

PLL rendszerek tranziens-analízise

KOVÁTS JÁNOS

Távközlési Kutató Intézet

1. Bevezetés

A fáziszárt hurok (PLL) manapság már széles körben elterjedt az elektronika csaknem minden területén. Így például fontos szerepet játszik a híradástechnikában, a szabályozás-technikában, a mérés-technikában stb. A PLL elterjedésével együtt az elmúlt 10–15 évben jelentős számú publikáció jelent meg ezen a tématerületen. Ezek közül itt most csak három alapvető irodalomra hivatkozom, melyek — különböző megközelítésekben — részletesen tárgyalják a fáziszárt hurok elméletét [1], [2], [3].

Bármennyire is kidolgozott azonban a PLL elmélete, mind a mai napig még számos nyitott kérdés maradt, többek között a tranziens-analízis és a befogási jelenségek vizsgálatával kapcsolatban [4].

A hagyományos — Viterbi által kidolgozott — fáziszárt hurok vizsgálatai módszer [2] magasabb rendű hurkokra csak nehezen, vagy egyáltalán nem általánosítható. A módszer további hátránya, hogy a fázishiba-idő függvényt implicit alakban adja meg. (A fázishiba és annak deriváltja között teremt kapcsolatot.)

Az imént említett problémákat igyekszik kiküszöbölni a következőkben ismertetésre kerülő *időtartománybeli numerikus tranziens-analízis*.

2. A PLL általános modellje

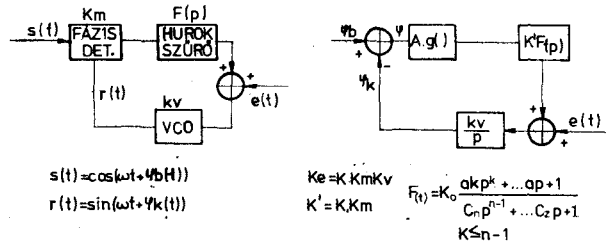
2.1. A fáziszárt hurok alapegyenlete

Az 1. ábrán a PLL általános, ill. alapsávi helyettesítőképét láthatjuk [1].

Az ábra alapján felírható a hurok egyenlete:

$$\varphi = \varphi_b - \varphi_k = \varphi_b - \frac{K_e F(p)}{p} A g(\varphi) - \frac{K_v e}{p} \quad (1)$$

ahol $p = \frac{d}{dt}$ a Heaviside operátor, φ_b , ill. φ_k a bemenő és a kimenő jel fázisa, „A”, ill. „K₁” a bemenő és a kimenő jel effektív értéke, g a fázisdetektor karakterisztikája, „K_m” ill. „K_v” a fázisdetektor és a VCO meredeksége, $F(p)$ pedig a hurokszűrő transzfer függvénye operátoros alakban.



1. ábra. A PLL általános és alapsávi helyettesítőképe

Az (1) egyenlet a hurok fázishibájára vonatkozó nemlineáris integro-differenciálegyenlet. Vizsgálataink során a zaj hatását figyelmen kívül hagyjuk.

Néhány egyszerű átalakítást elvégezve az (1) egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$\sum_{i=1}^n c_i \varphi^{(i)} = c_1 \Omega_0 - K \sum_{j=0}^K a_j [g(\varphi)]^{(j)} - K_v \sum_{l=1}^n c_l [e]^{(l-1)} \quad (2)$$

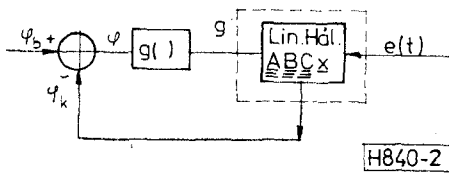
ahol $K = A K_e K_0$, és a bemenő fázis időfüggvénye: $\varphi_b = \Omega_0 t + \varphi_0$. A fenti n -edrendű nemlineáris differenciálegyenlet elvileg valamilyen numerikus módszerrel megoldható. A nehézséget az okozza, hogy szakadásos vagy töréspontos fázisdetektor karakterisztika esetén g deriváltjai nem adhatók meg analitikusan. A következő fejezetben leírt állapotváltozós módszernek az egyik előnye éppen az, hogy bármilyen fázisdetektor karakterisztika esetén alkalmazható.

2.2. A PLL állapotváltozós alapegyenlete

Az 1. ábrán látható fáziszárt hurok egyetlen nemlineáris eleme a fázisdetektor. Emeljük ki ezt a nemlinearitást a 2. ábra szerinti módon. Ezután a lineáris hálózatra alkalmazzuk a hálózatelmélet azon tételét, miszerint: minden lineáris, időinvariáns rendszer egyértelműen leírható állapotváltozói segítségével az alábbi egyenletek szerint:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3)$$

ahol x az állapotváltozó vektor, y a kimenő jel vektora, u a gerjesztő jel vektor, és A, B, C, D a hálózatra jellemző mátrixok.



2. ábra. A fáziszárt hurok szétbontása lineáris és nemlineáris részekre

A fenti tételt a 2. ábra hálózatára alkalmazva:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4)$$

$$\varphi_k = \tilde{C}x + \tilde{D}u \quad (5)$$

egyenleteket írhatjuk fel, ahol $u = \begin{bmatrix} g \\ e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, „~” pedig

a transzponálás jele.

Laplace-tartományba áttérve, néhány egyszerű átalakítás után kapjuk:

$$x = (pE - A)^{-1}B \begin{bmatrix} g \\ e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\varphi_k = \tilde{C}(pE - A)^{-1}B \begin{bmatrix} g \\ e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{D} \begin{bmatrix} g \\ e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ahol E az egységmátrix.

A kimenő fázist az 1. ábra alapján felírva:

$$\varphi_k = \frac{AK'F(p)K_v}{p}g + \frac{K_v e}{p} = K(p)g + \frac{K_v e}{p} \quad (8)$$

(7) és (8) egyenletek összevetésével:

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \tilde{C}(pE - A)^{-1}b \quad (9)$$

és

$$d = \frac{K_v e}{p}, \quad \text{ahol } b \leftrightarrow B \text{ és } d \leftrightarrow D \quad (10)$$

Az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy C egységvektor, és hogy $A = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ diagonálmátrix. Ekkor (9) egyenlet felírható mint:

$$K(p) = \frac{b_1}{p - p_1} + \frac{b_2}{p - p_2} + \dots + \frac{b_n}{p - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{p - p_i} \quad (11)$$

(11) egyenlet $K(p)$ racionális törtfüggvény parciális törtekre bontott alakja, elsőrendű pólusok esetén. Magasabb fokszámú pólusokat a modell nem vesz figyelembe, ezeknek azonban úgy sincs nagy gyakorlati jelentőségük.

A Laplace-transzformáció kifejtési tétele alapján:

$$b_i = \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

(4)–(12) egyenletekkel kifejezhető a PLL állapotváltozós alapegyenlete:

$$\dot{x}_i = p_i x_i + b_i g(\varphi) \quad (13)$$

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n x_i + d \quad \text{és} \quad \varphi = \varphi_b - \varphi_k \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

(14) egyenletben d értéke a befogást elősegítő külső feszültség idő szerinti integráljával és a VCO hangolási merekségével arányos (lásd (10)). Mivel a fázisdetektor karakterisztika deriváltjai nem szerepelnek az alapegyenletekben, így tetszőleges $g(\varphi)$ esetén egyértelmű megoldást kaphatunk.

3. A fáziszárt hurok gyakorlati kialakítása

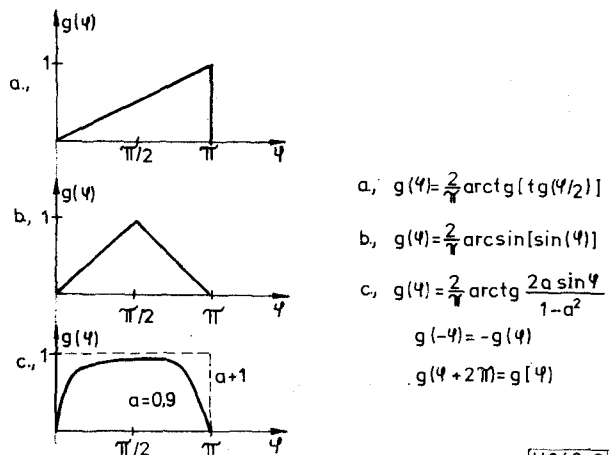
3.1. Néhány fontosabb fázisdetektor karakterisztika matematikai modellje

A gyakorlati megvalósításokban leginkább a sinus, a háromszög, a fűrészfog és a szignum-függvény jellegű karakterisztikák terjedtek el. Például az [5] irodalom a nagysebességű QPSK demodulátorokban történő alkalmazásra mutat néhány példát.

A numerikus analízis szempontjából nem túl előnyös, ha a töréspontos függvényeket szakaszonként adjuk meg, mivel ekkor minden vizsgálati időpontban meg kellene állapítani, hogy a fázishibához a $g(\varphi)$ függvény melyik értéke tartozik. Ezért célszerű olyan függvényeket definiálni, melyek analitikus módon, és egyértelműen meghatározzák a töréspontos karakterisztikát. Ezek az úgynevezett „Serra” függvények [6]. A 3. ábrán néhány példát mutatunk be ezeknek a függvényeknek az alkalmazására.

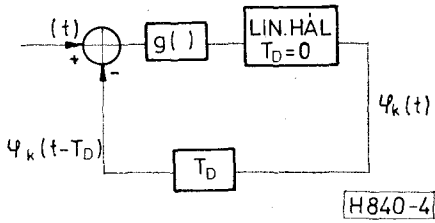
3.2. A késleltetés figyelembevétele

Miután a valóságos áramköri elemek mindig valamennyire késleltetik a bemenetükre adott jelet, ezért bizonyos esetekben ezt a kérdést nem hagyhatjuk

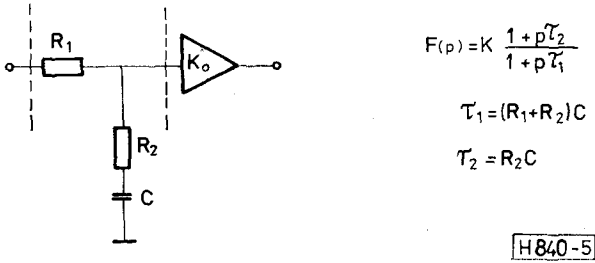


H840-3

3. ábra. Néhány fontosabb Serra-függvény



4. ábra. A hurokban levő késleltetés hatásának vizsgálata

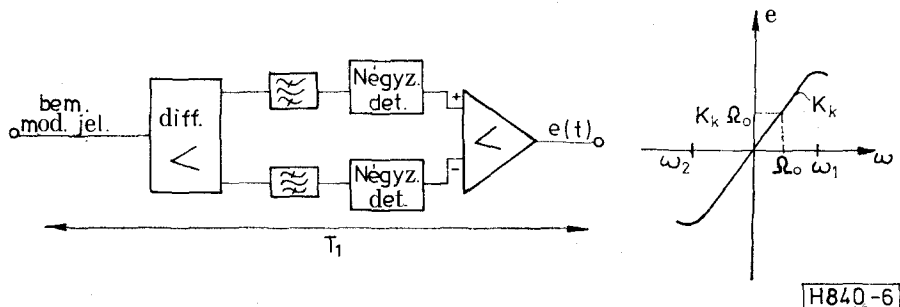


5. ábra. A lag-lead típusú hurokszűrő

figyelmén kívül. Másrészt vannak olyan gyakorlati esetek, ahol szükségszerűen van jelen a késleltetés a hurokban [7]. A 4. ábrán T_D -vel jelöltük a teljes késleltetést a visszacsatoló ágban. Azt mondhatjuk tehát, hogy a VCO jele T_D -vel késleltetve jut a különbségképzőre. Ez azonban ugyanazt jelenti, mintha azt mondanánk, hogy a bemenő jel T_D -vel hamarabb érkezik a bemenetre. A késleltetés hatása tehát időtartományban egyszerűen figyelembe vehető.

3.3. A hurokszűrő és a feszültséggel hangolt oszcillátor (VCO) jellemzői

Hurokszűrő alatt a tényleges passzív (általában RC) szűrőt, és az azt követő nagy erősítésű erősítőt értjük. A szűrő feladata a VCO hangolásához szükséges egyenfeszültség és kisfrekvenciás (különbségi) jel átvitele, valamint minden magasabb frekvenciás komponens megfelelő mértékű elnyomása. A legáltalánosabban használt ún. lag-lead szűrőt az 5. ábrán láthatjuk. A hurokszűrő pólusainak száma meghatározza a PLL „rendűségét”: $n-1$ végesben levő pólus esetén a hurok n -ed rendű lesz, mivel a VCO-ban történő integrálás (frekvencia-fázis transzformáció) eggyel növeli a pólusok számát.



6. ábra. A spektrum-diszkriminátor blokkvázlata és jellemző karakterisztikája

A feszültséggel hangolt oszcillátort lineáris hangolási karakterisztikával vesszük figyelembe. Ez a közelítés azonban nem mindig érvényes. A VCO nemlinearitásának figyelembevétele túlságosan bonyolulttá tenné a modellt, és így a megoldandó differenciálegyenletet is, ezért ezt a hatást elhanyagoljuk.

3.4. A befogást elősegítő külső feszültség hatása

A befogási tartomány növelésének többfajta módja van [1], itt két — gyakorlatban alkalmazott — esetet fogunk megvizsgálni. Az egyik, amelyet jelenleg is használunk az elnyomott vívőjű mikrohullámú digitális rádiórelé berendezés vívő-visszaállító áramkörében, spektrum-diszkriminátor segítségével működik [8]. A 6. ábra a diszkriminátor blokkvázlatát és jellemző karakterisztikáját mutatja. Amennyiben a bemenő jel spektruma nem a névleges frekvencián van, a diszkriminátor a spektrum elhangolódásával arányos hibajelet fog képezni, amely segíti a VCO-t ugyanolyan mértékben elhangolni. (A módszer csak álvéletlen digitális jelek esetén alkalmazható, mivel a modulált jel spektruma csak ekkor tekinthető közel folytonosnak.)

A másik módja a befogás elősegítésének egy fűrészgenerátor jelét használja fel. Ez a generátor lineárisan növekvő feszültséget ad a VCO-ra a befogás eléréséig, utána viszont kikapcsol, és feszültsége nulla lesz. A gyakorlatban a fűrészjel „hirtelen” kikapcsolása kilökheti a hurkot a befogott állapotból, ezért a kikapcsolási folyamat valamilyen időállandóval megy végbe.

Az ismertetett két megoldás esetén a 2.2. fejezet (14) egyenletében szereplő „ d ” érték a következő lesz:

$$e(t) = K_k \Omega_0 (1 - e^{-t/T_1}) \quad d = K_s \Omega_0 (t + T_1 e^{-t/T_1}) \quad (15)$$

ahol $K_s = K_k K_v$ és T_1 a diszkriminátor időállandója

$$e(t) = H_k t \quad d = H t^2 \quad (16)$$

ahol $H = H_k K_v$, ha fűrészgenerátort alkalmazunk. (15) és (16) egyenleteket behelyettesítve (13) és (14) egyenletekbe, kapjuk:

$$\dot{x} = p_i x_i + b_i g(\varphi) \quad (17)$$

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^n x_i + K_s \Omega_0 (t + T_1 e^{-t/T_1}) + H t^2 \quad (18)$$

(18) egyenlet idő szerinti differenciálhányadosát képezve, a kimenő frekvenciát az alábbi összefüggés-

bőí számíthatjuk:

$$\omega_k = \sum_{i=1}^n p_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i g(\varphi) + K_s \Omega_0 (1 - e^{-t/T_1}) + 2Ht \quad (19)$$

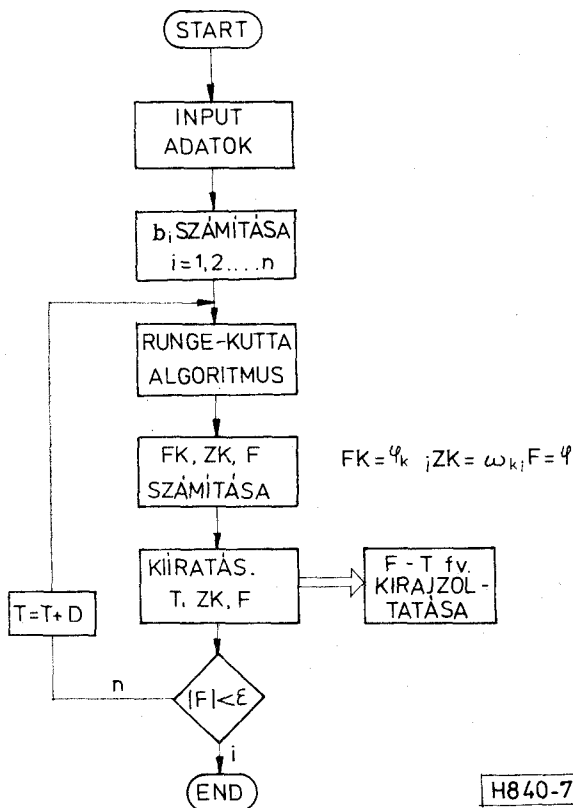
4. A számítógépes analízis

A következőkben olyan tranziens vizsgálatot fogunk elvégezni, amely feltételezi, hogy a rendszer a $t=0$ időpillanatban stacionárius állapotban van, és ekkor φ_0 fázis-, és Ω_0 frekvencia „ugrás” billenti ki állapotából. Amennyiben ez az ugrás kisebb egy bizonyos értéknél (befogási tartomány), akkor a PLL egy idő elteltével adott fázishibával követni fogja a bemenő jelet. A (17), (18) és (19) egyenletek megoldásával a fázishiba-idő függvényt és a kimenő-frekvencia-idő függvényt egyértelműen meg tudjuk adni.

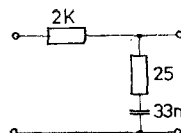
4.1. A numerikus megoldás blokkdiagramja

Nemlineáris differenciálegyenletek, ill. egyenletrendszerek megoldására többféle algoritmus is létezik. Ezek közül pontossága és egyszerű programozhatósága miatt a Runge-Kutta-módszer látszott a legmegfelelőbbnek [9].

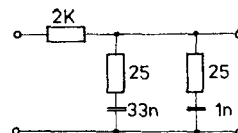
A megoldás blokkdiagramja a 7. ábrán látható. A program BASIC nyelven PET-2001, Commodore asztali számítógépre készült.



7. ábra. A tranziens-analízis program blokkdiagramja



$$F_{(p)} = \frac{1 + 8,25 \cdot 10^7 p}{1 + 6,7 \cdot 10^9 p^2}$$



$$F_{(p)} = \frac{1 + 8,5 \cdot 10^7 p + 2 \cdot 10^{-16} p^2}{1 + 6,88 \cdot 10^9 p + 3,3 \cdot 10^{12} p^2}$$

H840-8

8. ábra. a) A másodrendű PLL hurokszűrője
b) A harmadrendű PLL hurokszűrője

A bemeneti (INPUT) adatok a következők:

- időlépés (D) megválasztása (becslés alapján),
- hurok fokszám (N),
- hurokerősítés (K),
- frekvencia (ZO) és fázisugrás (FO) ($\Omega_0 \doteq ZO$, $\varphi_0 \doteq FO$),
- fázisdetektor típus ($L=1$ fűrészfog, $L=2$ háromszög, $L=3$ sinus, $L=4$ szignum),
- késleltetés (T_D),
- külső feszültségek paraméterei (K_s , H),
- hurokszűrő transzferfüggvényének együtthatói és pólusai (A_i , C_i , P_i).

4.2. Eredmények

A számítógépes analízist részletesen a 8/a ábrán látható hurokszűrő esetén végeztük el.

A 9. ábrán néhány tipikus fázishiba-idő függvényt mutatunk be. Az ábrák rajzológépen (plotter) készültek, és a $\text{mod} 2\pi$ értelemben vett fázishibát ábrázoltuk, valamint bejelöltük a T_f frekvencia-, ill. a T_p fázisbehúzási időket.

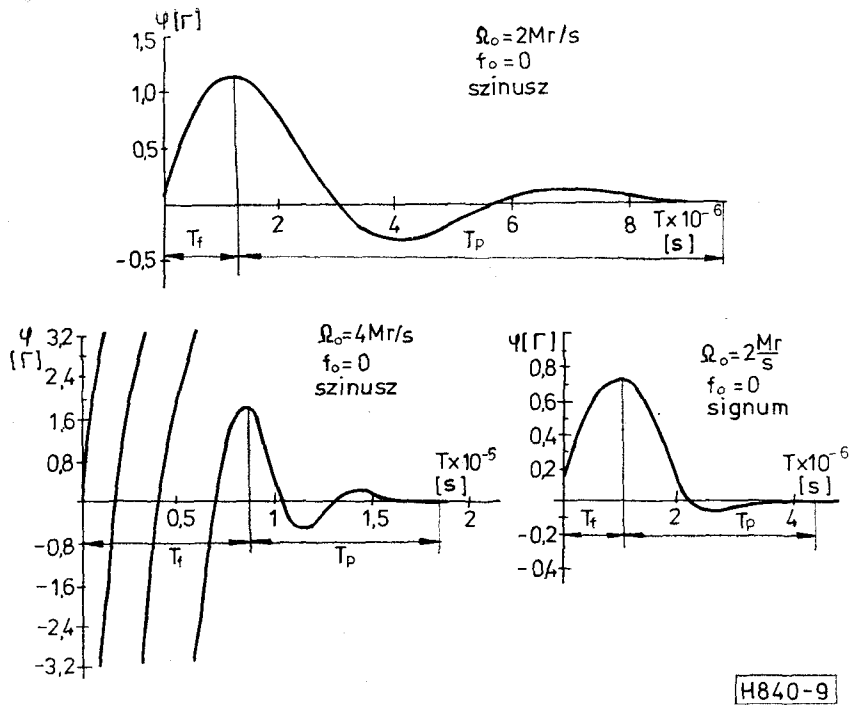
A 10. ábrán négy különböző fázisdetektor karakterisztika esetére összehasonlítottuk a behúzási időket, ezenkívül még feltüntettük a Lindsey által megadott közelítő eredményt [1] sinusos esetben. Látható, hogy viszonylag nagy elhangolódások esetén a kvázistacionáris analízis eredményeként kapott T_f -ek valóban kielégítő alsó korlátot adnak. Kis különbségi frekvenciáknál azonban, (amikor a hurokban nincs cikluscúszás a befogás eléréséig) a frekvencia befogás ideje csak lassan növekvő jellegű lesz. A fázis befogási idők a kezdeti frekvencia ugrástól függetlenül állandónak adódtak.

A 11. ábrán szintén négyféle $g(\varphi)$ esetén a késleltetés hatása figyelhető meg. A T_D idő azonban nem növelhető korlátlanul, mert egy bizonyos érték felett a hurok instabillá válik [1].

A 12–14. ábrákon sinusos esetre vizsgáltuk a frekvencia befogási időt, külső feszültségeket adva a PLL-re. Jól látható a befogási idő jelentős csökkenése, ami egyúttal a befogási tartomány növekedését is maga után vonja. A 13. ábrán a diszkriminátor T_1 időállandójának befogást rontó hatását láthatjuk.

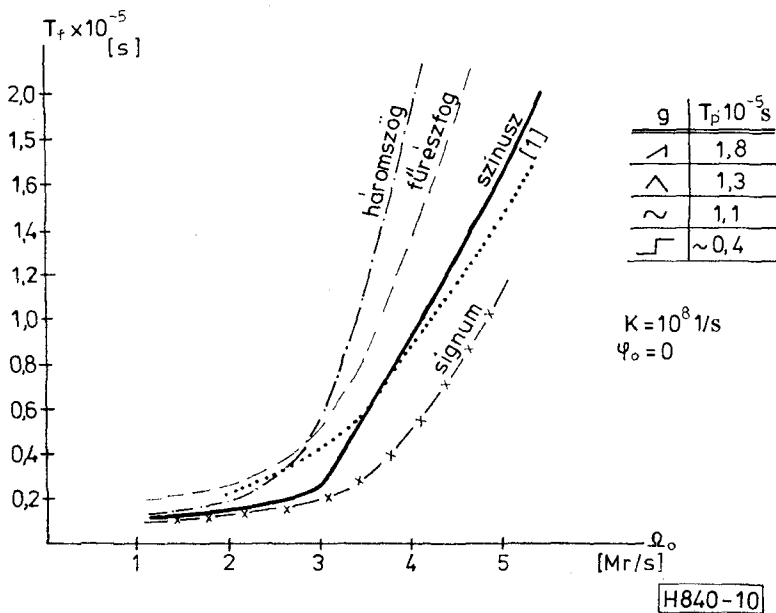
A 15. ábra a „ K ” hurokerősítés csökkenésének hatását mutatja. A hurokerősítés csökkenés a frekvencia befogás idejét jelentősen megnövelheti, és ezzel együtt a PLL befogási tulajdonságait leronthatja.

H840-7



H840-9

9. ábra. Néhány jellegzetes fázishiba-idő függvény



H840-10

10. ábra. Befogási idők a különbségi frekvencia függvényében

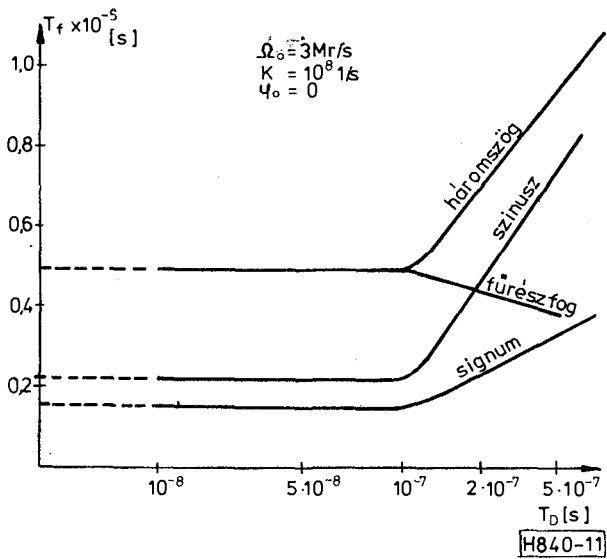
Végül a 16. ábrán a másodrendű és a harmadrendű hurok — amelyek a 8/b ábra szerinti hurokszűrővel működik — összehasonlítását láthatjuk. A harmadrendű PLL sokkal nagyobb frekvencia ugrásokat képes követni. Hátránya viszont, hogy késleltetés nélküli esetben is csak feltételesen stabil [2].

5. Összefoglalás

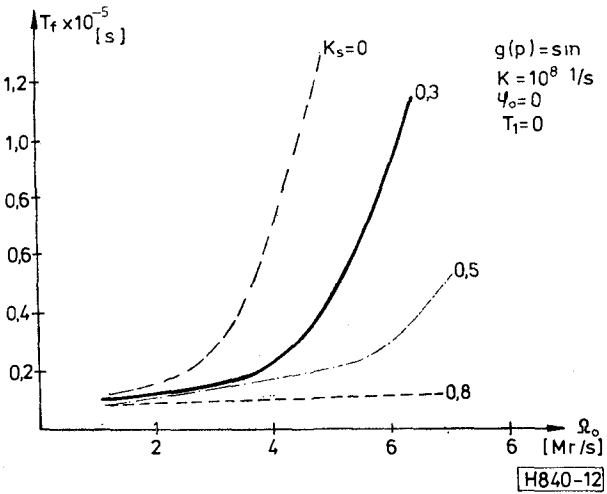
A 2. fejezetben leírt elméleti összefüggések, valamint a 3. fejezetben megadott egyéb szempontok szerint

a 4. fejezetben egy konkrét példán mutattuk be a tranziens-analízist.

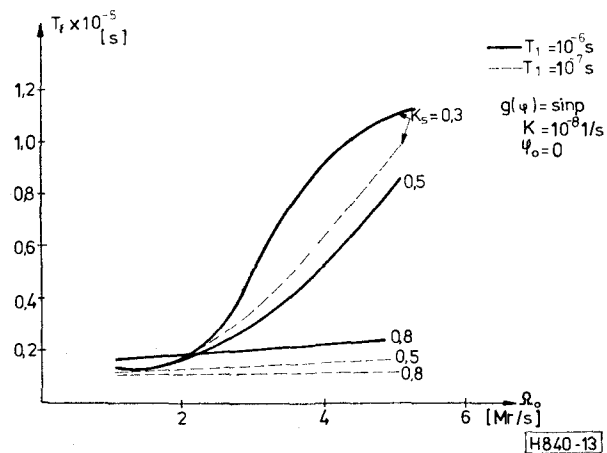
A kidolgozott módszer teljesen általános, elvileg tetszőleges fázisdetektor karakterisztikájú rendszerre alkalmazható. Figyelembe vettünk minden lényeges hatást, ami befolyásolhatja a zajmentes működést. A számítógépes eljárás hibája — mely az algortimus pontatlanságából és a számítógép véges pontosságából tevődik össze — elhanyagolható. Egy adott kezdeti feltétel esetén a program elvégzéséhez szükséges gépidő néhány perc volt.



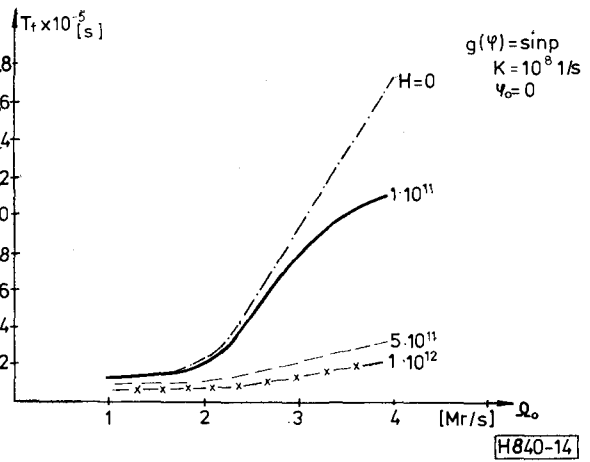
11. ábra. A frekvencia befogási idő-késleltetési idő függvény



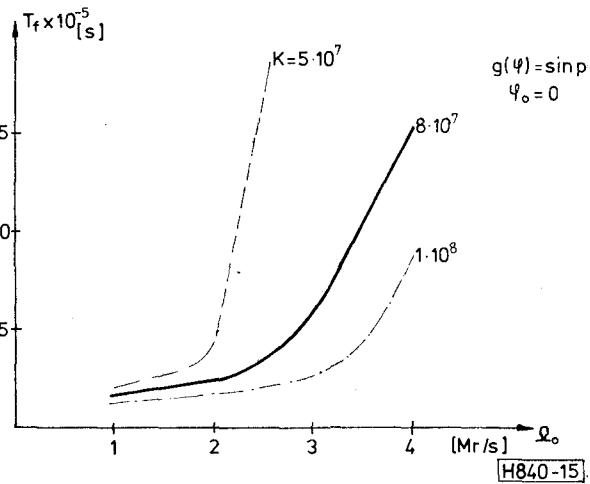
12. ábra. Befogási idők spektrum-diszkriminátor esetén, amennyiben $T_1 = 0$



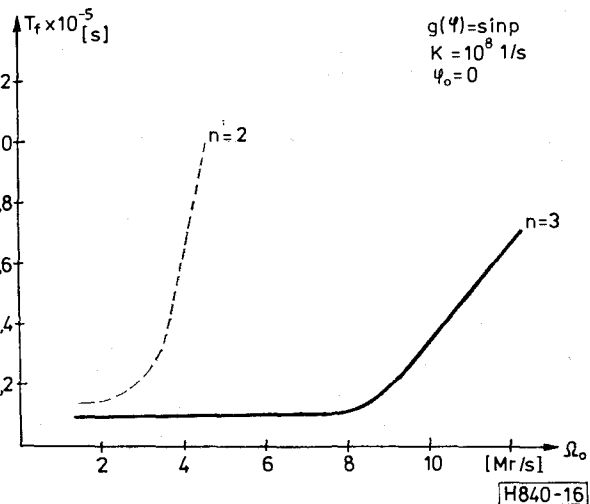
13. ábra. Befogási idők spektrum-diszkriminátor esetén, amennyiben $T_1 \neq 0$



14. ábra. Fűrészgenerátoros külső feszültség hatása a befogási időkre



15. ábra. A hurokerősítés csökkenésének hatása a befogási időre



16. ábra. A másodrendű PLL és a harmadrendű PLL befogási idejének összehasonlítása

I R O D A L O M

- [1] *Lindsey*: Synchronization Systems in Communication and Control, Prentice-Hall, 1971.
- [2] *Viterbi*: Principles of Coherent Communication Mc Graw Hill, 1966.
- [3] *Gardner*: Phaselock Techniques, Wiley, 1966.
- [4] *Russo-Verrazzani*: Acquisition Time of Second-Order Aided PLL, IEEE AES—13. No. 1. 1977.
- [5] *Yamashita, Sakata, Iguchi*: Synchronous Phase Demodulators for High Speed QPSK Transmisson Systems, FUJITSU Dec. 1975.
- [6] *Turban*: Schwingungen mit serraphilen Kurvenformen etz-a Bd. 97. (1976) H. 6.
- [7] *Frigyes, Szabó, Ványai*: Digitális mikrohullámú átviteltechnika, Műszaki Könyvkiadó, 1980.
- [8] *Frigyes, Bercei, Szabó*: A New Method for Carrier Acquisition in Suppressed Carrier Microwave Radio, Proc. of 11th European Microw. Conf., 1981.
- [9] *Obádovics*: Numerikus módszerek és programozásuk, Tankönyvkiadó, 1975.