

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BHG

ORION

TERTA

Laczkó Endre
Bernhardt Richárd
Dr. Eisler Péter
Dr. Gosztony Géza
Honti Ottó
Klug Miklós
Tölgyesi László

Jakubik Béla
Csernoch János
Froemel Károly
Sass Károly
Szabó Károly
Szász Gerő

Bánsági Pál
Baján Tibor
Bendek Elek
Halmi Gábor
Hutter Mihály

Zaj hatása a PCM-jelek átvitelére

C SERNOCH J ÁN O S
O R I O N

1. PROBLÉMA ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA (3)

Az átvitel folyamán a digitális jelekre zaj szuperponálódik (1. ábra). Ez a körülmény befolyásolja a hibarányít. Hibázás akkor következik be, ha a döntés pillanatában a zaj és a jelközi tranzienst együttes értéke nagyobb lesz mint a döntési küszöbszint, melyet majdnem mindig a csúcsmplitúdó felére állítanak be. Az 2. ábrán egy digitális jelsorozatot ábrázoltunk. Az ábrában feltüntettük a döntési szintet pozitív logikát feltételezve. A döntési szint nagysága „a” és a döntési időpont a minimális dzsittert szem előtt tartva to.

Ebben a fejezetben csak a zaj hatásával foglalkozunk a döntő áramkör előtt. A jelközi tranzienst hatásától eltekintünk. Most nem vesszük figyelembe az egyes áramkörök torzító hatását.

A zajról feltételezzük, hogy normális eloszlású.

A zaj-feszültség pillanat értékét jelöljük a továbbiakban

$$z = z(t)\text{-vel,}$$

a zaj-feszültség effektív értékét pedig

$$\sigma\text{-val.}$$

A zaj valószínűségi sűrűség függvénye

$$f(z) = p(z < \zeta < z + \Delta z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \Delta z.$$

A zaj eloszlásfüggvénye

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz.$$

Könnyen belátható, hogy

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 1,$$

továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z) dz = \sigma^2.$$

Ez a zajfeszültség négyzetes középértékét adja meg.

A hiba fellépésének valószínűségét a következőképpen fogalmazzhatjuk meg

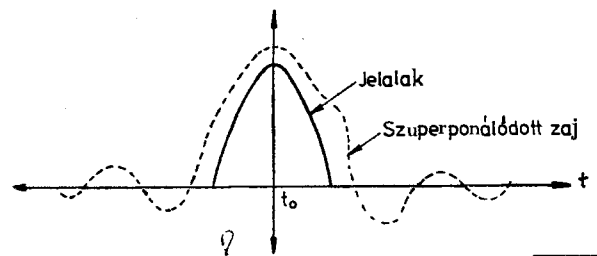
$$P_e = p(0) \cdot p(z > a) + p(1) \cdot p(z < -a).$$

Itt $p(0)$ a „0” logikai szimbólum fellépésének valószínűsége $p(1)$ a „1” logikai szimbólum fellépésének valószínűsége. A kettő között

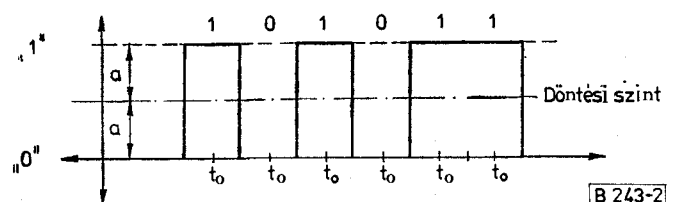
$$p(0) + p(1) = 1$$

összefüggés áll fenn. Könnyen belátható, hogy

$$p(z > a) = p(z < -a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz.$$



1. ábra. Zajnak jelle történő szuperpozíciója



2. ábra. Döntési szint a jelsorozatban

A hiba fellépésének valószínűsége ennél fogva

$$P_e = [p(0) + p(1)] \cdot p(z > a),$$

$$P_e = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

$$P_e = \text{erf}\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

A hibafüggvény definíciója a következő

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Szokás a hibaarányt a négyszögimpulzus $E = a^2$ energiájának és a középfrekvenciás sávban a vívó mindkét oldalán jelen levő $P_z = 2a^2$ zajteljesítmény függvényében is kifejezni. (Termikus zaj + interferencián.)

Mivel

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{2E}{P_z}$$

ezért a hibaarány

$$P_e = \text{erf}\left(\sqrt{\frac{2E}{P_z}}\right).$$

Az $\text{erf}(x)$ függvény egyszerű szemlélete alapján kimondhatjuk, hogy az $\text{erf}(x)$ növekszik, ha x csökken. Továbbá

$$\text{erf}(0) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \text{erf}(-\infty) = 1.$$

A számítás eredményét ami megadja a hibaarányt a döntő áramkör előtti jel/zaj függvényében a következő táblázatban foglaltuk össze.

$10 \log\left(\frac{a^2}{\sigma^2}\right) \text{ dB}$	Hibaarány
2,2	10^{-1}
7,3	10^{-2}
9,8	10^{-3}
11,4	10^{-4}
12,6	10^{-5}
13,5	10^{-6}
14,3	10^{-7}
15,0	10^{-8}
15,6	10^{-9}
16,1	10^{-10}
16,5	10^{-11}
16,9	10^{-12}

2. A HIBAARÁNY SZÁMÍTÁSÁNAK ÁLTALÁNOS MÓDSZERE (2)

2.1. A kiadott jelsor és a zaj „vektoriális” ábrázolása

Egy kiadott $U_i(t)$ időfüggvénnyel rendelkező T időtartamú impulzus E energiáját az

$$E_i = \int_0^T |U_i(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 d\omega$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg. (Az egyik integrál az időtartományban a másik az impulzus spektrumának az ismeretében a frekvencia-tartományban való számolást tesz lehetővé.)

Ezt az U_i függvényt mint egy H Hilbert-térben előforduló vektort foghatjuk fel, ahol

$$E_i = \|U_i(t)\|^2$$

$U_i(t)$ függvény elvben komplex változós függvény (szinor) is lehet.

Vezessük be az

$$S_i(t) = cU_i(t)$$

függvényt.

Az $S_i(t)$ függvényben, mely az adóoldali $U_i(t)$ információval egyenesen arányos, a C állandót úgy kell megválasztani, hogy a szóban forgó függvény a feladat megoldásának a Hilbert-térben a legjobban megfeleljen. A c arányossági tényezőt az adott moduláció sajátosságai határozzák meg.

Ugyanezt a transzformációt használjuk a sztochasztikusan változó $U_z(t)$ zajfeszültség esetén is. A zajfeszültségnek megfelelő függvény

$$S_z(t) = cU_z(t).$$

A Hilbert-térben két $x(t)$ és $y(t)$ vektor skaláris szorzatát $0 \dots T$ intervallumban az

$$(x(t)y(t)) = \int_0^T x(t)y(t)^* dt$$

kifejezés definiálja. Ez a skaláris szorzat akkor létezik, ha $x(t)$ és $y(t)$ függvények négyzetesen integrálhatók, tehát léteznek a következő integrálok

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt,$$

$$\|y(t)\|^2 = \int_0^T |y(t)|^2 dt.$$

Ez minden a gyakorlatban előforduló determinisztikus és sztochasztikus jelre érvényes. (Effektív érték!) Legyenek ennek a térnek a bázisai

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots, \varphi_k(t) \dots$$

orthonormális függvények. Ezek között a $(0, T)$ időintervallumban a következő összefüggés érvényes

$$\varphi_k(t) \cdot \varphi_l(t) = \int_0^T \varphi_k(t)\varphi_l(t)^* dt = \delta_{kl},$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } l=k \\ 0, & \text{ha } l \neq k \end{cases}$$

A H térben az $S_i(t)$ jelet és az $S_z(t)$ zajfeszültséget orthonormális sorba fejthetjük az előbb említett bázisok szerint

$$S_1(t) = \bar{S}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \quad c_k = (\varphi_k \cdot S_1(t)),$$

$$S_2(t) = \bar{S}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \varphi_k(t) \quad d_k = (\varphi_k \cdot S_2(t)).$$

A Parseval-féle összefüggés szerint

$$\|S_1(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

(jelteljesítménnyel arányos mennyiség 1 ohm ellenálláson),

$$\|S_2(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

(zajteljesítmény 1 ohm ellenálláson).

Miután feltételezésünk szerint $S_1(t)$ és $S_2(t)$ függvények négyzetesen integrálhatók, a jel és az arra szuperponált zaj X összegét is orthonormális sorba fejthetjük a H térben

$$\bar{X} = X(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \varphi_k(t), \quad X_k = \varphi_k(X(t)).$$

Ez az $X(t)$ függvénnyel arányos jel jelenik meg a demodulátor előtt.

A zajról feltételezzük, hogy fehérzaj, melynek zajteljesítmény-sűrűsége a frekvencia függvényében állandó.

A vevő abszolút zajküszöbeként, ha nincsen interferencia a

$$P_z = FkT_0B$$

mennyiséget vesszük, ahol:

F = a vevő zajtényezője,

k = $1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{ok}}$ Boltzmann-állandó,

T_0 = $293,16^\circ \text{K}$,

B = c vevő sávszélessége.

A zaj korrelációs függvénye

$$C_z(\tau) = \frac{P_z}{2c^2} \delta(\tau).$$

A két d_k , d_e minta közötti korrelációi

$$E(d_k, d_e) = \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \varphi_k(t) \varphi_e(\Theta) c_z(t - \Theta) dt d\Theta,$$

$$E(d_k, d_e) = \frac{P_z}{2c^2}$$

kifejezések adják meg.

A vevő által vett \bar{X} vektort felbonthatjuk két összetevőre

$$\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2.$$

Itt \bar{X}_1 a vevő által vett vektornak arra a H' részterre való vetülete, mely térben az U_i jelek kibocsátása történik és \bar{X}_2 a vevő által vett vektornak a H' részterre „merőleges” vetülete. Az \bar{X}_2 kizáró-

lagosan zajt jelent és nem hordoz semmilyen információt ($H' \perp H$).

A vizsgálatunkat ennek megfelelően a H' részterre korlátozhatjuk. A H' részterre „merőleges” komponensek más modulációnak (azaz a nem eredeti modulációnak) megfelelő komponensek.

2.2 Döntési tartomány

Jelöljük azt a tartományt, ahol a vevő az $U_1(t)$ jelet detektálja D_1 -gyel és azt a tartományt, ahol a vevő az $U_i(t)$ jelet detektálja D_i -vel. (Döntés.)

Jelöljük a D_i tartomány indikatrixát $\Psi_i(X)$ -szel úgy, hogy

$$\Psi_i(\bar{X}) = 1, \quad \text{ha } \bar{X} \notin D_i,$$

$$\Psi_i(\bar{X}) = 0, \quad \text{ha } \bar{X} \in D_i:$$

n állapot esetén tehát, n ilyen tartományunk van

$$(D_1, D_2, \dots, D_i, \dots, D_n).$$

Annak feltételes valószínűsége, ha az adó $S_i(t)$ jelet bocsát ki, akkor ennek a vevő oldalon az \bar{X} vektor felel meg

$$P(\bar{X}/\bar{S}_i) = P_i(\bar{X}).$$

(Itt P -vel a valószínűséget jelöltük.)

Az $S_i(t)$ jel kibocsátásának valószínűsége az adóoldalon

$$P_i = P(\bar{S}_i).$$

Érvényes a következő összefüggés

$$P(\bar{X}/\bar{S}_i) = \frac{P(\bar{X}\bar{S}_i)}{P(\bar{S}_i)}$$

n állapotú modulációs esetén a korrekt döntés valószínűsége a H' részterben

$$P(C) = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}_i) \int_{H'} P(\bar{X}/\bar{S}_i) \Psi_i(\bar{X}) d\bar{X}.$$

A D_1, D_2, \dots, D_n tartományok kijelölését elvben az indokolja, hogy redundáns kódolás esetén ezek összege nem a H' -vel egyenlő.

Az $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_i, \dots, \bar{S}_n$ jelek kibocsátásának valószínűsége egyformán valószínű

$$P(\bar{S}_i) = \frac{1}{n}.$$

Ezt figyelembevéve kapjuk, hogy

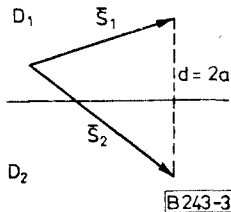
$$P(C) = \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^n P(\bar{X}/\bar{S}_i) \Psi_i(\bar{X}) d\bar{X}.$$

A vevő konstrukciója alkalmával a döntési tartomány optimális megválasztásával ezt a valószínűséget maximálissá kell tenni. A D_i és D_j tartományok határán a két tartományra vonatkozó döntési valószínűség egyenlő.

$$P(\bar{X}/\bar{S}_i) = P(\bar{X}/\bar{S}_j).$$

2.3. KOHERENS DEMODULÁCIÓ

2.3.1. Kétállapotú moduláció

Az adóoldalon kibocsátott vektorok I' tere maximum kétdimenziós. Ezt a síkot állapotsíknak nevezzük. Az $S_1(t)$ és $S_2(t)$ jelek kibocsátásának valószínűségét egyenlőnek és a zajt fehér zajnak vesszük (3. ábr).


3. ábra. Kétállapotú moduláció

A korrekt döntés valószínűsége abban az esetben, ha az adóoldalon $S_1(t)$ jelet bocsátanak ki

$$P(C/\bar{S}_1) = \int_{D_1} P(\bar{X}/\bar{S}_1) d\bar{X} = \int_{D_1} p_1(\bar{X}) d\bar{X}.$$

Ugyanez az $S_2(t)$ jel kibocsátása esetén

$$P(C/\bar{S}_2) = \int_{D_2} p(\bar{X}/\bar{S}_2) d\bar{X} = \int_{D_2} p_2(\bar{X}) d\bar{X}.$$

Csak az első összefüggéssel kell foglalkoznunk. Itt

$$p_1(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\bar{X} - \frac{|\bar{S}_1 - \bar{S}_2|}{2} \right)^2 \right],$$

ahol

$$|\bar{S}_1 - \bar{S}_2| = d = 2a,$$

$$P(C/S_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(x - \frac{d}{2} \right)^2 \right] dx,$$

$$P(C/S_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

A korrekt döntés és a P_e hibaarány között a következő összefüggés írható fel

$$P(C/\bar{S}_1) + P_e = 1.$$

Innen a hibaarány

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} e^{-u^2} du,$$

$$P_e = \text{erf} \left(\frac{d}{2\sigma} \right).$$

Figyelembe véve azt, hogy $2\sigma^2 = P_z$, a hibaarány

$$P_e = \text{erf} \left(\frac{d}{\sqrt{2P_z}} \right).$$

A feladat tehát adott modulációs eljárás esetén az állapotsíkon az

$$\bar{S}_1 - \bar{S}_2 = d$$

távolságot meghatározni.

A következőkben a kétfázisú moduláció néhány esetét vizsgáljuk meg.

a) *ASK* (Amplitude Shift Keying). Ez mint ismeretes, olyan sajátosságos amplitúdómoduláció,elynél a moduláló jel digitális és ennek megfelelően általában a modulációs termék a digitális moduláló jel M állapotának megfelelően M különböző diszkrét amplitúdójú szinuszos jel egyike lehet. Jelen esetben $M=2$ és az amplitúdómodulációt 100%-osnak tételezzük fel. Ilyenkor a logikai „1” hatása alatt van rezgés és a logikai „0” hatása alatt nincsen rezgés.

A két lehetséges jel

$$S_1(t) = a \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_2 t = \sigma \varphi_1(t),$$

$$S_2(t) = 0.$$

Ugyanez vektori formában az állapotsíkon

$$\bar{S}_1 = a\bar{\varphi}_1,$$

$$\bar{S}_2 = 0.$$

A $\varphi_1(t)$ függvény esetén mint látható

$$\|\varphi_1(t)\|^2 = \int_0^T |\varphi_1(t)|^2 dt = 1,$$

tehát ebben a térben „egységvektornak” tekinthető.

Az amplitúdóváltozás $d=a$.

A hibaarány

$$P_e = \text{erf} \left(\frac{a}{2\sigma} \right) = \text{erf} \left(\sqrt{\frac{E}{2P_z}} \right)$$

b) *FSK* (Frequency Shift Keying). Ennél a frekvenciamodulációnál a moduláló jel szintén digitális és ennek megfelelően általában a modulációs termék a digitális moduláló jel M állapotának megfelelően M különböző frekvenciájú azonos amplitúdójú jel egyike lehet.

$M=2$ esetén válasszuk a két körfrekvenciát ω_1 és ω_2 -nek. A moduláció legyen koherens, azaz a T legyen

$$\frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{és} \quad \frac{2\pi}{\omega_2}$$

egész számú sokszorososa.

A két lehetséges jel (4. ábra):

$$S_1(t) = a \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_1 t = a\varphi_1(t),$$

$$S_2(t) = a \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_2 t = a\varphi_2(t).$$

A $\bar{\varphi}_1$ és $\bar{\varphi}_2$ egységvektorok egymásra merőlegesek és skaláris szorzatuk zérus

$$(\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2) = \frac{2}{T} \int_0^T \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t dt = 0.$$

Az \bar{S}_1 és \bar{S}_2 pont közötti távolság

$$d = a\sqrt{2}.$$

A hibaarány ennek megfelelően

$$P_e = \text{erf} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sigma} \right) = \text{erf} \left(\frac{E}{P_z} \right).$$

c) PSK (Phase Shift Keying). Ez most a mi esetünkben az adó oldalon direkt kódolást és a vevő oldalon direkt dekódolást vagy koherens demodulációt jelen.

Itt a két lehetséges jel

$$S_1(t) = a \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t$$

$$S_2(t) = a \sqrt{\frac{2}{T}} \cos (\omega_0 t + \pi) = -S_1(t),$$

ugyanaz vektori formában az állapotsíkon

$$\bar{S}_1 = a\bar{\varphi}_1,$$

$$\bar{S}_2 = -a\bar{\varphi}_1.$$

Az \bar{S}_1 és \bar{S}_2 pont közötti távolság

$$S_1 - S_2 = d = 2a.$$

A hibaarány ennél fogva

$$P_e = \text{erf} \left(\frac{a}{\sigma} \right) = \text{erf} \left(\sqrt{\frac{2E}{P_z}} \right).$$

Itt érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor a moduláció alkalmával valamilyen hiba lép fel.

A helyes döntést két hibaforrás befolyásolhatja:

- pótlólagos β fáziskülönbség (fázistorzítás) a kibocsátott két jel között,
- járulékos amplitúdó moduláció.

A két lehetséges jel ilyenkor (5. ábra):

$$S_1(t) = a_1 \frac{2}{T} \cos \omega_0 t,$$

$$S_2(t) = a_2 \frac{2}{T} \cos (\omega_0 t + \pi - \beta),$$

ahol:

$$a_1 = a(1+m),$$

$$a_2 = a(1-m).$$

és $m = a$ moduláció mélysége.

Az S_1 és S_2 pont közötti távolságot geometriai megfontolásból számíthatjuk ki

$$d^2 = a^2(1+m)^2 + a^2(1-m)^2 + 2a^2(1-m^2) \cos \beta,$$

$$d = a\sqrt{2} \sqrt{(1+m^2) + (1-m^2) \cos \beta}.$$

A hibaarány:

$$P_e = \text{erf} \left(\frac{a\sqrt{2} \sqrt{(1+m^2) + (1-m^2) \cos \beta}}{2\sigma} \right),$$

$$P_e = \text{erf} \left(\sqrt{\frac{2E[(1+m^2) + (1-m^2) \cos \beta]}{P_z}} \right).$$

2.3.2. Négyállapotú moduláció (6. ábra)

A lehetséges jelek ebben a modulációban a következők:

$$S_0(t) = a_1 \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t,$$

$$S_1(t) = a_1 \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$S_2(t) = a_1 \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\omega_0 t + 2 \frac{\pi}{2} \right),$$

$$S_4(t) = a_1 \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\omega_0 t + 3 \frac{\pi}{2} \right),$$

A rendszerhez a következő egységvektorokat választjuk:

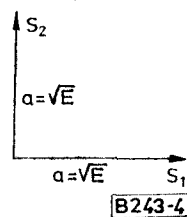
$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right).$$

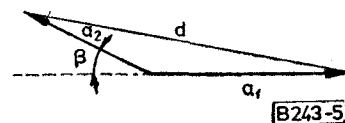
Könnyen belátható, hogy

$$S_0^2(t) + S_1^2(t) = S_2^2(t) + S_3^2(t) = a_1^2 \frac{2}{T}$$

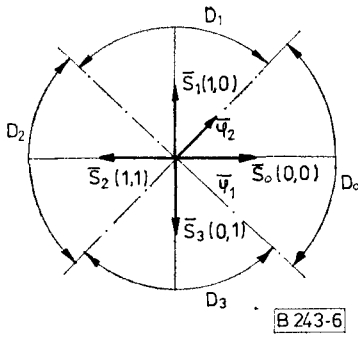
ahol: a_1^2 egy dítbipár effektív értékének négyzete.



4. ábra. FSK



5. ábra. Járulékos hiba hatása a kétfázisú modulációra



6. ábra. Négyállapotú moduláció

E-mek megfelelően az \bar{S} vektor koordinátái az állapotsíkon a következők:

$$\bar{S}_0 = \bar{S}_0 \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_1 \left(-\frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bar{S}_2 = \bar{S}_2 \left(-\frac{a_1}{\sqrt{2}}, -\frac{a_1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bar{S}_3 = \bar{S}_3 \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}, -\frac{a_1}{\sqrt{2}} \right)$$

A döntési tartományt a $\bar{\varphi}_1$ és $\bar{\varphi}_2$ egységvektorok tengelyei határolják.

Mint ismeretes négyállapotú moduláció esetén az adóoldalon a moduláló PCM jelsort két bináris elem-ből álló ún. dítipárookra csoportosítják. A 0,1 szimbólumnak megfelelően ennél fogva 4 db ilyen bitpár lehetséges, melyeknek megfelelő vektorokat az állapotsíkon $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ -mal jelöljük.

A moduláló PCM jelsort úgy alakítják, hogy az időben egymás után következő

$$\dots S_{k-2}, S_{k-1}, S_k, S_{k+1}, S_{k+2} \dots$$

dítipároknak mindig csak egy eleme változzék (Gray-kód). Ha most az állapotsíkon a hiba fellépésének a valószínűségét számítjuk, akkor a vizsgálat tárgyául az $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \bar{S}_2$ és \bar{S}_3 vektor közül bármelyik vektort választhatjuk, mivel ezek előfordulási és meghibásodási valószínűsége egyformán valószínű. Válasszuk ki az \bar{S}_0 vektort.

A hiba fellépésének valószínűsége feltéve azt, hogy az adóoldalon az S_0 vektort bocsátják ki

$$P = P(\epsilon/\bar{S}_0).$$

Az, hogy a dítipár első vagy második eleme hibásodik meg egyformán valószínű. Ez a geometriai valószínűségek alapján nyilvánvaló

$$P(\bar{X} \in D_1) = P(\bar{X} \in D_3).$$

(Ez annak valószínűsége, hogy az \bar{X} vektor vagy D_1 tartományba vagy D_3 tartományba mutat.)

Az S_0 dítipár meghibásodásának két útja lehetséges. Mind a két út összetett és két esemény valószínűségéből áll. Meghibásodik az első bináris elem (első esemény) és ezt feltételezve meghibásodik a második elem is (második esemény).

Ennek valószínűsége

$$P_{1e} = P(\bar{X} \in D_1) + P(\bar{X} \in D_2/D_1),$$

mivel

$$P(X \in D_2/D_1) = \frac{P(\bar{X} \in D_1)P(\bar{X} \in D_2)}{P(\bar{X} \in D_1)} = P(\bar{X} \in D_2),$$

$$P_{1e} = P(\bar{X} \in D_1 \cup D_2) = P(\bar{X} \in D_1) + P(\bar{X} \in D_2).$$

(Az első bináris elem meghibásodása független a második elemtől.)

A második út az, hogy a második bináris elem hibásodik meg (első esemény) és ezt feltételezve hibásodik meg az első elem is (második esemény). Ennek valószínűsége hasonló okoskodással

$$P(\bar{X} \in D_3 \cup D_2) = P(\bar{X} \in D_3) + P(X \in D_2).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$P(\bar{X} \in D_1 \cup D_2) = P(\bar{X} \in D_3 \cup D_2).$$

Az „utak” egyformán valószínűek és mindegyik út valószínűsége $\frac{1}{2}$. Ennek megfelelően a hibaarány

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot [P(\bar{X} \in D_1 \cup D_2) + P(\bar{X} \in D_3 \cup D_2)],$$

$$P_e = P(\bar{X} \in D_1 \cup D_2).$$

Ez azt jelenti, hogy a hibaarány annak valószínűségét adja meg, hogy az \bar{X} vektornak a $\bar{\varphi}_1$ egységvektor tengelyére való vetülete pozitív előjel helyett negatív előjelű. Így a feladatot két állapotú PSK hibaarányának meghatározására vezettük vissza. Ekkor

$$d = 2 \frac{a_1}{\sqrt{2}} = 2a.$$

A hibaarány ennek megfelelően

$$P_e = \text{erf} \left(\frac{a}{\sigma} \right) = \text{erf} \left(\sqrt{\frac{2E}{P_z}} \right)$$

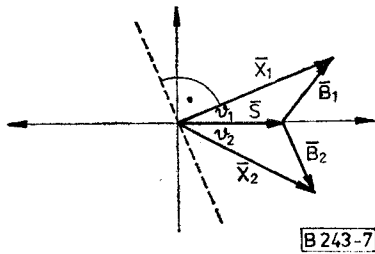
A 8 és 16 állapotú moduláció hibaarányának meghatározása hasonló, így ennek analizését mellőzzük.

2.4. DIFFERENCIÁL-DEMÓDULÁCIÓ

(7. ábra)

Differenciál-demoduláció esetén nem rendelkezünk zajmentes referencia vivővel. A döntés mindig az előzően detektált szimbólum figyelembevételével történik. Ez azt jelenti, hogy egy

$$\dots \bar{X}_{k-2}, \bar{X}_{k-1}, \bar{X}_k, \bar{X}_{k+1}, \bar{X}_{k+2} \dots$$



B 243-7

7. ábra. Differenciál demoduláció

PCM jelfolyam esetén mindig az időben egymás után következő

$$\bar{X}_k, \bar{X}_{k+1}$$

vektorokat hasonlítjuk össze.

Az összehasonlítás alkalmával az \bar{X}_{k+1}, \bar{X}_k vektorokat azonos fázisúnak ítéljük, ha az \bar{X}_{k+1} vektor abban a félsíkban helyezkedik el, melynek határoló egyenese merőleges az \bar{X}_k vektorra.

Ellentétes esetben az \bar{X}_k, \bar{X}_{k+1} vektorokat ellentétes fázisúaknak ítéljük meg. Tehát minden egyes döntési pillanatban a döntési tartomány határa az előző döntési pillanatban felvett \bar{X}_k vektor helyzetétől függ.

Tételezzük fel most az egyszerűség kedvéért, hogy az adó oldalon két jel kibocsátása azonos fázisban történik. Jelöljük most a vevőoldalon demodulált két vektort

$$\bar{X}_1 = \bar{S} + \bar{B}_1$$

$$\bar{X}_2 = \bar{S} + \bar{B}_2\text{-vel.}$$

A különbséget a két vektor között a \bar{B}_1 és \bar{B}_2 zajvektorok okozzák (7. ábra).

A döntés akkor hibamentes, ha az X_2 vektor a szagatott határvonalnak arra a felére esik, ahol az X_1 vektor található.

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 - \theta_1 = \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{ill.} \quad 0 < \cos \theta < 1.$$

(A θ_1 és θ_2 szögeket előjelesen kell venni.)

Annak valószínűségi sűrűségfüggvénye, hogy az X vektor fázisszöge

$$\theta \quad \text{és} \quad \theta + \Delta\theta$$

közé esik (8)

$$f(\theta) \Delta\theta = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \sqrt{2\pi} \frac{a}{\sigma} \cos \theta \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{a}{\sigma} \cos \theta \right) \right] \right\} \Delta\theta.$$

A valószínűségi sűrűségfüggvény páros függvény.

Két egymás utáni vektor közötti fázisszögekülönbség valószínűségi sűrűségfüggvénye a két $f(\theta)$ valószínűségi sűrűségfüggvénynek a $0 \dots 2\pi$ tartományra vett konvolúciója.

$$f_{\theta_2 - \theta_1}(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(\theta + \varphi) f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\varphi - \theta) f(\theta) d\theta.$$

A hibaarány kétállapotú moduláció esetén

$$P_e = 1 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{\theta_2 - \theta_1}(\varphi) d\varphi \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

Négyállapotú moduláció esetén

$$P_e = 1 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f_{\theta_2 - \theta_1}(\varphi) d\varphi.$$

Nyolcállapotú moduláció esetén

$$P_e = 1 - \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} f_{\theta_2 - \theta_1}(\varphi) d\varphi.$$

Az integrálás gépi úton minden esetben elvégezhető. A számítások eredményét a következő táblázatban foglaljuk össze.

$$\text{Szükséges } 10 \log \frac{E}{P_z} \text{ dB}$$

az alábbi P_e hibaarányokhoz

kódolás	száma	demoduláció	dekódolás	$P_e = 10^{-3}$	$P_e = 10^{-4}$	$P_e = 10^{-5}$	$P_e = 10^{-6}$
Direkt	2 vagy 1	koherens	direkt	6,8	8,4	9,6	10,2
Jelátmenet	2 vagy 4	koherens	jelátmenet	---	8,8	---	---
Jelátmenet	2	differenciál	direkt	7,8	9,3	10,3	11
Jelátmenet	4	differenciál	direkt	9,2	10,7	11,9	12,9
Direkt	8	koherens	direkt	---	11,7	---	---
Jelátmenet	8	koherens	jelátmenet	---	12,1	---	---
Jelátmenet	8	differenciál	direkt	---	14,7	---	---
Direkt	16	koherens	direkt	---	16,1	---	---

A táblázatban közölt értékeknél a tapasztalat szerint adott hibaarány elérésére nagyobb RF jel/zaj viszonyt kell biztosítani.

Ennek okai a következők lehetnek:

- Kódolás hibája;
- Scrambler hibája;
- Modulátor fázishiba;
- Demodulátor referencia — vivő zajának hatása;
- Belső interferencia;
- Külső interferencia;
- Nemlinearitás;
- Mikrohullámú szűrő hiba;
- KF szűrő hiba.

Tájékoztatás kedvéért az alábbiakban néhány számszerű konkrét értéket is közlünk. (Tapasztalati értékek.)

	Csatorna szám (4PSK)	
	30	120
Kódolás miatti tévesztés-növekedés	dB 1,0	1,0
Scrambler miatti tévesztés-növekedés	dB 1,0	1,0
Modulátor által okozott fázishiba	dB 0,25	0,25
Demodulátor referencia vivőjének hatása	dB 0,5	0,5
Belső interferencia	dB 1,5	1,5
Külső interferencia (kereszt polarizáció)	dB 3,0	3,0
Adó non-linearitása	dB 1,0	1,0
Mikrohullámú szűrő (sáv korlátozás az adóoldalon)	dB —	2,0
KF szűrő	dB 0,75	0,75
Összesen	ER = dB 9,0	11,0
$P_e = 10^{-3}$ tévesztéshez tartozó elméleti érték	$\log \frac{E}{P_z}$	6,8 6,8
$P_e = 10^{-3}$ tévesztéshez tartozó gyakorlati érték	$\log \frac{E}{P_z} + ER =$	15,8 17,8

Végezetül feltétlenül meg kell jegyezni azt, hogy egy meghatározott $\frac{C}{N}$ RF jel/zaj viszony felett a jeltévesztés független a mikrohullámú vevő bemenő szinttől. Ennek oka az előbb említett alapzajokra vezethető vissza, melyek hatása független a vevő bemenő szintjétől.

3. KÓDTÉVESZTÉSRE VONATKOZÓ ELŐÍRÁSOK (1)

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a hibaarányra vonatkozó ajánlásokat, ill. jelentéseket. Az időhányad az elkövetkezőkben azt jelenti, hogy azon időtartamok összege, melyben a hibaarány a feltüntetett értéknél rosszabb, nem lehet nagyobb, mint az időhányadból számított időtartam.

a) 2500 km-es referencia hálózatra vonatkozó követelmények

	Hibaarány	Időhányad
Minőség	10^{-7}	Tetszőleges hónap max. 5%
378-3 jelentés	10^{-3}	Tetszőleges hónap max. 0,05%-a
Használhatóság 557 ajánlás	10^{-3}	Év max. 0,3%-a

b) $L = 50$ km RF szakasz esetén

Minőség	$10^{-7} \times \frac{50}{2500} = 2 \cdot 10^{-5}$	Tetszőleges hónap max. 5%-a
	10^{-3}	Tetszőleges hónap max. $\frac{0,05 \times 50}{2500} = 10^{-3}\%$ -a
Használhatóság	10^{-3}	Az idő max. $\frac{0,3 \times 50}{2500} = 6 \cdot 10^{-3}\%$ -a

A használhatóság számításánál csak azokat a megszakadásokat kell számításba venni, melyek 10 sec-nál nagyobbak. Az összeköttetést megszakítottknak kell tekinteni, ha a PCM-jel eltűnik vagy a hibaarány 10^{-3} -nál nagyobb.

I R O D A L O M

- [1] O. Toutan — Y. Delcourte: Faisceaux herlzien numeriques à grande capacité 140 Mbit/s dans la bande 10,7—11,7 GHz. Commutation Transmission. 3. 1980.
- [2] Marc Mathiev: Télécommunication par faiscea hertzien. Dunad technique.
- [3] Philippe Magne: Digital Microwave Links. DT DFH PHM No 2346.
- [4] Lajkó Sándor — Dr. Lajtha György: PCM a távközlésben. Műszaki Könyvkiadó.
- [5] Jürgen Sommer: Neue PCM-Messgeräte Schiele-Schön. Berlin.