

## Lineáris hálózatok analízise szegmentálással

DR. GÁL MIHÁLY  
Postavezérigazgatóság

### 1. Bevezetés

A lineáris hálózatok elméletében és ezen belül az átviteltechnikában is számos olyan probléma létezik, amelynek a megoldása az egyszerűbb számítási mód-szerekkel, pl. a négy-póluselmélettel nagy nehézségek-be ütközik, túlságosan hosszú időt vesz igénybe, vagy megengedhetetlenül pontatlan eredményekre vezet.

Ilyen feladatnak látszik például a négy-pólusok transzfer függvényeinek meghatározása komplex le-záró impedanciák esetén, átviteli rendszerek több helyéről visszaverődő jelek eredőjének meghatározása, a rövid vonalak miatt nem elhanyagolható mértékű többszörös reflexiók számba vétele, láncba kapcsolt átviteli rendszerek stabilitásának, csillapításiingadozásaik meghatározása, az átviteltechnikában elterjedten használt villatranszformátor által okozott visz-szafordulások, reflexiók meghatározása stb.

Ezek megoldására számos közelítő módszer léte-zik, amelyek bizonyos esetekben kis hibával adnak eredményt, bizonyos esetekben azonban a hiba megengedhetetlen mértékűvé válik, és az így kapott eredmény alig használható. E nehézségek feloldására látszik alkalmasnak egy újnak számító módszer, a szegmentálás.

A szegmentálás alapjairól alapvető publikációnak a Nemzetközi Távközlési Egyesület kiadásában meg-jelent „Transmission Planning of Switched Tele-telephone Networks” c. kézikönyv [1], illetve annak Volume 2 Chapter III/Annex 3 alatt található cikke látszik. (Címe: How to calculate the transmission characteristics of telephone connections in terms of the parameters of their constituent parts.) A cikk be-nyújtója az Egyesült Királyság Postaigazgatása. A módszer alapjainak kidolgozása azonban valószí-nűleg S. Munday nevéhez fűződik, aki a CCITT táv-beszélő-áramkörökkel foglalkozó XVI. Tanulmányi Bizottságának elnöke, és kétségtelenül igen sokat tett a módszer népszerűsítése érdekében.

E cikk célkitűzése a szegmentálás alapjainak meg-ismertetése a hazai olvasóközönséggel.

### 2. A reflexiós pont modellezése

Ismert, hogy a távvezeték működését leíró hullám-egyenletek egyik partikuláris megoldása:

$$\begin{aligned} U_T &= U_{BE}(1 + p_{T0}), \\ I_T &= \frac{U_{BE}}{Z_0}(i - p_{T0}). \end{aligned} \quad (1)$$

A fenti egyenletrendszerben  $U_T$ ,  $I_T$  a vezeték végét lezáró  $Z_T$  impedancián fellépő feszültség, ill. az azon átfolyó áram komplex effektív amplitúdója,  $Z_0$  a vezeték hullámimpedanciája,  $U_{BE}$  az a komplex feszültség, amely az illesztve lezárt vezeték végén fellépne,  $p_{T0}$  pedig a feszültség-reflexiós tényező komplex értéke, azaz:

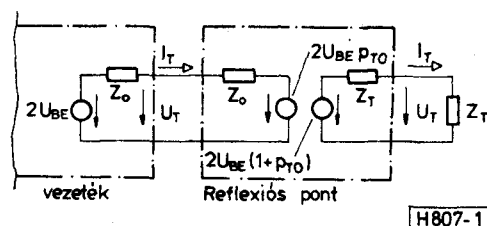
$$p_{T0} = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0}.$$

Az (1) kifejezés érvényességével kapcsolatban egyetlen megszorítás, hogy a vezetékek egymástól való távolsága sokkal kisebb legyen, mint a hullám-hossz. Ez azonban a vezetékes átvitelben általában teljesül.

(1) alapján a reflexiós pont az 1. ábra szerinti elren-dezéssel modellezhető.

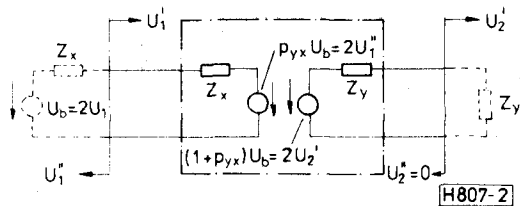
A modell szerint a reflexiós pont feszültség-gene-rátorokat és impedanciákat tartalmazó elméleti négy-pólus, de mivel fizikailag megfoghatatlan, megkülönböztetésül a kapocspárjain keresztül megfogható négy-pólusoktól, nevezzük szegmensnek.

A modell akkor helyes, ha a feszültségek és áramok mindkét oldalon megfelelnek az (1) egyenletrendszer-nek. Ez az egyezés könnyen bizonyítható.

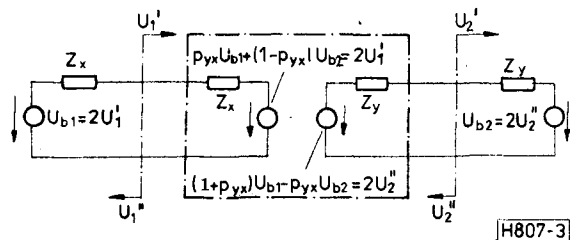


1. ábra

Beérkezett: 1981. VII. 20.



2. ábra



3. ábra

A vezeték végén „elhelyezkedő” reflexiós ponthoz hasonlóan a reflexiós pont aktív és passzív kétpólusok között ugyanúgy modellezhető, és a reflexiós szegmens két oldalán a feszültségek felbonthatók haladó és visszavert feszültségekre, amint azt a 2. ábra mutatja.

A gyakorlatban sokkal fontosabb az az eset, amikor a reflexiós pont aktív kétpólusok között helyezkedik el, hiszen ha pl. két négypólus összekapcsolása esetén lép fel reflexió, akkor általában ezen a reflexiós ponton keresztül mindkét irányban haladnak jelek, és a jelenség ugyanaz, mint amikor különböző belső impedanciájú aktív kétpólusokat kapcsolunk össze. E reflexiós pont modelljét a 2. ábra alapján könnyű elkészíteni. Az így kapott modellt a 3. ábra mutatja.

A 3. ábra szerinti elrendezést az alábbi karakterisztikus mátrixegyenlettel írhatjuk le:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}, \quad (2a)$$

Rövidebben:

$$U_1 = F U_2. \quad (2b)$$

Az  $F$  feszültség-transzfer (FT) mátrix elemeit viszonylag egyszerűen meghatározhatjuk (2a)-ból. Levezethető, hogy:

$$F_{RP} = \frac{1}{1 + p_{YX}} \begin{bmatrix} 1 & p_{YX} \\ p_{YX} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3a)$$

Bevezetve az  $f$  redukált mátrixot és a  $K$  skalár szorzót, ezekkel az FT mátrix:

$$F_{RP} = \frac{f_{RP}}{K_{RP}}. \quad (3b)$$

A redukált mátrix jellemzője, hogy 1. sora 1. oszlopában mindig 1 áll. Így reflexiós pontok esetén (3a) és (3b) alapján:

$$f_{RP} = \begin{bmatrix} 1 & p_{YX} \\ p_{YX} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad K_{RP} = 1 + p_{YX}.$$

### 3. A szegmentálás alap gondolata

A reflexiós pont előbb bemutatott modellje lehetővé tesz egy olyan szemléletet, amelynek alapján a nem reflexiómentesen lezárt négypólusok úgy tárgyalhatók, mintha hullámimpedanciáikkal lennének lezárva, és aktív kétpólusok között működnének. Ezek az aktív kétpólusok a reflexiós szegmensek elemei.

A fentiek alapján a szegmentálás lényege egyetlen négypólusnál a következő:

A négypólust bontjuk három szegmensre oly módon hogy „emeljük ki” a reflexiós pontokat. Így a szegmenzlánc közepén egy látszólag illesztve lezárt négy-pólus marad. Ezt a maradékot nevezzük az illesztve lezárt négy-pólus szegmensének. Az elrendezést a 4. ábra mutatja.

Természetesen hasonló módon szegmentálhatunk egy négy-pólusláncot is. Ez esetben  $n$  láncba kapcsolt négy-pólust  $2n + 1$  szegmensre kell osztani.

Triviális, hogy az eredő FT mátrixot az egyes szegmensek FT mátrixainak láncszorzásával kaphatjuk meg. E művelet során lényeges egyszerűsítést jelent, ha a négy-póluslánc átvitelét (vagy akár egyetlen négy-pólus átvitelét is) egyszerre csak egy irányban vizsgáljuk, vagyis a négy-pólust egyik oldalán aktív, másik oldalán passzív kétpólussal lezártunk tételezzük fel. Legyen a generátor megállapodászerűen mindig a bal oldalon. Vizsgáljuk meg ezzel az egyszerűsítéssel a láncszorzás végeredménye kiértékelésének módját.

Tételezzük fel, hogy már ismert az eredő FT mátrix. Legyen ez  $F$ . A jobb oldal passzív lezárása miatt:  $U_2'' = 0$ , így a karakterisztikus mátrixegyenlet alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2' \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4a)$$

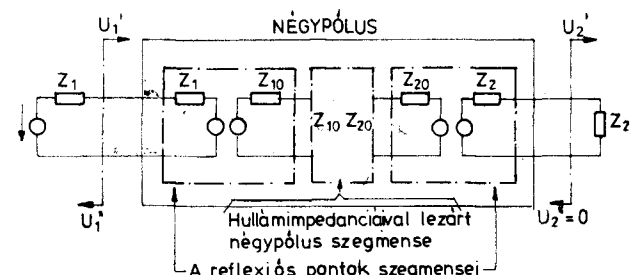
Fel kell ismernünk, hogy az eredő FT mátrix jobb oldali oszlopának nincs jelentősége, így felírható az alábbiak szerint is:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & \cdot \\ F_{21} & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2' \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4b)$$

Miután a jobb oldali oszlopnak nincs jelentősége, következésképp az FT mátrixok láncszorzása egyszerűbb lesz.

(4a) vagy (4b) alapján a karakterisztikus egyenletrendszer a következő igen egyszerű alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} U_1' &= F_{11} U_2', \\ U_1'' &= F_{21} U_2'. \end{aligned} \quad (4c)$$



4. ábra

Mivel a 3. ábra alapján  $U_1' = \frac{U_{b1}}{2}$ , valamint a 2. ábra alapján  $U_2' = U_2$ , (4c)-ből átrendezéssel az alábbi fontos összefüggést kapjuk:

$$F_{11} = \frac{f_{11}}{K_e} = \frac{U_{b1}}{2U_2}. \quad (5)$$

Egy másik fontos összefüggést kaphatunk (4c) két egyenlete osztásával, amely szerint a négy-pólus bal oldalán a reflektált jelek eredőjére jellemző eredő feszültség-reflexiós tényező:

$$p_e = \frac{U_1'}{U_1} = \frac{F_{21}}{F_{11}} = \frac{f_{21}}{f_{11}}. \quad (6a)$$

Ez a feszültség-reflexiós tényező fogalmának bizonyos mértékig önkényes kiterjesztése, mert több reflexiós pontot tartalmazó hálózatokban ez a reflexiós tényező csak szinuszos jelformával mérhető, és csak szinuszos jelformával determinálja a hálózat bemeneti impedanciáját:

$$Z_{1be}(j\omega) = Z_1(j\omega) \frac{1+p_e}{1-p_e} = Z_1 \frac{f_{11}+f_{21}}{f_{11}-f_{21}}. \quad (7)$$

Következésképpen:

$$p_e = \frac{Z_{1be}(j\omega) - Z_1(j\omega)}{Z_{1be}(j\omega) + Z_1(j\omega)}.$$

Röviden:

$$p_e = \frac{Z_{1be} - Z_1}{Z_{1be} + Z_1}, \quad (6b)$$

ahol az impedanciák csak komplex impedanciák lehetnek, operátoros impedanciák nem.

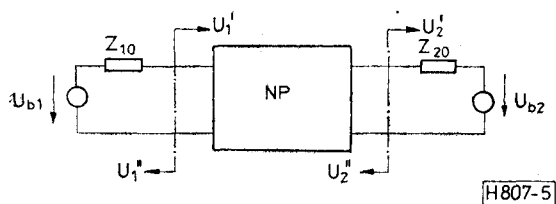
#### 4. Az illesztett négy-pólus típusú szegmens FT mátrixa

(2a) alapján, az 5. ábrát figyelembe véve az FT mátrix egyszerűen meghatározható.

$U_{b1} = 0$ ,  $U_{b2} \neq 0$  helyettesítéssel megkapjuk  $F_{12}$  és  $F_{22}$ ,  $U_{b1} \neq 0$ ,  $U_{b2} = 0$  helyettesítéssel pedig  $F_{11}$  és  $F_{21}$  értékét. Az FT mátrix a következő:

$$F_{NP} = \begin{bmatrix} \frac{U_{b1}}{2U_2} & 0 \\ 0 & \frac{2U_1}{U_{b2}} \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

Általában előnyös a mátrixelemek hullámparaméterekkel való megadása. Bevezetve a két átviteli



5. ábra

irány hullámátviteli tényezőjét, ( $\Gamma_0'$ ,  $\Gamma_0''$ ) és a hullám-impedanciákat, az FT mátrix:

$$F_{NP} = \frac{1}{K_{NP}} f_{NP} = \Gamma_0' \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z_{20}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\Gamma_0' \Gamma_0'')^{-1} \end{bmatrix}. \quad (8b)$$

#### 5. Az FT mátrixok láncszorzása

A szegmenslánc eredő FT mátrixának kiszámításánál a láncszorzást jobbról balra haladva a 3. pont alapján csak a szorzó mátrix bal oldali oszlopával kell végezni. Ennek bemutatására vizsgáljunk egyetlen négy-pólust lezárásai között. A négy-pólus két oldalán a jobbról balra irányú reflexiós tényezői:

$$p_1 = \frac{Z_{10} - Z_1}{Z_{10} + Z_1}, \quad p_2 = \frac{Z_2 - Z_{20}}{Z_2 + Z_{20}}.$$

A láncszorzás menete a redukált mátrixokra a következő:

$$f_e = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\Gamma_0' \Gamma_0'')^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ p_2 & \cdot \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ p_2 & (\Gamma_0' \Gamma_0'')^{-1} \end{bmatrix} & & \cdot \\ \begin{bmatrix} 1 + p_1 p_2 (\Gamma_0' \Gamma_0'')^{-1} & \cdot \\ 1 + p_2 (\Gamma_0' \Gamma_0'')^{-1} & \cdot \end{bmatrix} & & \cdot \end{bmatrix}$$

Az eredő skalár szorzót külön határozzuk meg az egyes szegmensek skalár szorzói összeszorzásával. Itt a művelet sorrendjének már nincs szerepe. (3a) és (8b) alapján:

$$K_e = \frac{(1+p_1)(1+p_2)}{\Gamma_0'} \sqrt{\frac{Z_{20}}{Z_{10}}}.$$

Az eljárás ugyanez több négy-pólus lánckapcsolásánál is.

#### 6. Az eredő FT mátrix elemeinek felhasználása

A következőkben jelöljük az  $f_e$  mátrixot az alábbiak szerint:

$$f_e = \begin{bmatrix} A_e & \cdot \\ C_e & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$(5) \text{ alapján } \frac{U_{b1}}{2U_2} = \frac{A_e}{K_e}.$$

Az átviteli tényező, amelyből a négy-pólus vagy lánc összetett csillapítását meghatározhatjuk:

$$\Gamma = \frac{U_{b1}}{2U_2} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}.$$

Az eredő transzfer mátrix elemeivel kifejezve:

$$\Gamma = \frac{A_e}{K_e} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}.$$

Vezessünk be egy új skalár mennyiséget,  $M_e$ -t, amely célszerűen:

$$M_e = K_e \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad (9)$$

ezzel

$$\Gamma = \frac{A_e}{M_e} \quad (10)$$

Az  $M_e$  változó bevezetésével a karakterisztikus mátrixegyenlet az alábbi formában írható:

$$\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \end{bmatrix} = \frac{1}{M_e} \begin{bmatrix} A_e & \cdot \\ C_e & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Bizonyítható, hogy a (9) szerint bevezetett  $M_e$  tényező  $K_e$ -hez hasonlóan szegmens típusokhoz tartozó típusos szorzótényezőkre bontható. Ezek két típusa a következő:

$$M_{RP} = \sqrt{1 - p_{YX}^2} \text{ reflexiós pontok esetén,}$$

$$M_{NP} = (\Gamma_0')^{-1} \text{ négypólusok esetén.}$$

A típuszegmensek transzfer mátrixait az 1. táblázat foglalja össze.

A szegmentálással meghatározható mennyiségeket és a meghatározás módját az előzőek alapján a 2. táblázat foglalja össze.

A táblázattal kapcsolatban a következőket kell megjegyezni: Az összetett- és átalakítási csillapítás elnevezések a magyar nyelvű szakmai irodalomban nem közismertek. Ezek definícióját magyarul l. [3]-ban. Lényegében mindkét mérőszám az üzemi lezárások között működő négypólusra jellemző, értékük azonban csak ohmos lezárások esetén egyezik meg. Ez esetben egyszerűen üzemi csillapításról van szó.

### 7. Összefoglalás

E cikk célkitűzése a szegmentálás alapjainak ismeretése volt. Fel kell azonban ismernünk, hogy az eddigiek alapján a módszer csak akkor látszik használhatónak, ha a négypólusok hullámátviteli tényezőjének fázisai és a feszültség-reflexiós tényezők fázisai is ismertek, így a hálózat eredő FT mátrixainak komplex elemei meghatározhatók. Ez a feltétel nem mindig adott. Egy későbbi cikk célkitűzése lenne

### Szegmentálással meghatározható mennyiségek

<b>ADOTT JELLEMZŐK:</b> $\vec{T}_n = \prod_{i=1}^n \vec{T}_i$ és $K_n = \prod_{i=1}^n K_i$ vagy $M_n = \prod_{i=1}^n M_i$ ahol $n$ a szegmensek száma $\vec{T}_e$ részletesebben: $\vec{T}_e = \begin{bmatrix} A_e & \cdot \\ C_e & \cdot \end{bmatrix}$	
<b>KARAKTERISZTIKUS MÁTRIX EGYENLET:</b> $\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \end{bmatrix} = \frac{1}{K_e} \begin{bmatrix} A_e & \cdot \\ C_e & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2' \\ 0 \end{bmatrix}$ vagy $\sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \end{bmatrix} = \frac{1}{M_e} \begin{bmatrix} A_e & \cdot \\ C_e & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2' \\ 0 \end{bmatrix}$	
<b>KARAKTERISZTIKUS EGYENLETRENDSZER:</b> $U_1' = \frac{U_0}{Z} = \frac{A_e}{K_e} U_2$ vagy $U_1' \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{U_0}{Z} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{A_e}{M_e} U_2$ $U_1'' = -\frac{C_e}{K_e} U_2$ vagy $U_1'' \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} = -\frac{C_e}{M_e} U_2$	
<b>KERESETT JELLEMZŐK:</b>	
<b>PRIMER OLDALI FESZÜLTÉG:</b> $U_1 = U_1' + U_1'' = \begin{bmatrix} A_e + C_e \\ A_e - C_e \end{bmatrix} \frac{U_2}{K_e}$	<b>FESZÜLTÉG-TRANSZFER FÜGGVÉNY:</b> $\frac{U_2}{U_1} = \frac{K_e}{A_e + C_e} = \frac{M_e}{A_e - C_e} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$
<b>ÁTVITELI TÉNYEZŐ:</b> $\Gamma = \frac{U_0}{2U_2} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{U_1' \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}}{U_2} = \frac{A_e}{M_e}$	<b>ÖSSZETETT CSILLAPÍTÁS (db):</b> $a_0 = 20 \lg  \Gamma  = 20 \lg \left  \frac{A_e}{M_e} \right $
<b>ÁTALAKÍTÁSI CSILLAPÍTÁS (db):</b> $a_s = 20 \lg \left  \frac{U_0}{2U_2} \sqrt{\frac{Z_2}{R_1 R_2}} \right  = a_0 + 10 \lg \left  \frac{Z_1 Z_2}{R_1 R_2} \right $	<b>EREDŐ FESZÜLTÉG-REFLEXIÓS TÉNYEZŐ:</b> $P_e = \frac{U_1''}{U_1} = -\frac{C_e}{A_e}$
<b>REFLEXIÓS CSILLAPÍTÁS (db):</b> $20 \lg \left  \frac{1}{P_e} \right  = 20 \lg \left  \frac{A_e}{C_e} \right $	<b>BEMENŐ IMPEDANCIA:</b> $Z_{1be} = Z_1 \frac{1 + P_e}{1 - P_e} = Z_1 \frac{A_e + C_e}{A_e - C_e}$

a szegmentálás alkalmazásának bemutatása nem determinált fázisú hullámátviteli és reflexiós tényezők esetén, mivel a szegmentálás ilyen esetekben is alkalmas a különböző csillapítások, a stabilitás és egyéb összeköttetés-jellemzők közelítő számítására.

E cikk befejezésekképpen nézzünk egy példát a szegmentálás alkalmazására determinált fázisú hullámátviteli és reflexiós tényezőkkel adott hálózat esetén.

### 8. Egy példa az alkalmazásra

Példaként vizsgáljuk meg egy egyforma impedanciákkal lezárt homogén vezeték működését abban a frekvenciatartományban, amelyben nagy veszteségű vezetéknek viselkedik (pl. hangfrekvenciás helyi kábel).

Az elrendezést és a számítási műveletek nagy részét a 6. ábra mutatja.

Az ábra alapján az összetett csillapítás meghatározásához szükséges átviteli tényező:

$$\Gamma = \frac{A_e}{M_e} = \frac{1 - p_{OT}^2 e^{-2g_0}}{e^{-g_0} (1 - p_{OT}^2)}$$

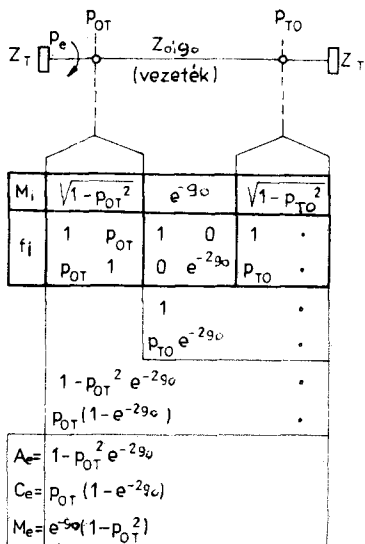
Az eredő reflexiós tényező a bal oldalon:

$$P_e = \frac{C_e}{A_e} = \frac{p_{OT} (1 - e^{-2g_0})}{1 - p_{OT}^2 e^{-2g_0}}$$

1. táblázat Szegmens típusok és FT mátrixaik elemei

SZEGMENS TÍPUS	$K_i$	$M_i$	$\vec{T}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$
	$(\Gamma_0')^{-1} \sqrt{\frac{Z_{20}}{Z_{10}}}$	$(\Gamma_0')^{-1}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\Gamma_0' \Gamma_0'')^{-1} \end{bmatrix}$
	$1 + P_i$	$\sqrt{1 - P_i^2}$	$\begin{bmatrix} 1 & P_i \\ P_i & 1 \end{bmatrix}$

H807-1T



H807-6

6. ábra

A fenti jellemzők értékének meghatározására  $p_{OT}$  és  $g_0$  komplex értékei rendelkezésre állnak, ugyanis nagy veszteségű vezeték esetén ismert, hogy:

$g_0 = a_0 \sqrt{2} e^{j45^\circ}$ , ahol  $a_0$  (Np) a hullámcillapítás, amelyről tudjuk, hogy:

$$a_0 = \sqrt{\frac{R\omega C}{2}} \cdot l,$$

és ez a frekvencia függvényében a vezeték primer jellemzőiből meghatározható.

Hasonlóképpen meghatározható  $p_{OT}$  komplex értéke is, mert

$$p_{OT} = \frac{Z_0 - Z_T}{Z_0 + Z_T}, \quad \text{ahol } Z_0 = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} e^{-j45^\circ}.$$

## I R O D A L O M

- [1] Transmission Planning of Switched Telephone Networks. UIT, 1976. Genf.
- [2] Gál Mihály: Távközlőhálózatok csillapítástervezési módszereinek javítása. Egyetemi doktori értekezés, 1980.
- [3] Gál Mihály: Gondolatok a csillapításról és a hullámparamétereikről. Híradástechnika 1982. 5. szám.