Hurokáramok módszere nullátort és norátort tartalmazó hálózatokra

HOLLÓS EDIT
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

Nullátorok és norátorok hálózati modellekben való felhasználásával a csatolt kétpólusokat, kétkapukat (pl. vezérelt generátort, girátort, ideális transzformátort, negatív impedancia konvertert) tartalmazó hálózatok csatolás nélküli kétpólusokból álló kapcsolás alapján számíthatók [1, 2, 3, 4]. Az ilyen — impedanciákból, független forrásokból, független generátorokból, nullátorokból, norátorokból álló — lineáris hálózatok számítására több módszer ismert [1, 5, 6]. Az impedanciákat és független generátorokat tartalmazó lineáris hálózat analízisére egyik ismert számítás a hurokáramok módszere [1]. Ez a módszer feltételezi, hogy a hálózat minden egyes ágának van véges vagy végtelen impedanciája. Minthogy sem a nullátornak (1*a* ábra: $U=0$, $I=0$), sem a norátornak (1*b* ábra: U, I tetszőleges értékű) nem tulajdonítható impedancia, ilyen kétpólusokat is tartalmazó hálózatokra a hurokáramok egyenlete az irodalomból ismert módon nem írható fel. Ebben a cikkben a hurokáramok módszerének olyan hálózatokra történő alkalmazását mutatjuk be, amely nullátorokat és norátorokat is tartalmaz. Az egyenleteket olyan hálózatra írjuk fel, amelyben az ágak következő kétféle csoportosítása lehetséges úgy, hogy mindkét csoportosításnál a 3. csoportba ugyanazok az ágak kerüljenek [1].

I. csoportosítás

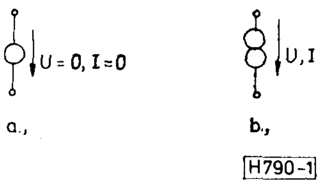
1. áramforrások (kötőágak);
2. norátorok (kötőágak);
3. impedanciák (kötőágak);
4. impedanciák (faágak);
5. nullátorok (faágak);
6. feszültségforrások (faágak).

II. csoportosítás

1. áramforrások (kötőágak);
2. nullátorok (kötőágak);
3. impedanciák (kötőágak);
4. impedanciák (faágak);
5. norátorok (faágak);
6. feszültségforrások (faágak).

A csoportosításnál és az ismertetésre kerülő számítási módszernél a zérus admittanciájú ágat zérus forrásáramú áramforrásként, a zérus impedanciájú ágat zérus forrásfeszültségű feszültségforrásként vesszük figyelembe.

Beérkezett: 1981. IV. 17.



1. ábra

A hurokáramok módszere a hurokáramok J oszlopmátrixának a

$$Z_B \mathrm{J} = B(Z\mathrm{I}_g - \mathrm{U}_g) \qquad (1)$$

egyenlet alapján történő meghatározását jelenti, ahol

$$Z_B = BZB^+ \qquad (2)$$

a hurokimpedancia mátrix, B a hálózat redukált hurokmátrixa, B^+ ennek transzponáltja, Z a hálózat ágimpedancia mátrixa, I_g a forrásáramok, U_g a forrásfeszültségek oszlopmátrixa. A mátrixok az ágak ugyanolyan sorrendje szerint vannak rendezve. Mint ismeretes, a J hurokáramokból az ágak áramának I oszlopmátrixa az

$$\mathrm{I} = B^+\mathrm{J} \qquad (3)$$

összefüggéssel, azaz a hurokáramok szuperpozíciójával állítható elő. Az impedanciák értékének ismeretében az ágáramokból a feszültségek kiszámíthatók.

Nullátorokat és norátorokat is tartalmazó hálózat Z ágimpedancia mátrixa és — ezzel együtt — a Z_B hurokimpedancia mátrixa nem értelmezhető. Ennek áthidalása a feladatunk a következőkben.

A hálózat egy-egy ágának tekintünk egy impedanciát, egy Thevenin-generátort, egy Norton-generátort, egy (zérus belső impedanciájú) feszültségforrást, egy (zérus belső admittanciájú) áramforrást, egy nullátort, egy norátort. Célszerű természetesen az ágak számának lehetséges csökkentése pl. azzal, hogy nullátor és norátor soros kapcsolása szakadással, párhuzamos kapcsolása rövidzárral, norátor és áramforrás soros kapcsolása áramforrással egyenértékű s i. t. [1].

Mielőtt a hálózat ágait sorszámmal látjuk el, válasszunk a hálózat gráfjának olyan fáját, amelyben minden egyes norátor faágnak, minden nullátor és áramforrás kötőágnak felel meg. Soroljuk ezután a hálózat ágait négy csoportba és lássuk el sorszámmal. Az ágak első csoportjába tartozzanak az áramforrások és sorszámuk legyen 1, 2, ..., b_1. A második csoportba soroljuk a nullátorokat b_1+1, b_1+2, ..., b_1+b_2 sorszámmal. A harmadik csoportba tartozzanak a további, de norátort nem tartalmazó ágak b_1+b_2+1, b_1+b_2+2, ..., $b_1+b_2+b_3$ sorszámmal. Végül a negyedik csoportba soroljuk a norátorokat és sorszámuk $b_1+b_2+b_3+1$, ..., $b_1+2b_2+b_3$.

A számításhoz a választott fa által generált hurokrendszert használjuk fel. A hurkok sorszámát a megfelelő kötőágak sorszámával vegyük azonosnak és az első b_1 számú hurok irányítása egyezzék meg a forrásáram irányával. A további hurkok irányítása tetszőleges. A norátorok — egyelőre ismeretlen — feszültségének és áramának vonatkozási irányát is jelöljük.

A hálózatot jellemző mátrixokat az ágak, ill. hurkok számozása sorrendjében rendezzük. Így a hurokáramok oszlopmátrixa

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{g1}\\ 0\\ \mathrm{J}_e\end{bmatrix} \tag{4}$$

alakban írható, ahol I_{g1} az áramforrások forrásáramából, 0 a nullátorok áramából képzett oszlopmátrix és J_e az ismeretlen hurokáramok oszlopmátrixa. A forrásáramok I_g és a forrásfeszültségek U_g oszlopmátrixán kívül képezzük a nullátorok és a norátorok feszültségéből az U_n oszlopmátrixot:

$$\mathrm{I}_g=\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{g1}\\ 0\\ \mathrm{I}_{g3}\\ 0\end{bmatrix};\quad \mathrm{U}_g=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \mathrm{U}_{g3}\\ 0\end{bmatrix};\quad \mathrm{U}_n=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \mathrm{U}_{n4}\end{bmatrix} \tag{5}$$

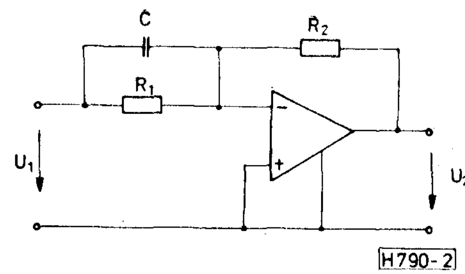
A hálózat Z ágimpedancia mátrixában az áramforrásoknak megfelelő első b_1 számú sor és oszlop nem értelmezhető. A mátrixot úgy írjuk fel, hogy a nullátorok és a norátorok impedanciája helyébe 0-t irunk. A harmadik csoportba sorolt ágak impedanciájából képzett blokkot Z_3-mal jelöljük. A B hurokmátrixot az ágak négy és a hurokáramok három csoportjának megfelelően particionáljuk:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & B_{11} & B_{12}\\ 0 & 1 & B_{21} & B_{22}\\ 0 & 0 & B_{31} & B_{32}\end{bmatrix} \tag{6}$$

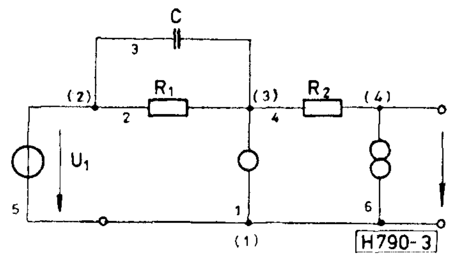
A hurokáramok egyenletében a nullátorok és a norátorok feszültségét az U_n oszlopmátrixszal vesszük figyelembe. A BZB^+ mátrix első b_1-edrendű blokkja és a $Z\mathrm{I}_g$ mátrix első b_1 számú eleme nem értelmezhető, a hurokáramok egyenletében az ezeket tartalmazó első b_1 számú sort elhagyjuk. A

$$BZB^+=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}\\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33}\end{bmatrix} \tag{7}$$

jelöléssel, ahol Z_{11} b_1-edrendű, Z_{22} b_2-edrendű kvadratikus blokk, a hurokáramok egyenlete:



2. ábra



3. ábra

$$\begin{bmatrix}Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}\\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{g1}\\ 0\\ \mathrm{J}_e\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & B_{21} & B_{22}\\ 0 & B_{31} & B_{32}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0\\ Z_3\mathrm{I}_{g3}\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \mathrm{U}_{g3}\\ \mathrm{U}_{n4}\end{bmatrix}\right\} \tag{8}$$

Ebből az egyenletből J_e és U_{n4} meghatározható.

Amennyiben Z_{33} és $B_{22}-Z_{23}Z_{33}^{-1}B_{32}$ invertálható, a megoldást a következőképpen is megkaphatjuk. (8)-ból:

$$Z_{23}\mathrm{J}_e=B_{21}(Z_3\mathrm{I}_{g3}-\mathrm{U}_{g3})-Z_{21}\mathrm{I}_{g1}-B_{22}\mathrm{U}_{n4} \tag{9}$$

$$Z_{33}\mathrm{J}_e=B_{31}(Z_3\mathrm{I}_{g3}-\mathrm{U}_{g3})-Z_{31}\mathrm{I}_{g1}-B_{32}\mathrm{U}_{n4} \tag{10}$$

Ezekből

$$\mathrm{J}_e=Z_{33}^{-1}B_{31}(Z_3\mathrm{I}_{g3}-\mathrm{U}_{g3})-Z_{33}^{-1}Z_{31}\mathrm{I}_{g1}-Z_{33}^{-1}B_{32}\mathrm{U}_{n4} \tag{11}$$

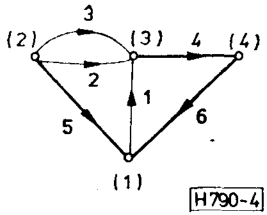
és

$$\mathrm{U}_{n4}=[B_{22}-Z_{23}Z_{33}^{-1}B_{32}]^{-1}[(B_{21}-Z_{23}Z_{33}^{-1}B_{31})(Z_3\mathrm{I}_{g3}-$$
$$-\mathrm{U}_{g3})+(Z_{23}Z_{33}^{-1}Z_{31}-Z_{21})\mathrm{I}_{g1}] \tag{12}$$

A norátorok feszültségét és a hurokáramokat ezzel meghatároztuk. A hurokáramokból pedig az ágak árama — így a norátorok árama is — az ismert módon kiszámítható.

A hurokáramok módszerének alkalmazását egy egyszerű példán mutatjuk be. A *2. ábrán* vázolt hálózat $\mathrm{U}_2/\mathrm{U}_1$ komplex átviteli függvényének az ω körfrekvencia függvényében való meghatározásához a *3. ábrán* feltüntetett helyettesítő kapcsolást használjuk fel. Minthogy ebben a keresett U_2 egy norátor feszültsége, a hurokáramok (8) egyenletéből (12) szerint kifejezhető.

A hálózat gráfjában *(4. ábra)* vastagabb vonalak



4. ábra

jelölik a számításhoz választott fa ágait. Így a hurokáramok egyenlete:

$$\left[\begin{array}{c|cc} R_2 & R_2 & R_2 \\ \hline R_2 & R_1+R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 & R_2+1/j\omega C \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline J_1 \\ J_2 \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_1 \\ \hline -U_2 \end{array}\right]$$

vagyis

$$B_{21}=[0\quad 0\quad 1\quad 0];\qquad B_{22}=1;\qquad Z_{23}=[R_2\quad R_2];$$

$$B_{31}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};\qquad B_{32}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$Z_{33}=\begin{bmatrix} R_1+R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2+\dfrac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

Ezekből (12) alapján:

$$U_{n4}=U_2=\left(1+\frac{R_2}{R_1}+j\omega CR_2\right)\frac{R_2+j\omega CR_1R_2}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}(-U_1)$$

és így

$$\frac{U_2}{U_1}=-\left(\frac{R_2}{R_1}+j\omega CR_2\right)$$

a keresett átviteli függvény.

IRODALOM

[1] *Vágó I.:* A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

[2] *Davies A. C.:* Nullator-norator equivalent networks for controlled sources. Proc. of IEEE, 1957. p. 722–723.

[3] *Vágó I.—Hollós E.:* Kétkapu modellezése nullátor és norátor felhasználásával. Híradástechnika XXIV. évf. (1973) p. 236–239.

[4] *Hollós E.:* Nullátort és norátort tartalmazó kétkapu modellek. Híradástechnika XXXIII. évf. (1982) p. 493–496.

[5] *Davies A. C.:* Matrix analysis of networks containing nullators and norators. Electronics Letters, 1966. Vol. 2. p. 48–49.

[6] *Vágó I.:* Nullátorokat és norátorokat tartalmazó hálózati modellek számítása. Híradástechnika XXIV. évf. (1973) p. 265–268.