

Különleges elektróda elrendezések kapacitásának numerikus számítása

DR. NAGY JÁNOS
KKVMF

Bevezetés

Elektromágneses terek gépi analizésére kidolgozott módszerek állnak rendelkezésre [1]. A széles körűen elterjedt momentum módszerek mellett egyre inkább terjed a végelemek módszerének alkalmazása is [2]. A végelemek módszere a műszaki feladatok széles körében alkalmazható, bár elsősorban szilárd-ságtani vizsgálatokra fejlesztették ki [3].

Először a végelemek módszerének lépéseit mutatjuk be egy konkrét feladat megoldása kapcsán, majd a megoldásból viszonylag egyszerűen nyerhető kapacitás kiszámításának algoritmusát tárgyaljuk.

A Laplace egyenlet megoldása végelemek módszerével

Feladatként az 1. ábrán bemutatott, ún. centrális elrendezésű elektródák potenciál terének meghatározását tűzzük ki. A megoldás differenciál egyenlete:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

A Φ_1 és Φ_2 potenciálok az A_1 és A_2 kontúrok mentén felvett peremfeltételeket adják.

A Laplace differenciál-egyenlet helyett a problémát egyértelműen leíró variációs funkcionál minimalizálását valósítjuk meg [4]. Adott differenciál-egyenlethez tartozó variációs funkcionál megkeresése a matematikusok feladata, a mérnöknek csupán a műszaki feladat megoldásához szükséges mértékben kell megértenie.

A Laplace-egyenlethez rendelt funkcionál

$$I = \int_S |\nabla \Phi|^2 ds, \quad (2)$$

ahol: S az A_1 és A_2 kontúrok által határolt felület.

A probléma (2)-ben adott, integrál alakban megfogalmazott formája azért alkalmas a végelemek módszerével való megoldáshoz, mert az integrálás résztartományonként — végelemeikként — végezhető el. Ennek jelentőségét a végelemek módszerének legfontosabb jellegzetességei alapján tudjuk értékelni.

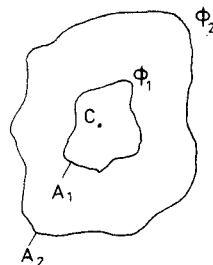
Ismeretes, hogy a numerikus módszerek a matematikai értelemben folytonos függvények helyett azok diszkrét pontokban felvett értékeit használják. A

végelemek módszerének első lépése a megoldási tartomány véges, általában tetszőleges alakú és nagyságú elemekre való bontása. Kitézött feladatunkban ezt a 2. ábrán bemutatott módon valósítjuk meg.

Centrális elrendezésű elektródák közötti térrész végelemekre osztásának egy lehetséges változata.

A végelemekre bontás végeredményben egy háló megszerkesztésével jár. A háló csomópontjainak koordinátáit általában numerikus módszerekkel határozzuk meg. A kitézött feladat megoldását megadó program ismertetésekor erre visszatérünk.

A problémát akkor tekinthetjük megoldottnak, ha a potenciál értékét a kitézött csomópontokban ismerjük és ezekből a potenciált az elemen belül tetszőleges pontban valamely általunk felvett interpolációs függvény, segítségével meghatározhatjuk. Az elemekre vonatkozó interpolációs függvények számos fajtáját alkalmazzák [3], mi a legegyszerűbb, a lineáris közelítést használjuk. Megemlítjük, hogy az interpolációs függvényt a szakirodalomban sokszor az elemre vonatkozó alakfüggvénynek is neve-



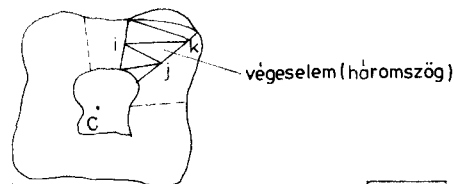
Emélfogva, Φ_1 és Φ_2 az A_1 és A_2 -vel jelölt felületek mentén felvett peremfelületeket is jelöli.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

az elektródák között,
 Φ_1 és Φ_2 előírt potenciálok
az A_1 és A_2 tetszőleges
kontúrok mentén
 S az A_1 és A_2 kontúrok
közötti felület

B 224-1

1. ábra. Centrális elrendezésű elektródák



B 224-2

2. ábra. Centrális elrendezésű elektródák közötti térrész végelemekre osztásának egy lehetséges változata

zik. Egyetlen elemre a választott lineáris interpolációs függvény [3].

$$\Phi^{(e)}(x, y) = \bar{N}^{(e)T} \cdot \bar{\Phi}^{(e)} = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (3)$$

ahol:

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \text{ az } i\text{-ik csomópont} \text{hoz tartozó alak-}$$

függvény, Φ_i az i -ik csomópont potenciálja, a T felső index pedig transzponáltat jelöl. Az a_i , b_i és c_i állandók a végelemet alkotó háromszög csúcsainak koordinátáiból számíthatók, Δ a háromszög területét jelöli.

Az N_i -ben szereplő állandók

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j \quad (4)$$

és (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) a végelem háromszög csúcspontjainak a koordinátái.

Az összefüggések a végelem csúcspontjainak az óramutató járásával ellentétes értelmű körüljárása esetén helyesek. Az egyes csúcspontokhoz tartozó interpolációs függvények az adott csúcspontban 1, a szomszédos csomópontokban zérus értéket vesznek fel, amint ez behelyettesítéssel belátható [3]. Látható, hogy (3) segítségével a végelemen belül a csúcspontokban felvett értékekből a függvényértéket lineáris interpolációval határozzuk meg. A háromszög oldalai mentén nyert függvényértékek csak az adott oldal végpontjaiban felvett értékektől függenek [4]. A (2) integrált résztartományonként kiértékelve

$$I = \sum_{e=1}^L \int_{(e)} |\nabla \Phi|^2 ds. \quad (5)$$

A (3) függvények ismeretében (5) kiszámítható [4].

Az egyes végelemekre vonatkozó integrálok az adott végelem csúcspontjainak egyelőre ismeretlen potenciál értékeitől függenek. Ha ezen ismeretlen potenciálok szerinti parciális deriváltakat képezzük és zérussá tesszük, megkapjuk az egyes végelemekhez tartozó alapegyenleteket, melyekben a Φ_i csomóponti potenciálok a meghatározandó ismeretlenek [4].

$$\bar{K} \cdot \bar{\Phi}^{(e)} = 0 \quad (6)$$

ahol:

$$K_{ij} = \frac{b_i b_j}{2\Delta} + \frac{c_i c_j}{2\Delta}$$

Ezzel a lépéssel a (2) funkcionál extremizálását hajtottuk végre [4].

Az egyes végelemekre nyert alapegyenletekből az egész rendszerre érvényes csatolt egyenletrendszert azon általánosan alkalmazott elv [3] alapján szerkeszthetjük meg, hogy egy csomópont potenciáljának értéke ugyanaz bármelyik végelemre, amelyik ezt a csomópontot tartalmazza. A rendszermátrix kitöltése numerikus módszerekkel végezhető [3].

A rendszermátrix adott peremérték adatok melletti megoldására bármilyen lineáris egyenletrendszer megoldó program alkalmazható.

Az elmondottakat összegezve az eljárás a következő lépésekből áll:

1. Hálószerkesztés a vizsgált elrendezésre.
2. Alakfüggvény (interpolációs függvény) kiválasztása.
3. A végelemekhez tartozó alapegyenletek meghatározása a variációs funkcionálból.
4. A rendszeregyenlet megszerkesztése.
5. A peremértékek figyelembe vétele, a rendszer egyenlet megoldása.

Megemlítjük, hogy a rendszeregyenlet kitöltöttége erősen függ az adott háló csomópont számozási módjától. Az általunk választott ún. centrális elrendezésben a csomópontokat sugaranként számozva olyan együttható mátrix adódik, ami megfelelő egyenletrendszermegoldó módszert választva még az ABC 80 asztali számítógépen is kb. 110 csomópontos rendszer megoldását teszi lehetővé.

A megoldó program

Az 1. ábrán adott elrendezésben az A_1 és A_2 kontúrok célszerűen polár koordinátákban adhatók meg. Természetesen a kontúrokon annyi pont értékét kell csak specifikálni amennyit a 2. ábrán vázolt háló szükségessé tesz. A program ellenőrzésére az ismertetésben az A_1 és A_2 kontúrokat R1 és R2 sugarú körökkel helyettesítjük, így a nyert numerikus eredmények közvetlenül ellenőrizhetők az ismert analitikus megoldás segítségével. A program lépései az ABC 80-ra érvényes BASIC nyelven a következők

```

10 REM VÉGESELEM MÓDSZER KOAXIÁLIS
RENDZERRE
20 REM R1 A KISEBB, R2 A NAGYOBB SUGÁR
30 REM NI A SZÖG SZERINTI OSZTÁSOK
SZÁMA
40 REM N2 A SUGÁRMENTI OSZTÁSOK
SZÁMA
50 REM U LOGIKAI VÁLTOZÓ ÉRTÉKE 0
(FALSE)
60 DATA 1.0, 2.0, 36, 3, 0
70 READ R1, R2, NI, N2, U
80 DIM X(2*N2), Y(2*N2), N3(2*N2)
90 DIM B1(3), C1(3), D1(3)
100 DIM B(N1*N2)
110 Q=2*N2-1+(N1-2)*N2*(N2+1)+
+N2*((N1-1)*N2+1)
120 DIM A(Q)
130 DIM J1(N1*N2)
140 N=N1*N2
150 IF U THEN 190
160 H1=0
170 H2=LOG(2)
180 GOTO 220
190 H1=1234
200 H2=5678
210 REM

```

Az A tömbben helyezkednek el sorfolytonosan a rendszeregyenlet együtthatói. Méretének megállapításához ismerni kell a zérustól különböző együtthatóknak a rendszeregyenletben való helyzetét, vagyis a rendszermátrix kitöltöttségi alakját. Ezt teljes egészében a csomópont számozási rendszer határozza meg.

A 220–290 címenek a J1 tömb elemeinek adunk

értéket. Ez a tömb mutatja, hogy az oszlopfolytonosan tárolt rendszermátrix együtthatók, melyek az A tömbben helyezkednek el, hányadik helyen diagonálemek. Részletes ismertetése [3]-ban megtalálható az ACTCOL nevű szubrutin leírásánál. Ennek BASIC-re átirított változatát használjuk a most ismertetett programban.

```
220 J1(1)=1
230 FOR J=2 TO N2
240 J1(J)=J1(J-1)+2:NEXT J
250 FOR J=N2+1 TO (N1-1)*2
260 J1(J)=J1(J-1)+N2+1:NEXT J
270 J1((N1-1)*N2+1)=J1((N1-1)*N2)+
  +(N1-1)*N2+1
280 FOR J=(N1-1)*N2+2 TO N1*N2
290 J1(J)=J1(J-1)+(N1-1)*N2+1:NEXT J
300 REM
```

A 310–730 címeken a rendszermátrix feltöltése történik. Ennek első fázisaként a zérus szöghöz tartozó sugárral kezdve feltölti a sugár feletti réteg X, Y változóit és kiszámítja az N3 csomópont számot. Ezek az utasítások a 310–410 címeken helyezkednek el.

```
310 F1=2*PI/N1
320 FOR Q=1 TO N1
330 FOR M=Q TO Q+1
340 F2=F1*(M-1)
350 FOR J=1 TO N2
360 R=R1+(J-1)*(R2-R1)/(N2-1)
370 X(J+(M-Q)*N2)=R*COS(F2)
380 Y(J+(M-Q)*N2)=R*SIN(F2)
390 N3(J+(M-Q)*N2)=J+(M-Q)*N2+
  +(Q-1)*N2
400 NEXT J
410 NEXT M
420 REM
```

Az utolsó réteg elérésekor figyelembe veszi a zérus szöghöz tartozó sugár már előírt csomópont számait (430–460 címek).

```
430 IF Q=N1 THEN 450
440 GOTO 480
450 FOR I=1 TO N2
460 N3(N2+I)=I:NEXT I
470 REM
```

A 480–590 címeken két sugár közötti rétegben az alsó sugárhatáron fekvő háromszögeknek megfelelő együtthatókat beírja a rendszermátrixba a 900-on kezdődő szubrutin segítségével.

```
480 FOR I=1 TO (N2-1)
490 S=X(I+1)*Y(I+N2)-Y(I+1)*X(I+N2)-
  -X(I)*(Y(I+N2)-Y(I+1))+Y(I)*
  (X(I+N2)-X(I+1))
500 B1(1)=Y(I+1)-Y(I+N2)
510 B1(2)=Y(I+N2)-Y(I)
520 B1(3)=Y(I)-Y(I+1)
530 C1(1)=X(I+N2)-X(I+1)
540 C1(2)=X(I)-X(I+N2)
550 C1(3)=X(I+1)-X(I)
560 D1(1)=N3(I)
570 D1(2)=N3(I+1)
```

```
580 D1(3)=N3(I+N2)
590 GOSUB 900:NEXT I
600 REM
```

A 610–730 címeken két sugár közötti rétegben a felső sugárhatáron fekvő háromszögeknek megfelelő együtthatókat beírja a rendszermátrixba a 900-on kezdődő szubrutin segítségével.

```
610 FOR I=N2+1 TO 2*N2-1
620 S=X(I-N2+1)*Y(I+1)-Y(I-N2+1)*
  X(I+1)-X(I)*(Y(I+1)-Y(I-N2+1))+
  +Y(I)*(X(I+1)-X(I-N2+1))
630 B1(1)=Y(I-N2+1)-Y(I+1)
640 B1(2)=Y(I+1)-Y(I)
650 B1(3)=Y(I)-Y(I-N2+1)
660 C1(1)=X(I+1)-X(I-N2+1)
670 C1(2)=X(I)-X(I+1)
680 C1(3)=X(I-N2+1)-X(I)
690 D1(1)=N3(I)
700 D1(2)=N3(I-N2+1)
710 D1(3)=N3(I+1)
720 GOSUB 900:NEXT I
730 NEXT Q
740 REM
750 REM
```

A 760–820 címeken a kontúrokon H1=0 és H2=LOG(2) értékeket írunk elő. Más peremértékekhez a 190 és 200 címeken levő értékeket kell beállítani és U-nak -1, (true) értéket adni a 60 cím DATA utasításában.

```
760 FOR I=1 TO N1*N2
770 B(I):NEXT I
780 REM
790 FOR I=N2 TO N1*N2 STEP N2
800 A(J1(I))=A(J1(I))*1E+20
810 B(I)=A(J1(I))*H2
820 A(J1(I-N2+1))=A(J1(I-N2+1))*1E+
  +20:NEXT I
830 REM
```

A 840–890 címeken az egyenletrendszert megoldó szubrutint hívja és kiírja a kiszámított potenciálokat az első sugáron.

```
840 GOSUB 1010
850 REM
860 FOR I=1 TO N2
870 ;B(I):NEXT I
880 STOP
890 REM
```

A 900–1000 címeken az egyes végelemekre kiszámított alapegyenletek együtthatóit beírja az A rendszeregyenlet együttható tömbbe.

```
900 FOR J=1 TO 3
910 FOR K=J TO 3
920 L1=D1(J)
930 M1=D1(K)
940 IF M1<L1 THEN 950 ELSE 960
950 L1=D1(K):M1=D1(J)
960 IF M1=1 THEN 970 ELSE 980
970 W=1:GOTO 990
980 W=J1(M1-1)-(M1-(J1(M1)-J1(M1)))+L1
```

```

990 A(W)=A(W)+(B1(J)*B1(K)*C1(J)*
      C1(K))/(2*S)
1000 NEXT K:NEXT J:RETURN

```

Az 1010–1640 címeken a 3 hivatkozásban ACTCOL néven ismertetett szimmetrikus profil mátrix megoldó program BASIC nyelvűre átirított változata helyezkedik el.

1010 REM EGYENLETMEGOLDÓ PROGRAM SZIMMETRIKUS PROFIL – MÁTRIXHOZ

```

1020 R=0
1030 FOR J=1 TO N
1040 D=J1(J)
1050 H=D-R
1060 S=J-H+2
1070 IF(H-2)<0 THEN 1400
1080 IF(H-2)=0 THEN 1260
1090 IF(H-2)>0 THEN 1100
1100 E=J-1
1110 K=R+2
1120 D1=J1(S-1)
1130 FOR I=S TO E
1140 R1=D1
1150 D1=J1(I)
1160 IF(D1-R1-1)<(I-S+1) THEN 1190
1170 H1=I-S+1
1180 GOTO 1200
1190 H1=D1-R1-1
1200 IF H1>0 THEN 1210 ELSE 1240
1210 FOR M=1 TO H1
1220 A(K)=A(K)-A(K-H1+M-1)*A(D1-
      H1+M-1)
1230 NEXT M
1240 K=K+1
1250 NEXT I
1260 R1=R+1
1270 E1=D-1
1280 K=J-D
1290 FOR I=R1 TO E1
1300 D1=J1(K+I)
1310 IF A(D1)=0 THEN 1350
1320 D2=A(I)
1330 A(I)=A(I)/A(D1)
1340 A(D)=A(D)-D2*A(I)
1350 NEXT I
1360 FOR M=1 TO H-1
1370 B(J)-A(R+1+M-1)*B(S-1+M-1)
1380 NEXT M
1390 R=D
1400 NEXT J
1410 REM
1420 FOR I=1 TO N
1430 D1=J1(I)
1440 IF A(D1)<>0 THEN 1470
1450 ; "ZÉRUS DIAGONÁLELEM A", I, '-IK
      HELYEN'
1460 STOP
1470 B(I)=B(I)/A(D1)
1480 NEXT I
1490 J=N
1500 D=J1(J)
1510 D2=B(J)
1520 J=J-1
1530 IF J<=0 THEN 1540 ELSE 1550

```

```

1540 RETURN
1550 R=J1(J)
1560 IF(D-R)<=1 THEN 1620
1570 S=J-D+R+2
1580 K=R-S+1
1590 FOR I=S TO J
1600 B(I)=B(I)-A(I+K)*D2
1610 NEXT I
1620 D=R
1630 GOTO 1510
1640 END

```

Az egyenletrendszer megoldó programot a rendszermátrix kiszámítása után használjuk csak, ezért nem okoz zavart, hogy néhány változó név már korábban felhasználásra került. Egyéb BASIC programban szubrutinként történő felhasználásakor azonban feltétlenül egyeztetni kell a felhasznált azonosítókat.

Az ismertetett program 108 csomópontból álló rendszerre a 60 címkén beírt adatokkal a következő eredményt adja a potenciál sugármenti eloszlására.

$$\begin{aligned}
 r=1 & \quad \Phi_1 = 5.19574 E - 22 \\
 r=1.5 & \quad \Phi_2 = 0.404388 \\
 r=2 & \quad \Phi_3 = 0.693153 = \ln 2
 \end{aligned}$$

Látható, hogy még ilyen durva háló esetén is az $r=1.5$ sugáron a közelítés megfelelő ($\ln 1.5 = 0.405465$). Ezekkel az adatokkal a program futási ideje 2 perc 15 mp.

A kapacitás meghatározása

A Laplace egyenletnek végeselemek módszerével nyert közelítő megoldásából a háló csomópontjainak potenciál értékeit nyerjük. A számítás során nyert adatokból azonban az elrendezés kapacitása is közvetlenül kiszámítható.

A hosszegységre eső kapacitás variációs funkcionál kifejezése [5]

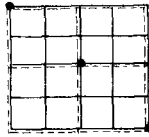
$$\frac{C}{\epsilon_0} = \frac{1}{\Phi_0^2} \int_S |\nabla \Phi|^2 ds \quad (7)$$

ahol: Φ_0 az A_2 kontúron felvett potenciál (az A_1 kontúr potenciálja zérus).

Ennek kiszámításához a $\bar{\Phi}^T \bar{A}_0 \bar{\Phi}$ másodfokú forma meghatározása szükséges [5]. A számítás során használjuk, hogy \bar{A}_0 bármely sorában ill. oszlopában szereplő elemek összege zérus, valamint azt, hogy \bar{A}_0 szimmetrikus. Nevezzük kijelölt sornak ill. oszlopnak azokat a sorokat ill. oszlopokat melyek megadott peremértékek diagonál eleméhez tartoznak. Hasonlóképpen nem-kijelölt sor és oszlop az, amely nem-kijelölt, tehát a többi potenciál diagonál eleméhez tartozik.

A 3. ábrán ennek szemléltetésére feltüntettük a kijelölt sorokat és oszlopokat egy egyszerűsített példán.

Fia összesen m csomópontból d potenciálja adott, akkor $(m-d)$ a nem-kijelölt sorok (oszlopok) száma (jelen esetben $m-d=2$). Ezek bármelyikére igaz, hogy a nem-kijelölt potenciált tartalmazó tagok ösz-



B224-3

3. ábra. A kijelölt sorok és oszlopok szemléltetése egyszerűsített (5 pontos) hálóban. Az 1., a 3. és az 5. csomópont potenciálja megadott peremérték, tehát kijelölt sor és oszlop.

szége egyenlő a kijelölt potenciál és a hozzátartozó együtthatók negatív összegének szorzatával

$$b_i = S_{i,d+1}\Phi_{d+1} + S_{i,d+2}\Phi_{d+2} + \dots + S_{i,m}\Phi_m = - (S_{i,1} + S_{i,2} + \dots + S_{i,d})\Phi_0 \quad (8)$$

ahol: az i -ik nem-kijelölt sorban a $(d+1)$ -től m -ig indexeltek a nem-kijelölt, az i -től d -ig indexeltek a kijelölt tagok, S_{ik} pedig az \bar{A}_0 mátrix elemeit jelöli.

A $\bar{\Phi}^T \bar{A}_0 \bar{\Phi}$ másodfokú formában $\bar{\Phi}^T$ -ben csak a kijelölt potenciálokat vesszük figyelembe. Ez az $\bar{A}_0 \bar{\Phi} = 0$ összefüggés fennállása miatt tehető meg [5]. Az így nyert kifejezés transzponáltja.

$$[\Phi_1 \dots \Phi_m] \bar{A}_r^T \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_d \end{bmatrix} \quad (9)$$

A baloldali sorvektor az összes, a jobboldali oszlopvektor csak a kijelölt potenciálokat tartalmazza. \bar{A}_r^T oszlopai \bar{A}_0 kijelölt sorai, amelyek természetesen összes elemüket tartalmazzák.

Ha \bar{A}_r^T -t jobbról szorozzuk két eset lehetséges. Amennyiben \bar{A}_r^T sora \bar{A}_0 nem-kijelölt oszlopából tevődik össze, [összesen $(m-d)$ esetben] megkapjuk a (8)-ban definiált b_i tényezők negatív értékét. Amennyiben \bar{A}_r^T sora \bar{A}_0 kijelölt oszlopából tevődik össze, (összesen d esetben), akkor ezeket a sorokat a bennük szereplő többi együttható negatív összegével helyettesítjük.

A baloldali sorvektort a nem-előírt és előírt potenciálok szerint felbontva az előző szakaszban leírt két lehetséges esetet különválaszthatjuk. A második lehetséges esetben kapott másodfokú formát a transzponáltak fordított sorrendű szorzataként felírva belátható, hogy az így kapott szorzat baloldali két tényezője a (8)-ban definiált b_i tényezőket adják [5].

Mindezek alapján

$$\frac{C}{\epsilon_0} = \frac{1}{\Phi_0^2} \sum_{i=1}^p b_i (\Phi_0 - \Phi_i) \quad (10)$$

ahol: Φ_0 az A_2 kontúr (célszerűen egységnyinek választott) potenciálja, p az összes nem-kijelölt potenciálú csomópontok száma (a korábbi jelölések értelmében $p = m - d$).

A (10) kifejezés azt mondja ki, hogy sorra kell venni a nem-kijelölt potenciálokat és $(\Phi_0 - \Phi_i)$ -t meg kell szorozni a hozzátartozó b_i -vel, majd a (10) szummából C/ϵ_0 értékét kapjuk.

Ennek megvalósításához a Laplace egyenlet megoldására adott programot a 740 címtől a következőképpen módosítottuk.

A 740 címen dimenzionálunk egy S2 vektort, amely tartalmazza a nem-kijelölt oszlopok összesen N1 kijelölt sorában levő együtthatók összegét és egy B2 vektort ami a (10) kifejezés b_i együtthatóit tárolja.

A korábbi jelölések és a program jelölései között az alábbi összefüggés áll fenn.

$$m - d = N1 * N2 - N1 \quad (11)$$

A 750–760 címen B2 elemeit zérusra állítjuk. A 770–1000 címen a J és K indexekkel adott oszlopokban kiszámítjuk S2 értékeit és a 950–960 címen levő ciklusban betöltjük B2 megfelelő értékeibe. Az L8 változó a kijelölt oszlopok átugrását biztosítja.

```

740 DIM S2(N1), B2(N1*N2-N1)
750 FOR I=1 TO (N1*N2-N1)
760 B2(I)=0.0:NEXT I
770 L8=1
780 FOR J=1 TO N1
790 FOR K=1+(J+1)*N2 TO N2-1+(J-1)*
      N2
800 FOR I=1 TO N1
810 S2(I)=0.0:NEXT I
820 FOR I=N2 TO N1*N2 STEP N2
830 L5=(I-N2)/N2+1
840 IF K>I THEN 900
850 IF J1(I)-J1(I-1)<(I-K)+1 THEN 880
860 S2(L5)=A(J1(I)-(I-K))
870 GOTO 940
880 S2(L5)=0.0
890 GOTO 940
900 IF J1(K)-J1(K-1)<(K-I)+1 THEN 930
910 S2(L5)=A(J1(K)-(K-I))
920 GOTO 940
930 S2(L5)=0.0
940 NEXT I
950 FOR M=1 TO N1
960 B2(K-(L8-1))=B2(K-(L8-1))+
      +S2(M):NEXT M
970 IF K+1=N2*N2 THEN 990
980 GOTO 1000
990 L8=L8+1
1000 NEXT K:NEXT J

```

Az 1010–1100 címek megegyeznek az eredeti program 740–830 címével.

Az 1110–1230 címeken az egyenletrendszer megoldása, egy sugáron számított potenciálok kiírása, a kapacitás (10) alapján való kiszámítása és kinyomtatása történik.

```

1110 GOSUB 1360
1120 REM
1130 FOR I=1 TO N2
1140 ;B(I):NEXT I

```

```

1150 C3=0:K=1
1160 FOR I=1 TO N1*N2-N1
1170 C3=C3-B2(1)*(1-B(1+K-1))
1180 IF I+K=K*N2 THEN 1200
1190 GOTO 1210
1200 K=K+1
1210 NEXT I
1220 ;'C3=', C3
1230 STOP

```

Ettől folytatva az eredeti program 890 címétől kezdődő utasítások szerepelnek. A címek eltolódása miatt az eredeti program 590 és 720 címén levő szubrutin hívások hivatkozása a következőképpen módosul

```

590 GOSUB 1250
720 GOSUB 1250

```

A kapacitás kiszámítása a Laplace egyenlet megoldóprogramhoz képest viszonylag egyszerű módosítást igényel. Az ABC80 REN utasítása az utasítások átcímzését nagyon egyszerűvé teszi [6].

A koaxiális rendszer hosszegységre számított kapacitása

$$\frac{C}{\varepsilon_0} = 2\pi \frac{1}{1n \frac{b}{a}} \quad (12)$$

ahol: $b=R2$, $a=R1$.

A 60 cím DATA utasításában ezek, valamint N1 és N2 értéke beállítható. Ha $b=2$ és $a=1$ akkor (12)-ből $C/\varepsilon_0=9.06468$ adódik.

A program ellenőrzésére a következő numerikus kísérleteket végeztük.

N1	N2	Futási ideje	C/
25	4	3'30''	9.155 84
4	12	3'10''	11.522 7
4	3	15''	11.666 5
8	3	32''	9.664 99
16	3	1'10''	9.282 04
16	5	3'	9.205 95
26	4	3'38''	9.152 12
27	4	3'50''	9.148 92

Látható, hogy a háló sűrűbbé és egyenletesebbé tételével a számított és elméleti érték közel azonos.

Megvizsgáltuk, hogy b értékének 3, 4, 5 és 1.2 választásával $N1=27$ és $N2=4$ esetén tehát a legpontosabb közelítést adó hálónál, milyen eltérés mutatkozik a (12)-ből számított és a numerikusan előállított érték között

b=3 b=4 b=5 b=1.2

Analitikus érték	5.719 16	4.532 34	3.903 95	34.4620
Numerikus érték	5.825 21	4.666 22	4.065 61	34.6257

Összefoglalás

A végelemek módszerével centrális elrendezésű hálóknak potenciál értékeit célszerűen szervezett programmal, asztali számítógéppel is meg lehet határozni a gyakorlatban felhasználható méretű feladatokra. Az elemek alapegyenleteinek kiszámítása után ezek együtthatóiból közvetlenül a rendszeregyenlet együtthatókat állítjuk össze. A centrális elrendezés csomópont számozási rendszere meghatározza a rendszer-mátrix közel sávosságot. Ennek ismeretében az együtthatók tárolása és az egyenletrendszer megoldása lényegesen egyszerűsödik. A számítás eredményeiből a program egyszerű kiegészítésével az elrendezés kapacitása is számolható.

I R O D A L O M

- [1] Dr. Zombory László—Dr. Koltai Mihály: Elektromágneses terek gépi analízise. Műszaki Könyvkiadó, 1979.
- [2] M. V. K. Chari—P. P. Silvester: Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems. John Wiley & Sons, 1980.
- [3] O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method. Third Edition McGraw Hill, 1977.
- [4] K. H. Huebner: The Finite Element Method for Engineers John Woley & Sons, 1975.
- [5] P. Daly—J. D. Helps: Direct Method of Obtaining Capacitance from Finite-Element Matrices. Electronics letters 9 th March 1972. Vol. 8. No. 5.
- [6] Az ABC 80 kazettás adatgyűjtő, kezelési leírás BRG-KKVMF; Szerkesztette Tick József és Nagy Sándor.