

HÍRADÁSTECHNIKA

Tört áramkörszám gyors meghatározásának egy közelítő módszere

DR. TÓTH ENDRE
Postai Tervező Intézet

Ismeretes, hogy ideális távbeszélő áramkörü csoportokban a veszteségi tényezőt az Erlang-képlettel lehet meghatározni:

$$E_{1,N}(A) = \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} \quad (1)$$

ahol:

A az ideális csoportnak felajánlott véletlen forgalom (erlangban),
 N az ideális csoport áramkörszáma,
 $E_{1,N}(A)$ a veszteségi tényező (N áramkörszám és A felajánlott forgalom mellett).

Számítógépen a képletet közvetlenül csak viszonylag nagy gépidő felhasználásával lehet kiszámítani.

Helyette jobban alkalmazható az alábbi rekurziós képlet:

$$E_{1,N+1}(A) = \frac{E_{1,N}(A) \cdot A}{N+1 + E_{1,N}(A) \cdot A} \quad (2)$$

A rekurzió kiinduló képlete:

$$E_{1,0}(A) = 1. \quad (3)$$

Az Erlang-képletben N egész szám, hiszen az áramkörszám csak egész lehet.

A távbeszélő-forgalomelméletben azonban gyakran előfordul, hogy fiktív, tört áramköröket kell bevezetni. Ilyen esetek lehetnek az alábbiak.

1. ERT-módszer egyenértékű áramkörszáma

Ismeretes, hogy N áramkörnek felajánlott A véletlen forgalom esetén a túlsorduló forgalom átlagát (M), illetve szórásnégyzetét (V) az alábbi képletekkel lehet kiszámítani:

$$M = E_{1,N}(A) \cdot A, \quad (4)$$

$$V = M \left(1 - M + \frac{A}{1 + N + M - A} \right). \quad (5)$$

A szórásnégyzet és az átlagérték hányadosát csússzossági tényezőnek (Θ) nevezik.

$$\Theta = \frac{V}{M} = 1 - M + \frac{A}{1 + n + M - A}. \quad (6)$$

Véletlenszerű forgalomra $\Theta = 1$. Túlsorduló forgalom esetén $\Theta > 1$, míg az úgynevezett simított forgalomra $\Theta < 1$.

A Wilkinson-féle Equivalent Random Theory (egyenértékű véletlenszerűség elmélete, ERT) módszer szerint több forgalmi nyalábról egy közös nyalábra túlsorduló forgalom esetén először a túlsorduló forgalmak átlagát és szórásnégyzetét összegezni kell.

$$M_e = \sum_i M_i, \quad (7)$$

$$V_e = \sum_i V_i. \quad (8)$$

Az ERT módszer szerint lehet találni egyetlen olyan véletlenszerű forgalmat (A^*), illetve áramkörszámot (n^*), amelyekhez tartozó átlagérték M_e -vel, szórásnégyzet pedig V_e -vel egyenlő, tehát fennáll, hogy

$$M_e = E_{1,n^*}(A^*) \cdot A^*, \quad (9)$$

$$V_e = M_e \left(1 - M_e + \frac{A^*}{1 + n^* + M_e + A^*} \right). \quad (10)$$

Könnyen belátható, hogy n^* általában csak tört értékű lehet.

2. Rapp-módszer utolsó választású áramkörszáma

Az automata kapcsolású trunk hálózatot általában haránt irányú összeköttetéseket tartalmazó hálózatként célszerű kiépíteni. Ebben a hálózatban — a csillagrendszerű hálózathoz hasonlóan — a tranzit központok különböző hálózati síkokon helyezkednek el, s a magasabbrendű hálózati sík(ok) központjait általában egy vagy több alacsonyabb rendű központtal kötik össze. Ezek az utolsó választású összeköttetések.

A tranzit központok között, elegendő nagy forgalom esetén, közvetlen (úgynevezett haránt) összeköttetéseket is célszerű létesíteni.

A haránt összeköttetéseken általában a felajánlott forgalom egy részét gazdaságos lebonyolítani. A fennmaradó (túlsorduló) forgalmat a magasabb rendű haránt, illetve utolsó választású összeköttetések bonyolítják le.

A haránt típusú hálózatok méretezését a Rapp-módszer alapján lehet elvégezni. A haránt összeköttetések áramkörszámát addig kell változtatni, amíg

egy bizonyos előírt átlag veszteségi tényező mellett minimális összköltségű hálózathoz nem jutunk.

A Rapp-módszerrel való számítások az utolsó választású áramkörök méretezésénél szintén be kell vezetni a fiktív tört áramkörszámot. A minimalizálás éppen abból adódik, hogy a haránt áramkörök számának növelésekor jobban kihasznált utolsó választású áramkörök látszólagos csökkenése 1-nél kisebb lesz, s az optimumon túl való növelés esetén a csökkenés olyan kis mértékű, hogy a drágább, utolsó választású áramkörök költségcsökkenése már kisebb lesz, mint a haránt áramkörök költségnövekedése.

Az előzőkből látható a tört áramkörök bevezetésének szükségszerűsége. A továbbiakban nézzük meg a tört áramkörök veszteségi tényezője kiszámításának módját.

Bebizonyítható, hogy tört áramkörszám esetén is igaz a (2) képlet az alábbi átalakítással:

$$E_{1, x+1}(A) = \frac{E_{1, x}(A) \cdot A}{x + i + E_{1, x}(A) \cdot A}, \quad (11)$$

ahol:

x tetszőleges pozitív tört szám, s a kezdőérték 0 és 1 közé esik.

Ugyancsak bebizonyítható, hogy az

$$E_x(A) = \frac{A^x \cdot e^{-x}}{\int_A^\infty t^x \cdot e^{-t} dt} \quad (12)$$

képlet a (11) rekurziós képlet valamennyi x értékét kielégíti.

Numerikus számításokhoz a (12) képlet nem kényelmes, mert a nevezője a nem teljes Γ -függvényt tartalmazza.

$$\int_A^\infty t^x \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t} dt - \int_0^A t^x \cdot e^{-t} dt = \Gamma(x+1) - \Gamma(x+1, A).$$

Az irodalom szerint a kezdeti képletet jól közelíti az alábbi képlet:

$$E_\lambda = C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda^2, \quad (13)$$

ahol:

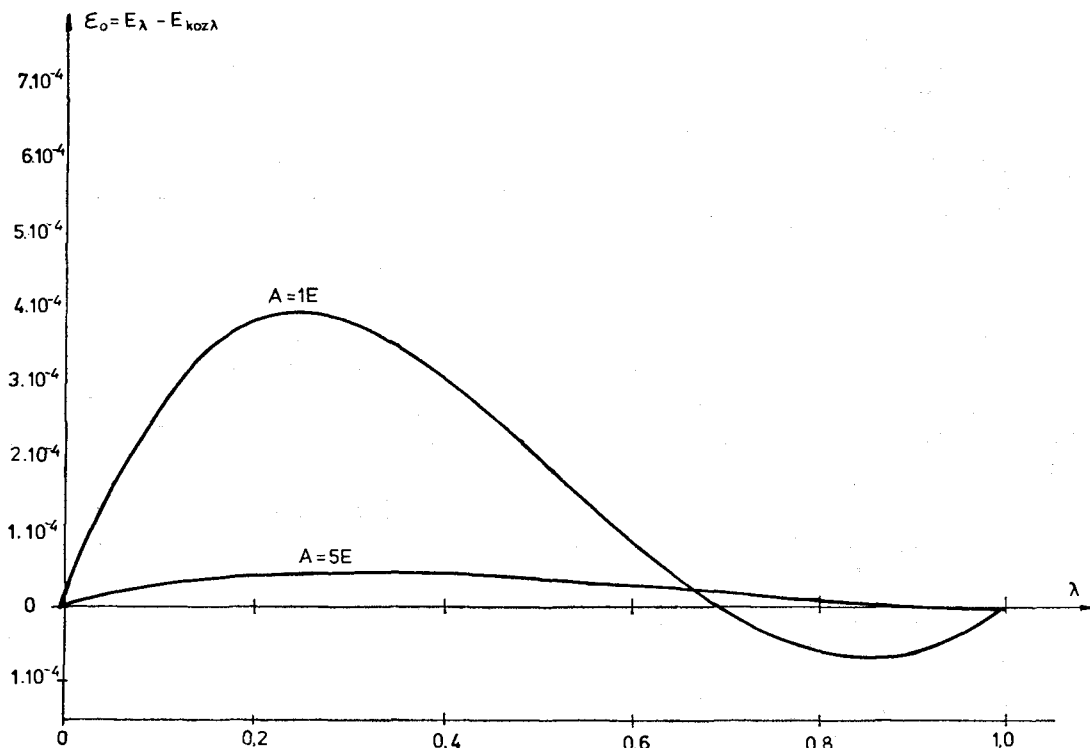
$$C_0 = 1, \quad (14)$$

$$C_1 = -\frac{A+2}{(1+A)^2 + A}, \quad (15)$$

$$C_2 = \frac{1}{(1+A)[(1+A)^2 + A]}. \quad (16)$$

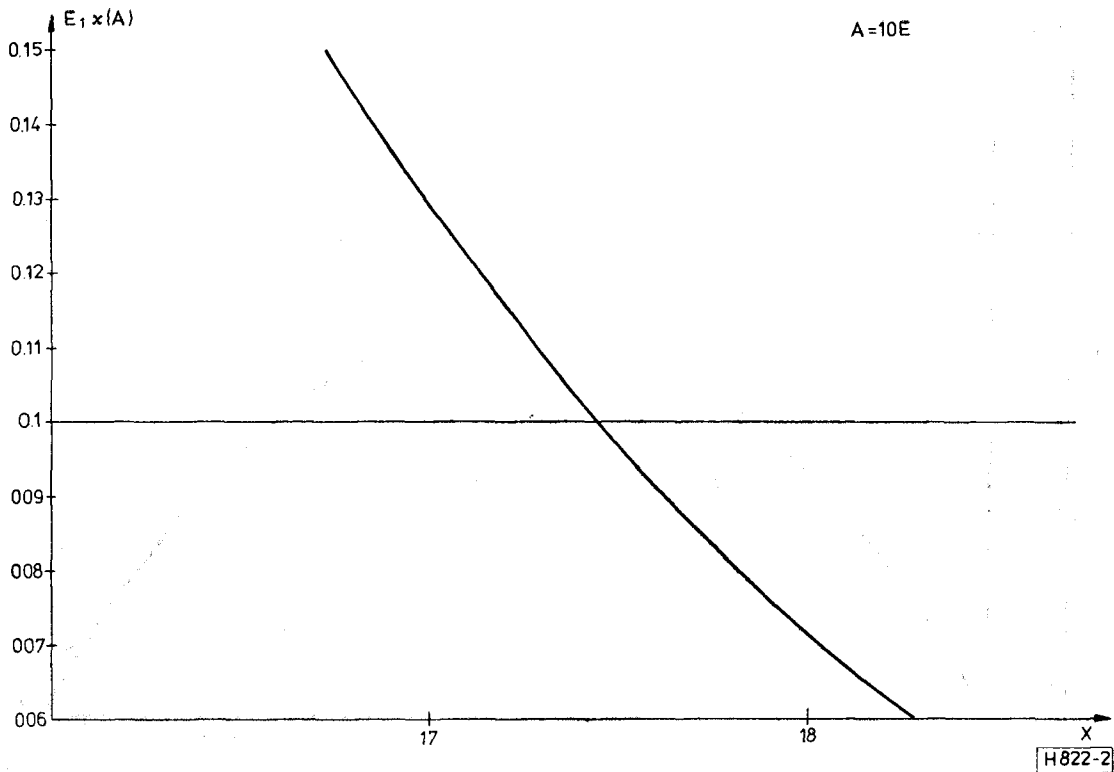
Az 1. ábrán látható a pontos és a közelítő veszteségi tényező különbsége 0–1 áramkörszám tartományban 1E, illetve 5E felajánlott forgalom mellett. Az ábrából látható, hogy a forgalom növekedésével a pontos és a közelítő veszteségi tényező különbségének maximuma csökken (10E forgalom esetén a különbség maximum csak $4,47 \cdot 10^{-6}$).

Az áramkörszám növelésével (tehát a rekurzió al-



H822-1

1. ábra. A pontos és a közelítő veszteségi tényező különbsége



2. ábra. Az Erlang-görbe menete a vizsgált tartományban

kalmazásával) a hiba csökken. Ezt az alábbi módon bizonyíthatjuk.

Tegyük fel, hogy az n -edik rekurzió relatív hibája ε_n . Ebben az esetben a rekurziós képletet az alábbi alakban lehet felírni:

$$\begin{aligned}
 (1 + \varepsilon_{n+1})E_{n+1+\lambda} &= \frac{A(1 + \varepsilon_n)E_{n+\lambda}}{n+1+\lambda + A(1 + \varepsilon_n) \cdot E_{n+\lambda}} = \\
 &= \frac{A \cdot (1 + \varepsilon_n)E_{n+\lambda}}{n+1+\lambda + A \cdot E_{n+\lambda} + A \cdot \varepsilon_n \cdot E_{n+\lambda}} = \\
 &= \frac{A \cdot E_{n+\lambda}}{n+1+\lambda + A \cdot E_{n+\lambda}} \cdot \frac{1 + \varepsilon_n}{1 + \frac{\varepsilon_n \cdot A \cdot E_{n+\lambda}}{n+1+\lambda + A \cdot E_{n+\lambda}}} = \\
 &= E_{n+1+\lambda} \cdot \frac{1 + \varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n E_{n+1+\lambda}}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Mindkét oldalt $E_{n+1+\lambda}$ -val elosztva kapjuk, hogy

$$1 + \varepsilon_{n+1} = \frac{1 + \varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n E_{n+1+\lambda}}. \quad (18)$$

Ha $\varepsilon_n \geq 0$, akkor $1 + \varepsilon_{n+1} \leq 1 + \varepsilon_n$,

ha $\varepsilon_n \leq 0$, akkor $1 - |\varepsilon_{n+1}| \geq 1 - |\varepsilon_n|$,

tehát

$$|\varepsilon_{n+1}| = |\varepsilon_n|, \quad (19)$$

amit bizonyítani akartunk.

Az előzőkből látható, hogy a közelítő képlet a gyakorlatban előforduló forgalomtartományban jól

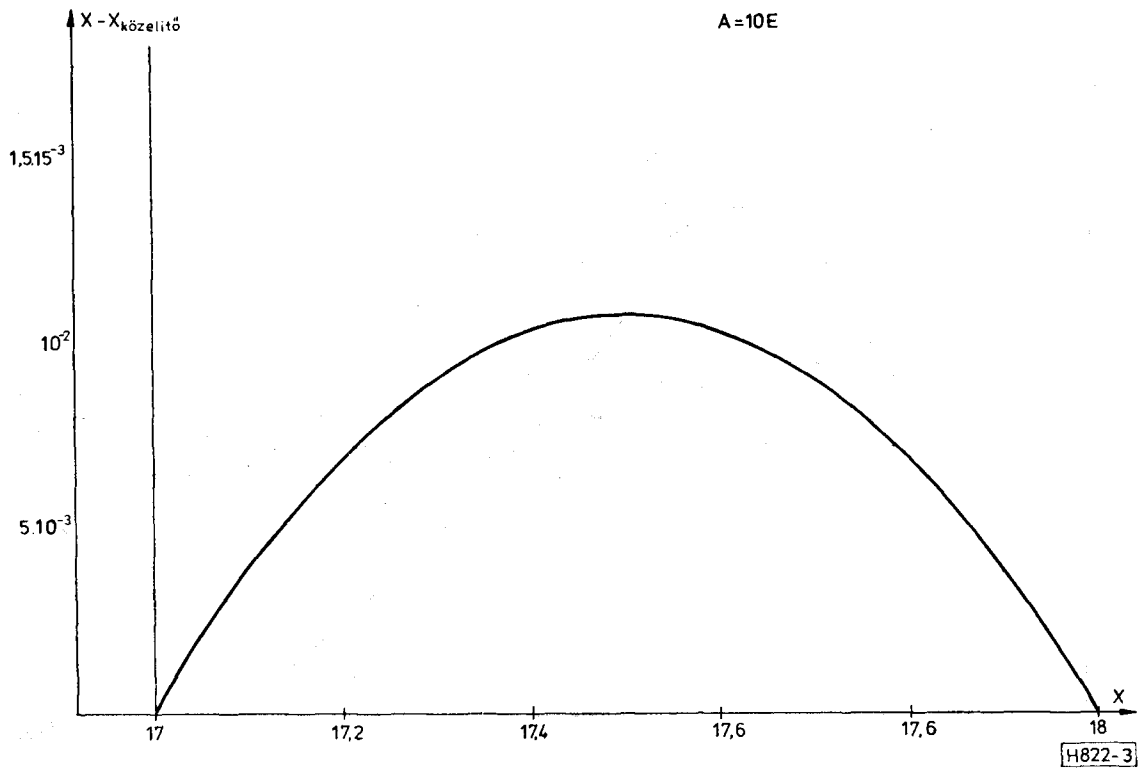
megközelíti a pontos képletet, tehát nyugodtan használhatjuk a hosszadalmasan számítható pontos képlet helyett.

Az Erlang-képlet a veszteségi tényezőt fejezi ki a felajánlott forgalom és az áramkorszám függvényeként. A gyakorlatban viszont általában az áramkorszámot kell kiszámítani a forgalomból és a veszteségi tényezőtől, amit csak közelítő módon lehet meghatározni a (11) és a (13)–(16) képletek többszöri alkalmazásával.

Egy 80 tranzit központból álló trunk-hálózatnál a Rapp-módszer alkalmazásához körülbelül félmillió esetben kell az utolsó választású áramkörök számának meghatározásához az előzőekben ismertetett módszert alkalmazni. Számítógépes számításnál az optimalizálási program futásidejének a jelentős részét ezen számítás gépideje teszi ki. Felmerül tehát az igény egy olyan közelítő módszer iránt, amely legalább nagy forgalmaknál, illetve az ezekből adódó nagy áramkorszámoknál (ahol sok a rekurzió) lehetőleg kevés közelítő lépés alkalmazásával az előírt pontossággal meghatározza az áramkorszámot.

A cél érdekében nézzük meg először az Erlang-görbét $10E$ felajánlott forgalom mellett, 17 – 18 áramkör között (1% -os veszteségi tényező esetén 2. ábra).

Az ábrából látható, hogy a görbe alakja megközelítőleg exponenciális jellegű. Ez következik a (12) képletből is. Az e^{-A} tényező nem függ az áramkorszámától, az A^x tényező exponenciális függvény, míg a nevező nagy áramkorszámnál szintén exponenciális jellegű.



3. ábra. A hibagörbe alakja

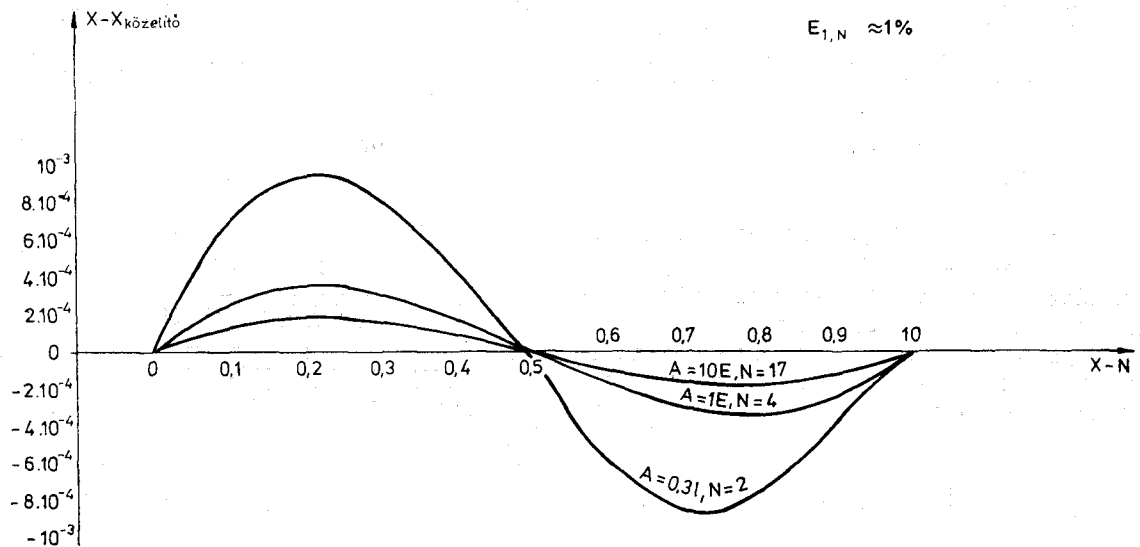
Közelítsük a 2. ábra görbét exponenciális görbével! Az ábra tört áramkörzámaihoz tartozó veszteségi tényezőkhöz számítsuk ki a közelítő görbe alapján a közelítő áramkörzámokat! A tényleges és a közelítő áramkörzámok különbségét a 3. ábra mutatja.

A 3. ábrából látható, hogy a legnagyobb különbség $x=17,5$ -nél van, s az értéke $0,010\ 7379$. Ez az érték

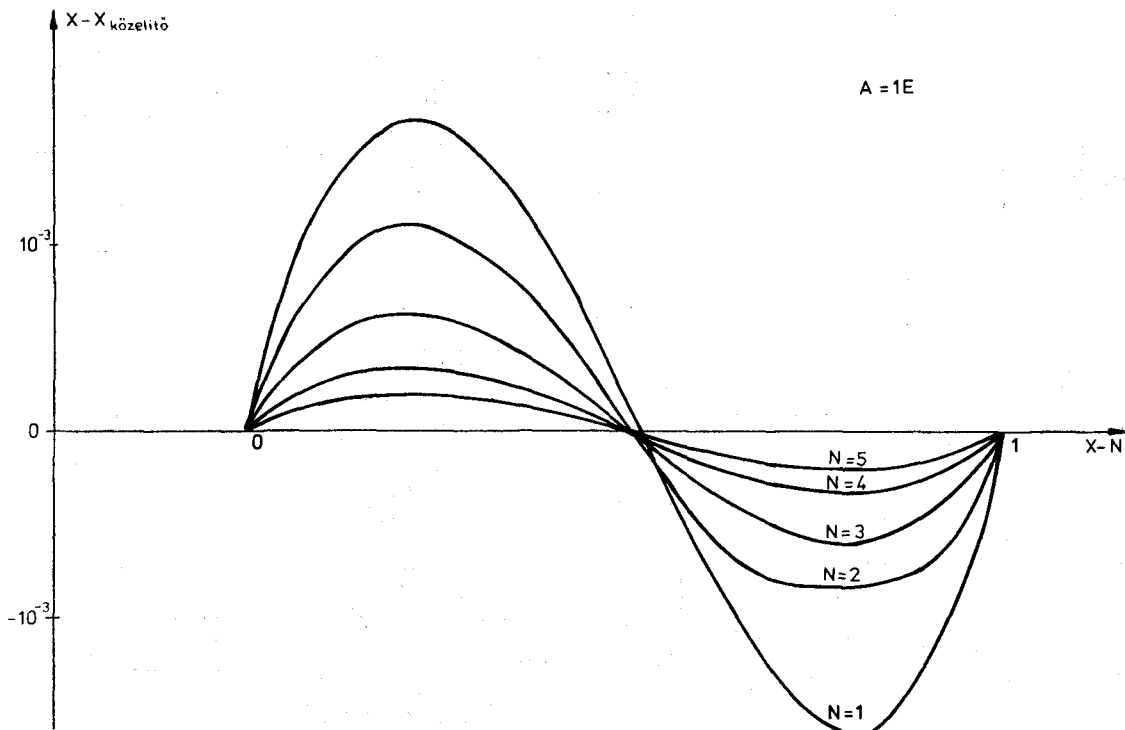
a hálózat optimalizálása során még túl nagy, ezért további csökkentésre van szükség.

Az ábrából látható, hogy a görbét jól megközelíti egy másodfokú parabola. A parabola egyenletének és abból a pontosabb áramkörzámoknak a meghatározása azonban hosszadalmas, a kis együtthatók miatt pontatlan és a gyakorlat számára felesleges is.

A pontosság gyors növelésére a közelítő parabola



4. ábra. Módosított hibagörbék



H822-5

5. ábra. Módosított hibagörbék

alkalmazása helyett felhasználhatjuk azt, hogy a 3. ábra görbéje a hibamaximum környezetében a leglaposabb. A pontos áramkörszámánál jelentkező hibát ezért helyettesíthetjük a közelítő áramkörszámánál jelentkező hibával, s ezt a hibát a közelítő áramkörszámhoz hozzáadva, a pontos áramkörszámot jobban megközelítő áramkörszámot kapunk. Az ily módon keletkező hibafüggvényt a 4. ábrán láthatjuk.

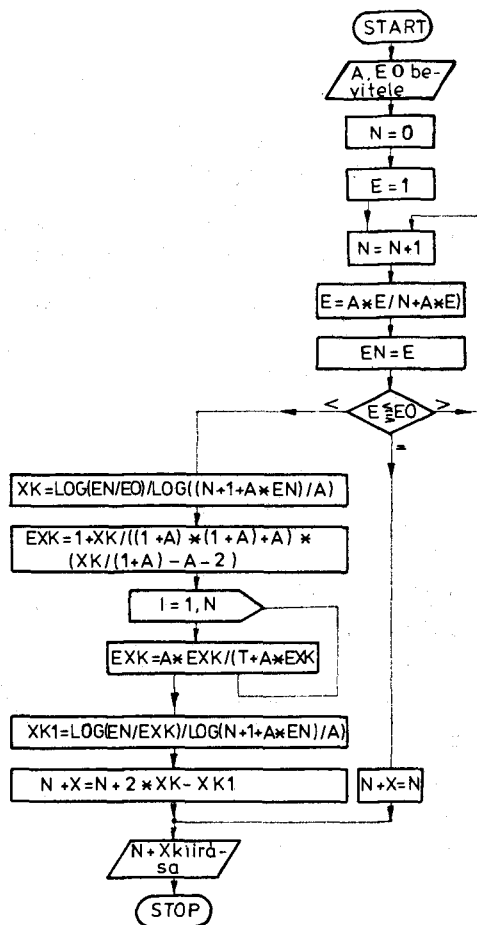
A 4. ábrából látható, hogy az így keletkező hiba maximális értéke 10E forgalomnál csak $1,80274 \cdot 10^{-4}$. Ez már megfelelő az áramkör-optimalizáláshoz.

A 4. ábrából az is látható, hogy a módosított hibagörbe maximuma a felajánlott forgalommal fordított arányban áll. 1% körüli veszteségi tényező esetén a maximális hiba még 0,3 E forgalom esetén sem lépi túl az elfogadható 10^{-3} értéket.

A hibagörbe maximuma azonos forgalom esetén a veszteségi tényezővel arányosan nő. Az 5. ábrán 1E forgalom és 1, 2, 3, 4, illetve 5 egész áramkör (tehát csökkenő veszteségi tényező mellett) látható a módosított hibagörbe menete.

Az előzőekből látható, hogy az utolsó választású áramköröknél szokásos veszteségi tényezők mellett körülbelül 1E forgalom felett lehet ezt az áramkör-meghatározó módszert alkalmazni, ami jelentős (legalább ötszörös) időmegtakarítást jelent más (áramkör-tört részét felező, húr, érintő, iterációs stb.) módszerekhez képest.

Az előzők alapján a tört áramkörszámot az alábbi



H822-6

6. ábra. Tört áramkörszám kiszámításának folyamat-ábrája

lépésekben lehet meghatározni (1. a 6. ábra folyamat-ábráját is):

- a) A 2. és a 3. képlet alkalmazásával meghatározzuk azt a két áramkörszámot, amelyek közé kell esnie a tört áramkörszámnak.
- b) Meghatározzuk a két határoló egész áramkörszám veszteségi tényezőjének, valamint az áramkörszám számításához előírt veszteségi tényezőnek a logaritmusát.
- c) A veszteségi tényezők logaritmusai alapján lineáris interpolációval meghatározzuk a közelítő áramkörszámot.
- d) A közelítő áramkörszámhoz a (13)–(16), valamint a (11) képlet alkalmazásával meghatározzuk a veszteségi tényezőt.
- e) A *d* pontban kapott veszteségi tényezőt mint kiindulási veszteségi tényezőt tekintjük. Ezzel a *b*) pontban leírt módszer szerint új közelítő áramkörszámot kapunk.
- f) Az *e*), illetve a *c*) pontban kapott közelítő áramkörszámok különbségét a *c*) pontban kapott közelítő áramkörszámhoz hozzáadva, az így nyert áramkörszámmal helyettesítjük a pontos áramkörszámot.

A 6. ábrán a tört áramkörszám kiszámítása önálló programként szerepel. A gyakorlatban általában szubrutinként kell a számítást elvégezni, a szubrutin-képzés szabályait szem előtt tartva.

I R O D A L O M

- [1] *Wilkinson, R. I.*: Theories for Toll Traffic Engineering in the USA. Bell System Technical Journal, 55 (1956) 2. 421–514. oldal.
- [2] *Rapp, Y.*: Planning of Junction Network in a Multiexchange Area. I. General Principles. Ericsson Technics, 20 (1964). 1. 77–130. oldal.
- [3] *Rapp, Y.*: Planning of Junction Network in a Multiexchange Area. II. Extensions of the Principles and Applications. Ericsson Technics, 21 (1965). 2. 187–240. oldal.
- [4] *Rappaport, S. S.*: Calculation of some Functions Arising in Problems of Queueing and Communications Traffic. IEEE Transactions on Communications, 27 (1979). 1. 249–251. oldal.
- [5] *Sanders, B.*: Comments on “Calculation of some Functions Arising in Problems of Queueing and Communications Traffic”. IEEE Transactions on Communications, 28. (1980). 6. 906–907. oldal.
- [6] *Eisler P.*: Bevezetés a forgalomelméletbe. Kohó-és Gépipari Továbbképző és Módszertani Intézet, BHG Híradástechnikai Vállalat, 1979.
- [7] *Dely Z. – Ecsedi G.-né – Huszty G. – Madarász E. – Oprics Gy. – dr. Plank Gy. – dr. Sallai Gy.*: Távközlő hálózatok forgalmi tervezése. Közlekedési dokumentációs Vállalat, 1980.
- [8] *Dr. Rényi A.*: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- [9] *Ágostházi M.*: Túlcsordulásos rendszerek forgalmi méretezése. Híradástechnika, 1976/8. XXVII. évf. 244–251. oldal.
- [10] *Dr. Tóth E.*: A kerülőutas forgalomirányítás kérdései. Híradástechnika, 1977/6. XXVIII. évf. 182–186. oldal.