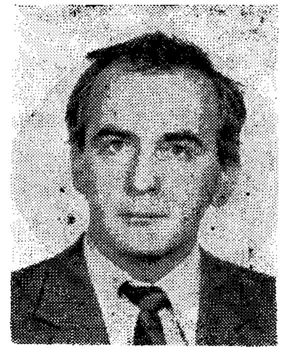
Végtelen impulzusválaszú szűrők megvalósítása súlyfüggvény csonkolással és rekurzív hibakompenzálással

DR. SIMON GYULA
BME Híradástechnikai Elektronika Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

Bármely z-tartománybeli rekurzív átviteli karakterisztikához végtelen számú egyenértékű függvény rendelhető, ezek kanonikus megvalósításban speciális topológiai elrendezésűek. A konvergenciasebesség, a stabilitás és a nevezőérzékenység kérdéseiről is szó esik (#)

DR. SIMON GYULA

1939-ben született. 1964-ben a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kar Gyengeáramú szakon okleveles villamosmérnöki diplomát szerzett. A BME Híradástechnikai Elektronika Intézetében oktat. 1971-ben írt egyetemi doktori értekezése műveleti erősítőkkel foglalkozott (SLEW RATE, Zaj). Publikációi analóg és mintavételes áramkörökkel kapcsolatosak. Pollák—Virág díjat 1972-ben és 1979-ben kapott.

1. A módszer lényege

1.1. Bevezetés

Sok publikáció foglalkozik lineáris fázisú és minimál fázisú transzverzális mintavételes szűrők tervezésével (pl. [1], [2], [3]). Az előírások teljesítéséhez általában nagy fokszám szükséges és ez egyrészt a számítógépes eljárások numerikus pontosságával kapcsolatban jelenthet problémát, másrészt toleranciaérzékenység szempontjából kedvezőtlen.

Rekurzív szűrőknél más a helyzet. A tervezés visszavezethető analóg referenciaszűrő tervezésére [1]. Adott amplitúdókarakterisztika előírás teljesítéséhez sokkal kisebb fokszám szükséges, mint transzverzális szűrőknél. A nevező együtthatóinak abszolút értéke azonban általában nagy, a gyökök a z-síkon közel vannak az egységsugarú körhöz. Az analóg késleltetőláncok elsősorban közvetlen kanonikus elrendezésű megvalósításokra alkalmasak. Ilyenkor az együttható toleranciái közvetlenül befolyásolják a szűrőkarakterisztika névlegestől való eltérését. Ha az együtthatók abszolút értéke nagy, az érzékenység is nagy. A nevezővel kapcsolatban ez könnyen instabilitáshoz, oszcillációhoz is vezethet.

A fentiek alapján felmerülhet az a gondolat, hogy érdemes olyan transzverzális-rekurzív megoldásokat keresni, melyek nevezőérzékenységi tulajdonságai kedvezőbbek, mint a szokásos rekurzív szűrőké, de kevesebb elemi késleltetőt (kisebb fokszámot) igényelnek, mint a tisztán transzverzális szűrők. Az ilyen irányú próbálkozásaink alapja most a súlyfügvény.

Megjegyzés: a továbbiakban egyszerűség kedvéért az A, M, N, E(n), S(n) és $F(n)$ függvények z^{-1} változóját nem jelezzük.

1.2. Alaptulajdonságok

Tételezzük fel, hogy egy $A=M/N$ rekurzív transzfer függvény megvalósítása a cél, ahol M-nek és N-nek nincsenek közös gyökei. A szűrő végtelen impulzusválaszú, vagyis a súlyfüggvény végtelen számú együtthatóval rendelkezik. Ha a súlyfüggvényt -n fokszámnál csonkoljuk, a véges sor az adott fokszám mellett négyzetes értelemben optimális közelítése az eredeti frekvenciakarakterisztikának (Fourier-sor).

A továbbiakban csak a nevezővel kapcsolatos kérdésekkel foglalkozunk, azt vizsgáljuk, hogy az $1/N$ függvényt hogyan lehet egyenértékűen helyettesíteni. Az M számlálót vagy külön kaszkád transzverzális szűrővel valósíthatjuk meg, vagy meg kell szorozzuk az $1/N$-nel egyenértékű kifejezés számlálójával (lásd S(n)-et a (4) egyenletben). Utóbbi esetben az $A=M/N$ egyenértékű megvalósítása egyetlen szűrővel is lehetséges.

Az $1/N$-re vonatkozó súlyfüggvény $k(0)=1$ választással:

$$\frac{1}{N}=1+\sum_{m=1}^{\infty}k(\mathrm{m})z^{-m} \tag{1}$$

Ha (1)-et m=n után csonkoljuk és bevezetjük az $E(n)$ hibafüggvényt, az egyenlőség megmarad:

$$\frac{1}{N}=1+\sum_{m=1}^{n}k(m)z^{-m}+\frac{E(n)}{N} \tag{2}$$

Átrendezés után:

$$\frac{1-E(\mathrm{n})}{N}=1+\sum_{m=1}^{n}k(\mathrm{m})z^{-m}=S(n) \tag{3}$$

Végül:

$$\frac{1}{N}=\frac{1+\sum_{m=1}^{n}k(\mathrm{m})z^{-m}}{1-E(\mathrm{n})}=\frac{S(\mathrm{n})}{F(\mathrm{n})} \tag{4}$$

Változtatva n értékét összetartozó S(n) számlálók és F(n) nevezők végtelen számú párjait kapjuk, melyek egyenértékűek $1/D$-vel. A végtelen számú lehetőség közül két határeset jól ismert, ezek az (1) egyenletben is szerepelnek: az n=0-hoz tartozó az egyenlet bal oldalán, míg az n=∞-nek megfelelő eset az egyenlet jobb oldalán. $F(n)$ gyökei mind $S(n)$, mind N gyökeit tartalmazzák. A súlyfüggvény meghatáro-

Beérkezett: 1983. V.18.

zása sokféleképpen lehetséges (pl. hosszú osztás vagy [4] módszere).

Ha a véges transzverzális közelítés fokszámát eggyel növeljük, akkor csak egy újabb együtthatót kell bevonjunk a közelítésbe, vagyis

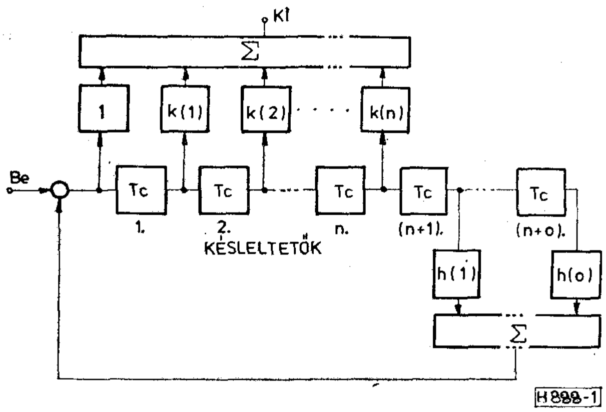
$$S(\mathrm{n}+1)=S(\mathrm{n})+k(\mathrm{n}+1)z^{-(n+1)} \tag{5}$$

N fokszámát o-val jelölve $E(n)$-nek csak a $-(\mathrm{n}+1)\ldots(\mathrm{n}+\mathrm{o})$ fokszámtartományban vannak véges együtthatói. Ez a függvény vagy az n-ed fokig végzett osztás maradékaként határozható meg, vagy az alábbi összefüggés segítségével:

$$F(\mathrm{n})=1-E(\mathrm{n})=N\cdot S(\mathrm{n}) \tag{6}$$

Ha $S(n)$ minimál fázisú, akkor $1/F(\mathrm{n})$ stabil és viszont. (4) alapján belátható, hogy a $-E(\mathrm{n})$ függvényt hurokerősítésként is értelmezhetjük.

Eddigi megfontolásaink két lehetőséget vetnek fel. Az egyik: $E(n)$ hatását n-et megfelelően nagyra választva tegyük elhanyagolhatóvá. Ekkor az $1/N$ függvényt kellő pontossággal közelíthetjük a tisztán transzverzális $S(\mathrm{n})$ függvénnyel. A gyakorlati esetekben azonban az ehhez szükséges n értékek túlságosan nagyok. A másik lehetőség az, hogy az $F(\mathrm{n})=1-E(n)$ függvényt nem közelítjük 1-gyel, hanem a teljes $S(n)/F(n)$ függvény megvalósítását tűzzük ki célul. Az $S(\mathrm{n})/F(\mathrm{n})$ alak a közvetlen kanonikus elrendezés szempontjából igen előnyös, mert $n\geq \mathrm{o}$ esetén az első n késleltetőt csak előrecsatolásra, a további o késleltetőt csak visszacsatolásra kell felhasználjuk (1. ábra). n értékének megválasztásánál természetesen ügyelni kell arra, hogy $1/F(\mathrm{n})$ stabil legyen.



1. ábra. Egyenértékű kanonikus elrendezés

2. A módszer jellemzői

A (4) és (6) egyenletek az egyenértékű megoldások teljes rendszerének meghatározására alkalmas végképleteknek tekinthetők. Nem szóltunk eddig azonban semmit arról, vajon n tényleges értékét milyen szempontok szerint kell megválasszuk. Az alábbi minőségi vizsgálat feltételezi N gyökeinek ismeretét. A folytonos referenciaszűrő gyökeiből a mintavételes rendszer gyökeit például [5] módszerének alkalmazásával kaphatjuk.

2.1. A konvergenciasebesség vizsgálata

Írjuk át $1/N$-et résztörtekre bontott alakba:

$$\frac{1}{N}=\sum_i\left(\frac{A(i)}{1-d(i)z^{-1}}+\frac{\overline{A(i)}}{1-\overline{d(i)}z^{-1}}\right) \tag{7}$$

ahol $d(i)=\mathrm{r}(i)\exp[\mathrm{j}\varphi(i)]$ és $\overline{d(i)}$ N konjugált komplex pólusai a z-síkon, míg $A(i)=|A(i)|\exp\{\mathrm{j}\varphi[A(i)]\}$ és $\overline{A(i)}$ ezek komplex együtthatói. A többszörös gyökpárok és a valós gyökök esetével az egyszerűség kedvéért most nem foglalkozunk.

Ha átrendezzük az i-edik póluspárra felírható hatványsorokat, akkor az alábbi eredményt kapjuk:

$$\frac{A(i)}{1-d(i)z^{-1}}+\frac{\overline{A(i)}}{1-\overline{d(i)}z^{-1}}=2|A(i)|\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{\infty}[r(i)]^m\cos\{\varphi[A(i)]+m\varphi(i)\}z^{-m} \tag{8}$$

(8) alapján az i-edik gyökpár hozzájárulása a $-m$ kitevőjű együtthatóhoz:

$$k(m,i)=2|A(i)|[\mathrm{r}(i)]^m\cos\{\varphi[A(i)]+m\varphi(i)\} \tag{9}$$

A $k(m, i)$ függvény burkolója valamely kiválasztott i index mellett a gyök sugarától függ elsősorban:

$$\text{BURKOLÓ}\,[k(m,i)]\sim[\mathrm{r}(i)]^m \tag{10}$$

Az n feletti kitevőjű tagok elhanyagolásának hatása is becsülhető felülről:

$$\frac{\text{HIBA}(i)}{2|A(i)|}=\left.\sum_{m=n+1}^{\infty}k(\mathrm{m},i)z^{-m}\right|_{z=\exp(j\omega T_c)}\leq$$

$$\leq\sum_{m=n+1}^{\infty}[r(i)]^m=\frac{[\mathrm{r}(i)]^{n+1}}{1-\mathrm{r}(i)} \tag{11}$$

Az m indexhez tartozó $k(m, i)$ részegyütthatók összege $k(\mathrm{m})$-et adja. m növelésével valamennyi részegyüttható nullához tart ($\mathrm{r}(i)$ stabilitási okokból egynél kisebb). A konvergencia sebessége az érintett pólus sugarától függ. Minthogy a leglassúbb konvergencia a legnagyobb sugarú gyököknél jelentkezik, az összeg $m\gg 1$ együtthatói gyakorlatilag megegyeznek a leglassúbb konvergenciával rendelkező gyökökhöz tartozó részegyütthatókkal.

Vegyünk egy számpéldát. Ha az i-edik gyökre előírjuk, hogy az $\mathrm{n}=30$-hoz tartozó együtthatójának burkolóértéke 1%-a legyen az $\mathrm{n}=0$-hoz tartozónak, akkor $\mathrm{r}(i)$ legfeljebb 0,862 lehet és $\text{HIBA}(i)/2|A(i)|\leq$ $\leq 8\%$.

A hibafüggvény az alábbi alakú:

$$E(\mathrm{n})=\sum_{p=1}^{o}h(\mathrm{n},p)z^{-p-n} \tag{12}$$

A (6) egyenlet szerint a $h(n, p)$ együtthatók meghatározhatók úgy, hogy N-et megszorozzuk $S(n)$-nek a $-(\mathrm{n}-\mathrm{o}+1)\ldots-\mathrm{n}$ kitevőtartományban „ablakolt" részével és kiválasztjuk ebből a $-(\mathrm{n}+1)\ldots-(\mathrm{n}+\mathrm{o})$ kitevőkhöz tartozó, így nullától különböző eredő együtthatókat. $E(\mathrm{n})$-re más alakú kifejezést is származtathatunk, ha észrevesszük, hogy a (7) összefüggés minden tagja egy-egy mértani sorral egyenértékű. Megfelelő átrendezés után:

$$E(n)=z^{-n-1}N\sum_i \frac{k(n+1,i)-[r(i)]^2k(n)z^{-1}}{[r(i)]^2-2r(i)\cos\varphi(i)z^{-1}+1} \quad (13)$$

Az $F(n)$ nevező függvény frekvenciatartománybeli relatív érzékenysége a $h(n, p)$ együtthatókra:

$$S_{h(n,p)}^{F(n)}=\left.\frac{-h(n,p)z^{-n-p}}{F(n)}\right|_{z=\exp(j\omega T_c)} \quad (14)$$

n növelésével $|k(n+1)|$ és $|k(n)|$ nullához tartanak, így (13) alapján $h(n, p)$ szintén, ami $\lim_{n\to\infty} F(n)=1$ figyelembevételével

$$\lim_{n\to\infty} |S_{h(n,p)}^{F(n)}|=0 \quad (15)$$

eredményre vezet.

2.2. *Néhány megjegyzés*

Az analóg referenciaszűrő pólusainak jósági tényezője lehető kicsi legyen annak érdekében, hogy a z-sík pólusai a transzformáció után messze kerüljenek az egységsugarú körtől [5]. Hasonló okokból az órajelfrekvencia is lehető kicsi legyen, mert az órajelfrekvencia növelésének hatására a szingularitások az egységsugarú körhöz közelebbi helyekre transzformálódnak. Minél kisebb a z-síkon a pólusok sugara, annál nagyobb a konvergenciasebesség, ezért n szükséges értéke kisebb lesz.

A z^{-1}-síkon a pólusok távolsága lehető nagy legyen, hogy az együtthatók abszolút értéke kicsi legyen.

A 2.1. alfejezet összefüggései a kvalitatív tájékozódást segítik. Gyakorlati számolásra az 1.2. alfejezet képletei jobban használhatók, mert egyszerűbbek.

A kis érzékenységű $F(n)$ miatt nagy árat kell fizessünk: a késleltetőelemek száma nagy lesz ($n+o$ az eredeti o helyett) és az $S(n)$ számláló véges együttható érzékenységű, magas fokszámú az eredeti konstans helyett. Az $S(n)/F(n)$ tört természetesen redundáns és egyszerűsítéssel $1/N$ alakra hozható.

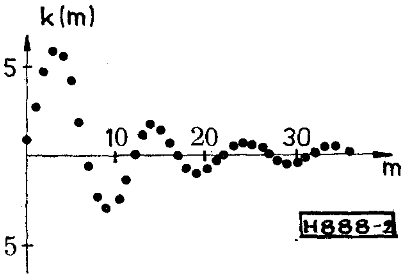
3. Gyakorlati példa

0...3 kHz-es áteresztőtartományú és 4,6 kHz-en kezdődő zárótartományú aluláteresztőt tervezünk 32 kHz-es órajelfrekvenciával. Cauer referenciaszűrőt választva [6] alapján: C 04256; $\Theta=42$. Az áteresztőtartománybeli ingadozás 0,28 dB, a zárócsillapítás 33,5 dB.

A z-tartományban az alábbi transzfer függvényt kapjuk:

$$\frac{M}{N}=\frac{1-1{,}153z^{-1}+z^{-2}}{1-1{,}385z^{-1}+0{,}530z^{-2}}\cdot\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-1{,}490z^{-1}+0{,}837z^{-2}}$$

A pólusok sugara a z-síkon: 0,728 és 0,915; a konvergenciasebességet az utóbbi határozza meg döntően. $1/N$-re vonatkozóan a $k(m)$ függvényt a 2. ábra mutatja.



2. ábra. A példa nevezőjéhez rendelhető súlyfüggvény

n minden értékéhez o számú $h(n, p)$ együttható tartozik. Néhány kiválasztott esetet az alábbi táblázat tartalmaz. Az első oszlopban S stabil, I instabil függvényre utal. $n=36$ felett minden eset stabil.

	n	$h(n, 1)$	$h(n, 2)$	$h(n, 3)$	$h(n, 4)$
S	0	2,875	−3,432	1,950	−0,444
I	6	−0,532	−0,765	1,801	−0,839
S	21	0,000	0,456	−0,630	0,240
S	27	−0,269	0,346	−0,106	−0,014
I	30	−0,256	0,699	−0,612	0,182
S	31	−0,038	0,267	−0,317	0,114
S	36	0,035	0,193	0,219	−0,077

$n=27$ megfelelően kis érzékenységű stabil megoldás. Ez azt jelenti, hogy 31 késleltetővel az $1/N$ vagy az $A=M/N$ transzfer függvénnyel egyenértékű karakterisztikájú szűrő készíthető.

Néhány szót érdemes szólni azokról a kritériumokról, melyek alapján a stabilitás vagy az instabilitás eldönthető volt (ezek elégséges, de nem szükséges feltételek).

Instabil biztosan a rendszer, ha $z^{-1}=1$ vagy $z^{-1}=-1$ helyettesítésre n adott értéke mellett $E(n)\geq 1$.

Stabil a rendszer, ha n adott értéke mellett bármely frekvencián $z=\exp(j\omega T_c)$ helyettesítés után $|E(n)|<1$.

Stabil a rendszer, ha n adott értéke mellett $\sum_p |h(n, p)|<1$.

IRODALOM

[1] *Sallai Gy.:* A digitális szűrők tervezésének alapelvei. Híradástechnika, 1976. szeptember, XXVII/9, 257—268.

[2] *Sallai Gy.:* Direkt módszerek véges memóriájú digitális szűrők tervezéséhez. Híradástechnika, 1978. október, XXIX/10, 289—296.

[3] *Hanzó L., Hinzenkamp L.:* Véges számú pontban előírt FIR szűrű tervezése. Híradástechnika, 1980. november XXXI/11, 409—414.

[4] *L. B. Jenkins:* A useful recursive form for obtaining inverse z-transform. Proc. IEEE, Vol. 55, pp. 574—575, Apr. 1967.

[5] *Gy. Simon:* Design constraints of analog sampling filters. Proc. SSCT 1982, Short contributions, pp. 149—153, Prague, July 1982.

[6] *R. Saal:* Handbuch zum Filterentwurf. AEG-Telefunken, 1979.

[7] *Gy. Simon:* A double approximation approach to minimum phase transversal filters and its application to a new structure of recursive filter realization. Proc. ECCTD '83, 1983 (megjelenés alatt).