6)-ot és d(R) megemlített tulajdonságait (az információelmélet alaptételeinek ismeretében) „evidenciáknak" tekintjük. (Azonban bizonyításuk is megtalálható, mégpedig általános $\overline{D}$ rátatorzításra, [8]-ban.)

d(R)-re kvantitatív kifejezést nyerhetünk pl. a következő gondolatmenettel:

Az 1. ábrán feltüntetett zajmentes csatorna és az R mértékű bitredukciót megvalósító kódoló együttesen egy zajos csatornának tekinthető, $p_{\min}>0$ bithibaaránnyal (ha $R<1$). A teljes rendszer maximális hatásfoka: $C'=R$, hiszen az X forrás minden kibocsátott bitjének az átvitelére (átlagosan) R bit áll rendelkezésre. Ezzel, valamint (3) és (4) felhasználásával:

$$R=1-\left[p_{\min}\log_2\frac{1}{p_{\min}}+(1-p_{\min})\log_2\frac{1}{1-p_{\min}}\right]$$

Ebből pedig:

$$p_{\min}\log_2\frac{1}{p_{\min}}+(1-p_{\min})\log_2\frac{1}{1-p_{\min}}=1-R \qquad (7)$$

(7)-ből adott R-hez $p_{\min}$, adott $p_{\min}$-hoz R számítható. A (7) alapján kiszámított d(R) függvény menetét a 2. ábrán láthatjuk.

(7) bal oldalán az ún. bináris entrópiafüggvény áll. A számításokat megkönnyíti, hogy e függvényre az irodalomban táblázatok találhatók. (L. pl. [9]. 83. old.)

(6)-ból pedig tudjuk, hogy

$$d(R)=p_{\min}$$

Például $R=1/2$-hez (50%-os bitkompresszió), s ezzel a bináris entrópia függvény 0,5-ös értékéhez (az említett táblázatból lineáris interpolációval)

$$(\overline{D}_H)_{\min}=d(R)=p_{\min}=0{,}11$$

(11%-os impulzus hibaarány).

Ehhez még meg kell találni a megfelelő kódolási eljárást. Viszont eredményünk közvetlenül is hasznosítható, ha adva van már a kódolási–dekódolási eljárás, s azt kell megítélnünk, hogy az mennyire jár közel az optimálishoz. Egy célszerűnek tűnő eljárás lehet pl. a következő:

minden K db bitből RK-t változtatás nélkül bitenként átviszünk, a további $(1-R)K$ bitet pedig nullákkal helyettesítjük a dekódolás során (50%-os találati esély!). Így K bitből átlagosan $\frac{1}{2}(1-R)K$ lesz hibás. A hibaarány, azaz esetünkben az átlagos Hamming-torzítás:

$$\overline{D}_H=\frac{\frac{1}{2}(1-R)K}{K}=\frac{1}{2}(1-R)$$

Ez $R=1/2$-del $\overline{D}_H=p=\frac{1}{4}$ értéket (25%-os hibaarány) ad.

Tehát a minimumnál (ami egyben az optimum is, ha a költségek és a késleltetési idők különbségétől eltekintünk) több, mint kétszer nagyobb!

3. Bitenkénti minimális energia termikus zajban

A zajos csatorna C' szimbólumkapacitását (3)-mal definiáltuk.

C'-t a v_b átlagos bitsebességgel szorozva a C csatornakapacitást kapjuk:

$$C=v_bC' \quad \left(\frac{\text{shannon}}{\text{másodperc}}\right) \qquad (8)$$

(C azt mutatja meg, hogy az időegység alatt maximum hány bitet lehet megbízhatóan átvinni a csatornán, a hibák ellen védő megfelelő kódolást alkalmazva.)

C-t nemcsak digitális, hanem analóg hírközlő csatornán is értelmezhetjük, s a csatorna két alapvető analóg jellemzőjével, a B (Hz) sávszélességgel és a Pj/Pz (teljesítményekkel kifejezett) jel/zaj viszonyával:

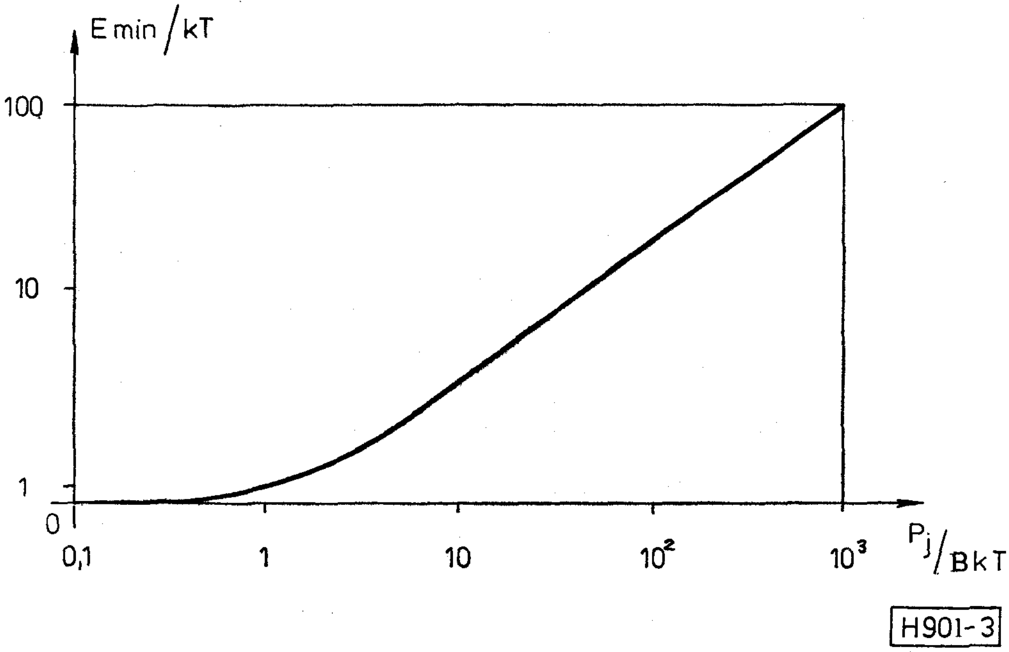
$$C=B\log_2(1+Pj/Pz) \qquad (9)$$

(Az információelmélet e fontos összefüggésének viszonylag egyszerű bevezetését l. pl. [7]-ben.)

(9)-ből kiolvasható az a figyelemreméltó tény, hogy $Pj/Pz<1$ mellett, tehát zajban elmerült jellel is lehetséges a kommunikáció – a sávszélességtől függő, viszonylag kicsiny bitsebességgel.

A hírközlő csatornán átvitt minden bithez (minimálisan) szükséges energia, (9) felhasználásával:

$$E_0=\frac{Pj\,(\text{VA/s})}{C\,(\text{bit/s})}=\frac{Pj}{B\log_2(1+Pj/Pz)} \quad (\text{Ws}) \qquad (10)$$



3. ábra. Egy bit átviteléhez szükséges minimális energia illusztrálása (12) alapján

Legyen a zaj döntő összetevője (amely mellett a többi összetevő elhanyagolható) a termikus zaj. Ismeretes, hogy ennek a termikus zajforráshoz illesztett terhelésen leadott átlagteljesítménye:

$$P_z = P_z\,(\text{term., ill.}) = BkT \qquad (11)$$

ahol: k a Boltzmann-állandó ($1{,}38 \cdot 10^{-23}$ W s/°K),

T a termikus zajforrás hőmérséklete °K-ban.

(11)-et (10)-ben felhasználva:

$$E_0 = \frac{Pj}{B \log_2 (1 + Pj/BkT)} \qquad (12)$$

Válasszuk energiaegységnek kT-t, időegységnek $1/B$-t, s ezzel teljesítményegységnek BkT-t. A kT egységekben kifejezett $E_{\min}$ és a BkT egységekben kifejezett Pj közti összefüggést (12) alapján ábrázolhatjuk, l. a 3. ábrát (amelyet [1]-ből vettünk át).

E_0 értékei a különböző Pj értékek mellett megadják az egy bit átviteléhez szükséges minimális energiát.

Ami (12)-ből (ill. a 3. ábrából) számunkra itt figyelemreméltó: a kT egységekben kifejezett E_0 (Pj csökkenésével) egy véges alsó határhoz, $(E_0)_{\min}$-hoz tart.

Vizsgáljuk meg a $Pj \ll BkT$ reláció következményét. Használjuk fel, hogy

$$\log_2 y = \frac{\log/_e\, y}{\log/_e\, 2} \cong 1{,}4 \log/_e\, y$$

és

$$\log/_e\,(1+x) \cong x, \quad \text{ha} \quad x \ll 1.$$

Fentiekkel, (12)-ből

$$(E_0)_{\min} = \lim_{Pj/BkT \to 0} \frac{Pj}{1{,}4\, B\, Pj/BkT} = \frac{kT}{1{,}4} \cong kT \qquad (13)$$

A $Pj/BkT \to 0$ határátmenet fizikailag nem valósítható meg (már csak az energia kvantált volta folytán sem). Így (13) egyenlőségből egy egyenlőtlenségre jutunk:

$$(E_0)_{\min} > kT \qquad (14)$$

Tehát, ha a termikus zajon kell „áttörni", az egy bit átviteléhez minimálisan szükséges energia kT (Ws) felett van.

(14) a hírközléssel összefüggő további alapvető határt fejez ki, amelyet az információelmélet és a termikus zaj teljesítményére vonatkozó fizikai ismeretek összekapcsolásával derítettek fel.

IRODALOM

[1] *Robert W. Keyes:* Fundamental Limits in Digital Information Processing. (PROCEEDINGS OF THE IEEE, vol. 69, No. 2, FEBRUARY 1981.)

[2] *Stewart D. Personick:* Fundamental Limits in Optical Communication (PROC. IEEE, FEBR. 1981.)

[3] *J. R. Lesh—J. Katz—H. H. Tan—D. Zwillinger:* 2.5 Bit/Detected Photon. (Publikálás helye: IEEE Global Telecommunications Gonference, 1982. nov. 29.—dec. 2. Miami, USA. A konferenciáról beszámolt dr. Frigyes István, HTE, 1983. febr. 9.)

[4] Magyar Tudomány 1982. 11. sz. (E szám az elektronikával és annak hatásaival foglalkozik.)

[5] *Csurgay Árpád:* Korlátok és lehetőségek rendszerek modellezésében. (Előadás az MTA Műsz. T. O. 1983. május 2-i előadássorozatán.)

[6] *Kerpán István:* Az információelmélet alapfogalmairól. (Híradástechnika, 1982. 9. sz.)

[7] *Kerpán István:* A hírközlő csatorna kapacitása. (Híradástechnika, 1982. 5. sz.)

[8] *Aaron D. Wyner:* Fundamental limits in Information Theory (PROC. IEEE, FEBR. 1981.)

[9] Távközléstechnikai kézikönyv. Főszerk. dr. Izsák Miklós (Műszaki Könyvkiadó, 1979.)