Vágatfeszültségek módszere nullátort és norátort tartalmazó hálózatokra

HOLLÓS EDIT
BME Elméleti
Villamosságtan Tanszék

Nullátorok és norátorok hálózati modellekben való alkalmazását az indokolja, hogy felhasználásukkal a csatolt kétpólusokat, kétkapukat (pl. vezérelt generátort, ideális transzformátort, girátort) is tartalmazó lineáris hálózatok analízise csatolásmentes kétpólusokból: impedanciákból, független forrásokból, nullátorokból és norátorokból álló hálózatok számítására vezethető vissza. Ilyen hálózatok analízisének megoldására számos módszert ismert [1, 2, 3, 4]. Célszerűnek látszik az admittanciákból és független forrásokból álló lineáris hálózatokra alkalmazható vágatfeszültségek módszerét a nullátorokat és norátorokat is tartalmazó hálózatokra is kidolgozni. Ez ennek a cikknek a célja.

A független generátorokból és admittanciákból (impedanciákból) álló lineáris hálózatokra a vágatfeszültségek módszere [1] az

$$Y_Q V_Q = Q(Y U_g - I_g) \tag{1}$$

egyenlet alapján a vágatfeszültségek V_Q oszlopmátrixának meghatározását jelenti. (1)-ben

$$Y_Q = Q Y Q^+ \tag{2}$$

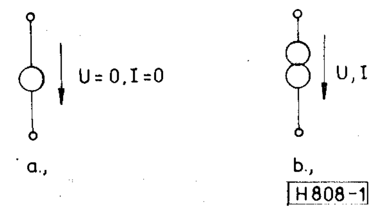
a vágatadmittancia mátrix, Q a hálózat redukált vágatmátrixa, Q^+ ennek transzponáltja, Y a hálózat ágadmittancia mátrixa, U_g a forrásfeszültségek, I_g a forrásáramok oszlopmátrixa. A mátrixok az ágak ugyanolyan sorrendje szerint vannak rendezve. A V_Q vágatfeszültségekből az ágak feszültségének U oszlopmátrixa az

$$U = Q^+ V_Q \tag{3}$$

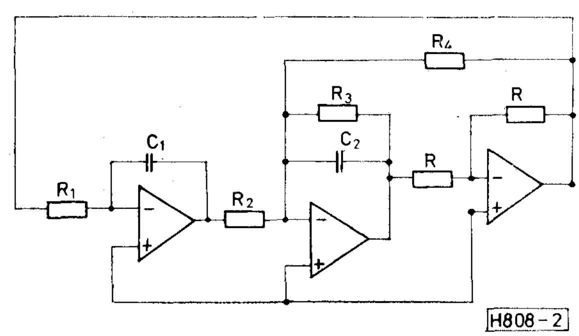
egyenlettel, vagyis a vágatfeszültségek szuperpozíciójával állítható elő. Az ágak feszültségéből pedig az admittanciák ismeretében az ágáramok kiszámíthatók.

Minthogy nullátor ($U=0$, $I=0$; *1a ábra*) és norátor (U, I tetszőleges értékű; *1b ábra*) admittanciája nem értelmezhető, így a nullátorokat és norátorokat tartalmazó hálózatra az Y ágadmittancia mátrix és az Y_Q vágatadmittancia mátrix nem írható fel, vagyis a vágatfeszültségek (1) egyenlete nem alkalmazható. A vágatfeszültségek módszerének ilyen hálózatok analíziséhez történő felhasználása a következőképpen történhet.

Beérkezett: 1981. VII. 20.



1. ábra



2. ábra

A hálózat egy ágának tekintünk egy admittaneiát, egy Thevenin-generátort, egy Norton-generátort, egy (zérus belső impedanciájú) feszültségforrást, egy (zérus belső admittanciájú) áramforrást, egy nullátort, egy norátort. Célszerű természetesen az ágak számának lehetséges csökkentése pl. azzal, hogy norátor és áramforrás soros kapcsolása áramforrással, nullátor és norátor soros kapcsolása szakadással egyenértékű s i. t. [1]. Olyan hálózatra írjuk fel az összefüggéseket, amelynek gráfjában a [4]-ben is említett két fa választása lehetséges.

Mielőtt az egyenlet felírásához a hálózat ágait sorszámmal látjuk el, válasszunk a hálózat gráfjának olyan fáját, amelyben minden egyes nullátor és feszültségforrás faág, minden norátor kötőág. A hálózat ágait négy csoportba soroljuk és sorszámmal látjuk el. Az ágak első csoportjába tartozzanak a feszültségforrások és sorszámuk legyen 1, 2, ..., b_1. A második csoportba soroljuk a nullátorokat b_1+1, b_1+2, ..., b_1+b_2 sorszámmal. A harmadik csoportba tartozzanak a további, norátort nem tartalmazó ágak. Sorszámuk: b_1+b_2+1, b_1+b_2+2, ..., $b_1+b_2+b_3$. Végül a negyedik csoportba soroljuk a norátorokat $b_1+b_2+b_3+1$, $b_1+b_2+b_3+2$, ..., $b_1+2b_2+b_3$ sorszámmal.

A számításhoz a választott fa által generált vágatrendszert használjuk fel. A vágatok sorszámát a megfelelő faélek sorszámával vegyük azonosnak és az első b_1 számú vágat irányítása egyezzék meg a forrásfeszültség irányával. A további vágatok irányítása tetszőleges. A norátorok — egyelőre ismeretlen — áramának és feszültségének vonatkozási irányát jelöljük.

A hálózatot jellemző mátrixokat az ágak, ill. a vágatok számozása sorrendjében rendezzük. A forrásfeszültségek $\mathrm{U_g}$ és a forrásáramok $\mathrm{I_g}$ oszlopmátrixán kívül képezzük a nullátorok és a norátorok áramából az $\mathrm{I_n}$ oszlopmátrixot:

$$\mathrm{U_g}=\begin{bmatrix}\mathrm{U_{g1}}\\0\\\mathrm{U_{g3}}\\0\end{bmatrix};\quad \mathrm{I_g}=\begin{bmatrix}0\\0\\\mathrm{I_{g3}}\\0\end{bmatrix};\quad \mathrm{i_n}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\mathrm{I_{n4}}\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

A hálózat Y ágadmittancia mátrixában a feszültségforrásoknak megfelelő első b_1 számú sor és oszlop nem értelmezhető. A mátrixot úgy írjuk fel, hogy a nullátorok és norátorok admittanciája helyébe 0-t írunk. A harmadik csoportba sorolt ágak admittanciájából képzett blokkot Y_3-mal jelöljük. A vágatfeszültségek V oszlopmátrixát három blokkban írjuk fel: az első b_1 számú vágatfeszültség $\mathrm{U_{g1}}$-gyel, a következő b_2 számú vágatfeszültség zérussal egyenlő, a további vágatfeszültségekből alkotott oszlopmátrixot jelöljük $\mathrm{V_e}$-vel. Így

$$\mathrm{V}=\begin{bmatrix}\mathrm{U_{g1}}\\0\\\mathrm{V_e}\end{bmatrix}. \qquad (5)$$

A Q vágatmátrixot az ágak négy és a vágatfeszültségek három csoportjának megfelelően particionáljuk:

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & Q_{11} & Q_{12}\\0 & 1 & Q_{21} & Q_{22}\\0 & 0 & Q_{31} & Q_{32}\end{bmatrix}. \qquad (6)$$

A vágatfeszültségek egyenletében a nullátorok és norátorok áramát az $\mathrm{I_n}$ oszlopmátrixszal vesszük figyelembe. A QYQ^+ mátrix első b_1-edrendű blokkja és az $Y\mathrm{U_g}$ mátrix első b_1 számú eleme nem értelmezhető, a vágatfeszültségek egyenletében az ezeket tartalmazó első b_1 számú sort elhagyjuk. A

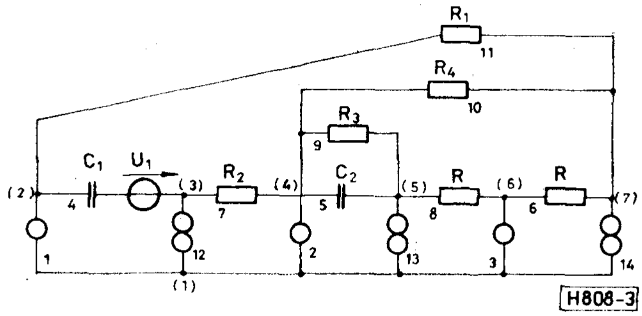
$$QYQ^+=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13}\\Y_{21} & Y_{22} & Y_{23}\\Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{bmatrix} \qquad (7)$$

jelöléssel, ahol Y_{11} b_1-edrendű, Y_{22} b_2-edrendű blokk, a vágatfeszültségek egyenlete:

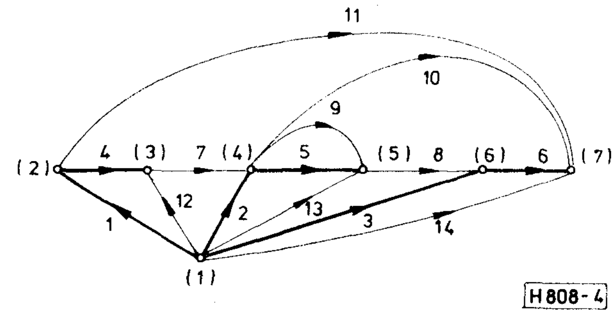
$$\begin{bmatrix}Y_{21} & Y_{22} & Y_{23}\\Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{U_{g1}}\\0\\\mathrm{V_e}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & Q_{21} & Q_{22}\\0 & Q_{31} & Q_{32}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0\\Y_3\mathrm{U_{g3}}\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\I_{g3}\\I_{n4}\end{bmatrix}\right\}. \qquad (8)$$

Ebből az egyenletből $\mathrm{V_e}$ és $\mathrm{I_{n4}}$ meghatározható.



3. ábra



4. ábra

Amennyiben Y_{33} és $Q_{22}-Y_{23}Y_{33}^{-1}Q_{32}$ invertálható, a megoldást a következőképpen is megkaphatjuk. (8)-ból:

$$Y_{23}\mathrm{V_e}=Q_{21}(Y_3\mathrm{U_{g3}}-\mathrm{I_{g3}})-Y_{21}\mathrm{U_{g1}}-Q_{22}\mathrm{I_{n4}} \qquad (9)$$

$$Y_{33}\mathrm{V_e}=Q_{31}(Y_3\mathrm{U_{g3}}-\mathrm{I_{g3}})-Y_{31}\mathrm{U_{g1}}-Q_{32}\mathrm{I_{n4}}. \qquad (10)$$

Ezekből

$$\mathrm{V_e}=Y_{33}^{-1}Q_{31}(Y_3\mathrm{U_{g3}}-\mathrm{i_{g3}})-$$
$$-Y_{33}^{-1}Y_{31}\mathrm{U_{g1}}-Y_{33}^{-1}Q_{32}\mathrm{I_{n4}} \qquad (11)$$

és

$$\mathrm{I_{n4}}=[Q_{22}-Y_{23}Y_{33}^{-1}Q_{32}]^{-1}[(Q_{21}-Y_{23}Y_{33}^{-1}Q_{31})(Y_3\mathrm{U_{g3}}-$$
$$-\mathrm{I_{g3}})+(Y_{23}Y_{33}^{-1}Y_{31}-Y_{21})\mathrm{U_{g1}}]. \qquad (12)$$

A norátorok áramát és a vágatfeszültségeket ezzel meghatároztuk. A vágatfeszültségekből pedig az ágak feszültsége — így a norátorok feszültsége is — kiszámítható.

A *2. ábrán* látható, műveleti erősítőket is tartalmazó hálózat rezonancia frekvenciája meghatározható a hurokáramok vagy a vágatfeszültségek módszerével. Ehhez a műveleti erősítőket nullátor-norátor párral helyettesítjük (*3. ábra*) és feltételezzük, hogy a C_1 kapacitású kondenzátor kezdeti feszültsége U_1, a C_2 kapacitásúé zérus. Így olyan helyettesítő kapcsolást kapunk, amelyben az ágak száma 14, a csomópontoké 7. A független hurkok száma tehát 8, a független vágatoké 6. Ezért célszerű a vágatfeszültségek módszerének alkalmazása.

A számításhoz a 4. ábrán vastagabb vonalakkal jelölt fát választottuk. (Könnyen látható, hogy a nullátorok helyett a norátorokat választva faágnak szintén fát kapunk.) A fa által generált vágatrendszer alapján a vágatfeszültségek egyenlete a $G=1/R$, $G_i=1/R_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ jelöléssel:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} G_1+G_2 & -G_2 & -G_1 & G_2 & 0 & -G_1 \\ -G_2 & G+G_2+G_4 & -(G+G_4) & -G_2 & G & -G_4 \\ -G_1 & -(G+G_4) & G+G_1+G_4 & 0 & -G & G_1+G_4 \\ \hline G_2 & -G_2 & 0 & sC_1+G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G & -G & 0 & sC_2+G+G_3 & 0 \\ -G_1 & -G_4 & G_1+G_4 & 0 & 0 & G+G_4+G_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline V_4(s) \\ V_5(s) \\ V_6(s) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|cccccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline C_1U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{n12}(s) \\ -I_{n13}(s) \\ -I_{n14}(s) \end{array}\right]$$

Jelöltük az ágak, ill. a vágatok csoportosításának megfelelően a mátrixok particionálását. Minthogy a rezonancia frekvencia meghatározásához elegendő a norátorok áramának kifejezése és a hálózatban nincs sem áramforrás, sem feszültségforrás (az U_1/s feszültségű generátor $1/sC_1$ belső impedanciájú), a felírt egyenlet

$$Q_{22}=Q_{32}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y}_{23}=\begin{bmatrix} G_2 & 0 & -G_1 \\ -G_2 & G & -G_4 \\ 0 & -G & G_1+G_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{33}=\langle sC_1+G_2 \quad sC_2+G+G_3 \quad G+G_1+G_4\rangle$$

$$Q_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{31}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_3\mathbf{U}_{g3}=\begin{bmatrix} C_1U_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

blokkjait felhasználva kapjuk (12) alapján a norátorok áramának Laplace-transzformáltját. Ezek nevezőjének zérushelyeiből a rezonancia frekvencia kiszámítható, vagyis a

$$G[s^2C_1C_2+sC_1(G_3-G_4)+G_1G_2]=0$$

egyenlet gyökeit kell meghatározni. A gyökök $G\neq 0$ esetén:

$$s_{1,2}=\frac{G_4-G_3}{2C_2}\pm\sqrt{\left(\frac{G_4-G_3}{2C_2}\right)^2-\frac{G_1G_2}{C_1C_2}}$$

A gyök képzetes, ha $G_3=G_4$ és ekkor $s_{1,2}=\pm j/\sqrt{C_1C_2R_1R_2}$, vagyis az $R_3=R_4$ feltétel teljesülése esetén $\omega=1/\sqrt{C_1C_2R_1R_2}$ a hálózat rezonancia körfrekvenciája.

IRODALOM

[1] *Vágó I.:* A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

[2] *Davies A. C.:* Matrix analysis of networks containing nullators and norators. Electronics Letters, 1966. Vol. 2. p. 48—49.

[3] *Vágó I.:* Nullátorokat és norátorokat tartalmazó hálózati modellek számítása. Híradástechnika XXIV. évf. (1973) p. 265—268.

[4] *Hollós E.:* Hurokáramok módszere nullátort és norátort tartalmazó hálózatokra Híradástechnika XXXIII. évf. (1982) p. 497—499.

[5] *Vágó I.—Hollós E.:* Kétkapu modellezése nullátor és norátor felhasználásával. Híradástechnika XXIV. évf. (1973) p. 236—239.

[6] *Hollós E.:* Nullátort és norátort tartalmazó kétkapu modellek. Híradástechnika XXXIII. évf (1982) p. 493—496.