

HÍRADÁSTECHNIKA

Hullámdigitális szűrők struktúrája, zaja és érzékenysége

OSVÁTH LÁSZLÓ
BME Híradástechnikai
Elektronika Intézet

A digitális szűrők vonatkozásában megfigyelhető az a jelenség, hogy a napjainkban e témában írt cikkek, tanulmányok egyre nagyobb hányada foglalkozik az eszköz felépítésének, struktúrájának kérdéseivel. Újabb és újabb szűrőstruktúrák szintézis-eljárásairól olvashatunk, melyek alapelvükben a legkülönbözőbbek, de a céljuk egy: olyan felépítésű szűrő létrehozása, amely megközelíti az ideálisan pontos működésű eszköz tulajdonságait. A digitális szűrőnek ugyanis előnyös tulajdonságai mellett néhány hátrányos sajátossága is van, és ezek közül a legjelentősebbek abból a tényből fakadnak, amely a szűrőt digitálissá teszi, abból, hogy a feldolgozandó és a feldolgozott jeleket a szűrőben véges szóhosszúságú, véges pontosságú számok jelenítik meg. Ezek a sajátosságok elválaszthatatlanok a digitális szűrőtől, megszüntetésük nem, csak mérséklésük lehetséges. Hatásuk csökkentésének leghatékonyabb eszköze a szűrő szóhosszúságának növelése, ez azonban költséges és növeli a feldolgozási időt is. A másik lehetőség: olyan szűrőstruktúrát — olyan számítási algoritmust — kell használni, amely kevésbé érzékeny a kiindulási adatok pontatlanságára, illetve azt csak kis mértékben növelve tükrözi a számítás eredményében.

E felismerés jegyében született meg a kezdetben egyeduralgó kaszkád és párhuzamos struktúrájú szűrőktől teljesen eltérő felépítésű eszközök egyik legrégebbi képviselője, a hullámdigitális szűrő (wave digital filter). Cikkünkben, amely a Híradástechnika folyóiratban megjelenő sorozat 4. tagja, ezzel az eszközcsaláddal foglalkozunk. Sorozatról lévén szó, feltételezzük az [1, 2, 3] cikkek ismeretét. Fontossága miatt az ott leírtaknál kissé részletesebben érintjük a referens szűrős approximációs módszer néhány kérdését. Bemutatjuk a hullámdigitális struktúrák Fettweistől származó szintézis-eljárását [4, 5], amelyet néhány példával illusztrálunk. Ezután egyszerű hullámdigitális hálózatokban megvizsgáljuk a véges szóhosszúság hatását, különös tekintettel a kerekítési zajokra. Az általánosan alkalmazott zajmodell [3, 6] segítségével bemutatjuk, hogy a hul-

lámdigitális szűrők alaptagjaira zajtényezők értelmezhetők. E zajtényezők lehetőséget teremtenek bizonyos struktúrák kimeneti zajjellemzőinek meghatározására. Eredményünk segítségével optimális zajú hálózatok tervezhetők. Az alkalmazott módszer könnyen általánosítható. Az általánosítás során bizonyítást nyert, hogy bizonyos egységek (soros adaptorok) alkalmazása kerülendő [7].

1. Szűrőtervezés referens módszerrel

1.1. Az approximáció referens módszere

A lineáris hálózatok szintézisének első lépése a megengedett transzfer függvények meghatározása. Ez most számunkra szükségtelen, mert az alábbiakban egy transzformáció segítségével kapcsolatot építünk ki a megvalósítható analóg és digitális hálózatok transzfer függvényei között, más szóval, a digitális szűrők szintézisének első két lépését, a megengedett függvények meghatározását és az approximációs feladat megoldását az analóg szűrők körében végzett hasonló lépésekre vezetjük vissza. Hangsúlyozzuk, hogy ez a módszer nem az egyetlen [3, 8], és sok esetben nem is a legcélravezetőbb; akkor azonban, amikor fő feladatunk hullámdigitális szűrő szintézise, az approximációt így célszerű, sőt, így kell megoldanunk.

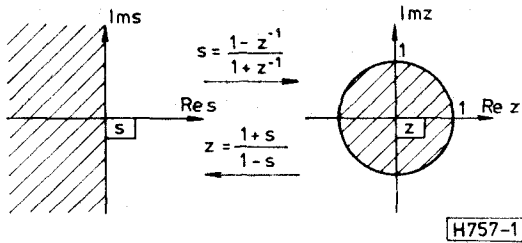
Tekintsük az (1) transzformációt [6]

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (1)$$

Ez az összefüggés az úgynevezett bilineáris leképezés. Tulajdonságait vizsgálva megállapítható, hogy kör-tartó, a z -sík egységkörét az s -sík képzetes tengelyébe, a z -sík egységkörén belülre eső területet az s -sík bal félsíkja képezi le (1. ábra).

Ha $G(s)$ egy analóg szűrő átviteli függvénye, és mint ilyen, az s -sík jobb félsíkján és képzetes tengelyén pólusokkal nem rendelkezik, akkor argumentumába (1)-et helyettesítve a z -től függő $K(z)$ függvényt kapjuk. $K(z)$ minden pólusa a z -sík egységkörén belülre kerül, így ez egy stabil, megvalósítható átviteli jellemző. Ezen felül már csak az fontos

Beérkezett: 1980. XI. 14.



H757-1

1. ábra. A bilineáris transzformáció

s számunkra, milyen lesz az egymásnak megfelelő analóg és digitális szűrő amplitúdó, fázis és futási idő karakterisztikáinak kapcsolata. A digitális szűrő z-síkjának és p komplex frekvenciasíkjának összefüggését (2) adja meg [5]:

$$z = e^{pT}. \quad (2)$$

Könnnyen ellenőrizhető, hogy ekkor a p- és az s-sík képzetes tengelyei között a bilineáris transzformáció az alábbi megfeleltetést hozza létre:

$$p = j\omega, \quad s = j\Omega, \quad \Omega = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (3)$$

Így írható, hogy

$$K(e^{j\omega T}) = G(j\Omega) \Big|_{\Omega = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}. \quad (4)$$

Látható, hogy a transzformáció az analóg szűrő amplitúdó és fáziskarakterisztikáját periódikusan a digitális szűrő ω tengelye fölé képezi le. Ezt a 2. ábra szemlélteti egy másodfokú, Csebisev típusú szűrő amplitúdó-karakterisztikáján.

Nem ilyen egyszerű a futási idő karakterisztikák összefüggése. Az analóg és digitális szűrő fáziskarakterisztikáira érvényes, hogy

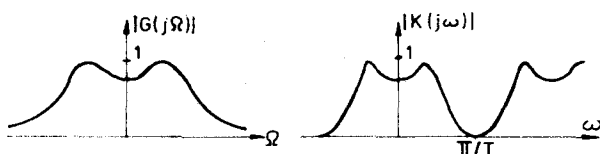
$$\varphi_K(\omega) = \varphi_G(\Omega) \Big|_{\Omega = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}.$$

Mindkét oldalt ω szerint deriválva, a jobb oldalon alkalmazva a láncszabályt:

$$\tau_K(\omega) = \frac{d\varphi_K}{d\omega} = \frac{d\varphi_G}{d\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{d\omega}.$$

Az eredmény első tényezője éppen az analóg szűrő futási idő függvénye. A második tényezőben a differenciálást elvégezve kapjuk:

$$\tau_K(\omega) = \frac{1}{2} T(1 + \Omega^2) \tau_G(\Omega) \Big|_{\Omega = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}. \quad (5)$$



H757-2

2. ábra. Az amplitúdó-karakterisztikák kapcsolata

Eredményeinket előnyösen használhatjuk fel digitális szűrő transzfer függvényének meghatározására, ha a követelmények a szűrő frekvenciatartománybeli viselkedésére vonatkoznak. A követelményeket ugyanis a (3) összefüggéssel, esetleg (5) bevonásával az analóg szűrő Ω tartományába transzformáljuk; az s-síkon meghatározzuk a követelményeket kielégítő analóg referens szűrő transzfer függvényét, majd az (1) bilineáris transzformáció segítségével a keresett z-transzformáltat.

Az analóg referens szűrő a digitális szűrő tervezésénél általában nem játszik közvetlen szerepet. Ennek az az oka, hogy a digitális szűrő realizálása már nem támaszkodik a referens szűrő felépítésére. Hullámdigitális felépítésű szűrőknél viszont éppen az a cél, hogy a kialakított struktúra ne csak a referens szűrő átviteli jellemzőit, hanem annak felépítését is tükrözze. E törekvés azzal indokolható, hogy ekkor a származtatott digitális szűrő kerekítési zaja és érzékenysége lényegesen jobb, mint a hagyományos megvalósítási formák esetében [13, 14].

1.2. A referens szűrő elemei és felépítései

Referens hálózatainkban alapelemeknek tekintjük az ellenállást, kapacitást, induktivitást, a girátort és egy különleges négyfólyust, amelynek egy változata cirkulátorból és kapacitásból épül fel [7], egy másik, reciprok változata pedig a „unit element” (egység-elem) nevet viseli [4, 9]. Jelen dolgozatban a nonreciprok változattal kerülünk csak kapcsolatba, s az egyszerű hivatkozás érdekében a továbbiakban RT elemnek nevezzük. Ez az eszköz számos érdekes tulajdonsággal rendelkezik, de számunkra ezek közül csak az lényeges, hogy kimenetére $Z_I(s)$ impedanciát kapcsolva bemeneti impedanciája

$$Z_{be}(s) = R \frac{Z_I(s) + sR}{sZ_I(s) + R} \quad (6)$$

ahol R a négyfólyusra jellemző állandó. Könnyen látható, hogy $s = \pm 1$ esetén

$$Z_{be}(1) = R, \quad Z_{be}(-1) = -R. \quad (7)$$

Egyszerűen kimutatható, hogy tetszőleges $Z_{be}(s)$ impedanciából, amelyre a (7) egyenlőségek teljesülnek valamely R érték mellett, kiemelhető egy $R = Z_{be}(1)$ jellemezte RT elem. (6) megfordítása ugyanis

$$Z_I(s) = Z_{be}(1) \frac{sZ_{be}(1) - Z_{be}(s)}{sZ_{be}(s) - Z_{be}(1)} \quad (8)$$

éppen az $s=1$ helyen értelmezett Richard-transzformáció [10], amely a tett feltételek mellett az eredetnél kisebb fokszámú, pozitív reális impedanciát eredményez. Azonnal látható, ha $Z_{be}(s)$ reaktáns impedancia, akkor realizálható RT elemek láncpárosításával. Mivel a reaktáns kétfólyosok impedanciája s-nek páratlan függvénye, a (7) egyenletek teljesülnek. A kétfólyosból kiemelhető egy RT elem, a visszamaradó impedancia pedig az eredetnél alacsonyabb fokszámú, reaktáns impedancia lesz. Így az RT elemek kiemelése mindaddig folytatható, amíg a maradék-impedancia azonosan zérus nem lesz.

A különböző felépítésű referens szűrők között számunkra különösen fontosak a létrahálózatok. Fontosságuk abban rejlik, hogy csupán két topológiai alapstruktúrát tartalmaznak: hosszági és keresztági impedanciák lánckapcsolásával épülnek fel. Kapcsolásukat a 3. ábra mutatja.

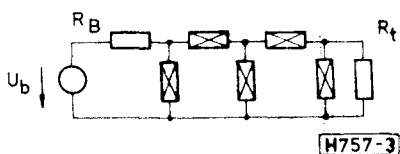
A másik, számunkra fontos struktúra a szimmetrikus négy-pólusok osztálya. A villamosan szimmetrikus reciprok négy-pólusokat két impedancia, a hídparaméterek teljesen jellemzik [10]. Ezek tulajdonképpen a négy-pólus hidkapcsolású ekvivalensében szereplő impedanciák. A hálózat be- és kimenetét ugyanakkora ellenállás zárja le, és a két oldalról látott bemeneti ellenállások, reflexiók tényezők, transzfer jellemzők is megegyeznek egymással. A hidkapcsolású ekvivalens (X-tag) a 4. ábrán látható.

2. Hullámdigitális szűrők szintézise

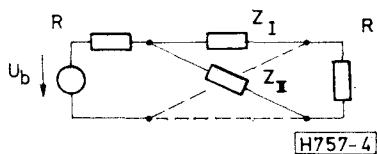
2.1. Hullámdigitális létrahálózatok

A hullámdigitális szűrők szintézisének alap gondolata tulajdonképpen igen egyszerű. Első lépése a referens szűrő realizálása, a bemenetre kapcsolt generátor és a terhelő ellenállás figyelembevételével. A nyert hálózatot egyszerű felépítésű és „szabványos” elemekre bontjuk szét. Ezek mindegyikére felírjuk az elemet leíró egyenleteket (Ohm-törvény, Kirchoff-törvények), majd azokat alkalmas paraméterek, az ún. normalizáló ellenállások bevezetésével átalakítjuk feszültségreflexiók paraméterekkel kifejezett alakba. Ugyanígy felírjuk azokat az egyenleteket is, amelyek az egyes elemek összekapcsolódását fejezik ki. A kapott egyenletrendszer teljes mélységében jellemzi a referens szűrőt, beleértve a választott realizáció topológiáját is. Ezután az egyenletrendszert alávettjük a bilineáris transzformációnak. Ekkor a transzformált egyenletek rendszere egy olyan digitális szűrőt ír le, amelynek átviteli jellemzőit a referens szűrő megfelelő jellemzőivel a bilineáris transzformáció kapcsolja össze. A hullámdigitális szűrő szintézisének utolsó lépése a végső egyenletek, illetve azok egyes csoportjainak alkalmas realizálása.

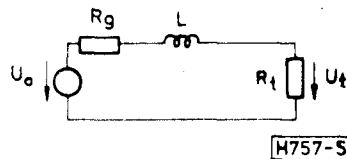
Az elmondottak pontosabb megvilágítása érdekében tekintsük az 5. ábrán vázolt létrakapcsolású referens szűrőt.



3. ábra. Létrakapcsolású referens hálózat



4. ábra. Szimmetrikus referens hálózat híd-ekvivalense



5. ábra. Analog referens szűrő

A hálózat egy lehetséges, és céljainknak leginkább megfelelő elemekre bontását a 6. ábra mutatja. A G , L , T jelű kétpólusokat leíró egyenletek:

$$\begin{aligned} U^G &= U_0 + R_g I^G \\ U^L &= s L I^L \\ U^T &= R_t I^T \end{aligned} \quad (9a)$$

Az S jelű háromkapus elem egyenletei:

$$\begin{aligned} I_1^S &= I_2^S \\ I_2^S &= I_3^S \\ U_1^S + U_2^S + U_3^S &= 0. \end{aligned} \quad (9b)$$

Az I jelű kétkapú elem egyenletei pedig:

$$\begin{aligned} I_1^I &= -I_2^I \\ U_1^I &= U_2^I. \end{aligned} \quad (9c)$$

Első látásra ez utóbbi elem feleslegesnek tűnik. Látni fogjuk azonban, hogy bevezetése rugalmassá teszi a hullámdigitális szűrő elemkészletét.

Végezetül az elemek összekapcsolási egyenletei:

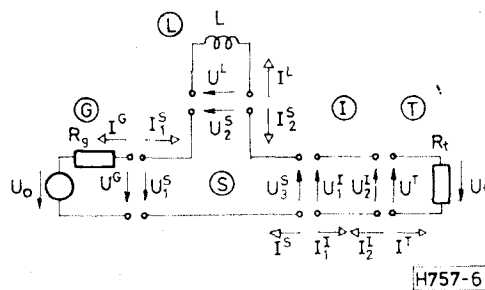
$$\begin{aligned} U^G &= U_1^S & U^L &= U_2^S & U_3^S &= U_1^I & U_2^I &= U^T \\ I^G &= -I_1^S & I^L &= -I_2^S & I_3^S &= -I_1^I & I_2^I &= -I^T \end{aligned} \quad (9d)$$

Ezután a hálózatot teljes mélységben jellemző egyenleteinket átírjuk az egyes kapuk beeső és visszavert feszültség-hullámai segítségével. A 6. ábra mérőirányával pl. az S jelű elem 1. kapujának beeső és reflektált feszültség-hulláma:

$$A_1^S = U_1^S + R_1^S I_1^S; \quad B_1^S = U_1^S - R_1^S I_1^S.$$

Itt R_1^S pozitív állandó, a kapu normalizáló ellenállása.

A feszültség-hullámok egyenleteinek felírása előtt döntünk kell az egyes kapuk normalizáló ellenállásainak értékéről. Legfontosabb szabály errenézve az, hogy az egymáshoz kapcsolódó kapuk normalizáló



6. ábra. A referens szűrő felbontása elemekre

ellenállásait azonos értékűnek kell választanunk, így az összekapcsolási egyenletnek egyszerűnek, és főképpen egyszerűen realizálhatónak adódnak. További szabály, hogy kétpólusok normalizáló ellenállását a kétpólust jellemző paraméternek (ellenállás, induktivitás, stb.) megfelelően, a háromkapus elemek (pl. az S jelű) 3. kapujának normalizáló ellenállását pedig másik két kapujának normalizáló ellenállásával összefüggésben választjuk meg. Látjuk majd, hogy ezek a szabályok a keletkező egyenletek lényeges egyszerűsödését, s így a realizálás kényelmét eredményezik.

A 6. ábra egyes kapuinál a célszerű normalizáló ellenállások:

$$R^G = R_1^S = R_g \quad R^L = R_3^S = L$$

$$R_1^I = R_3^S = R_1^S + R_2^S \quad R^T = R_2^S = B_t$$

A kétpólusok egyenletei a feszültséghullámokkal így:

$$B^G = U_0$$

$$B^L = -\frac{1-s}{1+s} A^L \quad (10a)$$

$$B^T = 0 \quad (A^T = 2U_t)$$

Az S háromkapus elemet leíró egyenletek:

$$B_1^S = (1-\alpha)A_1^S - \alpha A_2^S - \alpha A_3^S$$

$$B_2^S = -(1-\alpha)A_1^S + \alpha A_2^S - (1-\alpha)A_3^S \quad (10b)$$

$$B_3^S = -A_1^S - A_3^S$$

ahol $\alpha = R_1^S/R_3^S$:

Az I kétkapú egyenletei pedig:

$$B_1^I = \gamma A_1^I + (1-\gamma)A_2^I \quad (10c)$$

$$B_2^I = (1+\gamma)A_1^I - \gamma A_2^I$$

ahol $\gamma = (R_2^I - R_1^I)/(R_2^I + R_1^I)$

Végül az összekapcsolási egyenletek:

$$B^G = A_1^S \quad B^L = A_2^S \quad B_1^I = A_3^S \quad B^T = A_2^I \quad (10d)$$

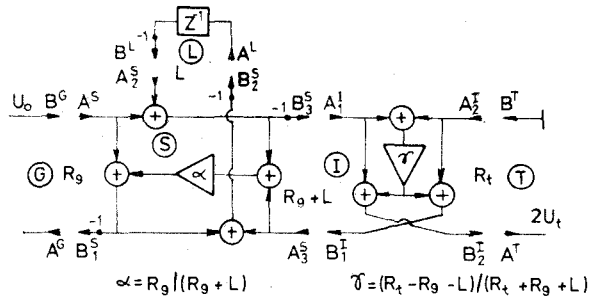
$$A^G = B_1^S \quad A^L = B_3^S \quad A_1^I = B_3^S \quad A^T = B_2^I$$

Most valamennyi egyenletünkön elvégezzük a bilineáris transzformációt. Változni csak az induktivitás egyenlete fog, de hála az alkalmas normalizáló ellenállás választásnak, nagyon egyszerű lesz:

$$B^L = -z^{-1}A^L \quad (11)$$

Ezután már csak az egyes egyenletcsoportok realizálása van hátra. Ezt a 7. ábra mutatja.

Természetesen az egész eljárásnak csak akkor van értelme, ha a realizálni kívánt átviteli jellemző kifejezhető a hálózatban valahol fellépő feszültséghullámok hányadosaként. Létrakapcsolású hálózatoknál mindig a referens szűrő átviteli tényezőjének bilineáris transzformáltját kívánjuk realizálni a származtatott digitális szűrővel, s ez a 7. ábrán látható A^T és B^G feszültséghullámok hányadosaként — egy szorzóállandótól eltekintve — valóban előáll. Ez annak köszönhető, hogy a referens szűrő leírására éppen a feszültséghullámokat választottuk.



H757-7

7. ábra. Hullámdigitális szűrő

Magyarozatot igényel, miért volt olyan lényeges az, hogy S 3. kapujának normalizáló ellenállásául az

$$R_3^S = R_1^S + R_2^S$$

értéket választottuk. Ennek részben az az oka, hogy így az S hálózatelemet realizáló ún. soros adaptort csak egy paraméter, α jellemzi, s így az adaptor igen egyszerű szerkezetű. Másrészt viszont egy ilyen adaptor a 3. kapujánál bármivel lezárható, nem jön létre olyan hurok, amely legalább egy késleltetőelemet nem tartalmazna. Ez annak köszönhető, hogy a (10b) egyenletben B_3^S explicit módon A_2^S -től nem függ.

Létrakapcsolású hálózatokban lezárásként végül is csak generátor, ellenállás, induktivitás és kapacitás szerepelhet, többkapus elemként pedig csak a soros és párhuzamos kapcsolás (adaptor), illetve az átkötés (a 6. ábra hálózatában az I jelű elem) jöhet szóba. Az előbbieket fontosabb tulajdonságait az 1. táblázat, míg az utóbbiakét a 2. táblázat tartalmazza.

Ha a normalizáló ellenállások választásánál a táblázatokban feltüntetett szabályokhoz alkalmazkodunk, egy tervezési feladat során természetesen

1. táblázat.

Az analóg kétpólus	Normalizálás	Reflexiós egyenlet	Realizálás	Jelképi ábrázolás
Induktivitás 	$R = L$	$B = -z^{-1}A$		
Kapacitás 	$R = 1/C$	$B = z^{-1}A$		
Ellenállás 	$R = R_t$	$A = 2U$ $B = 0$	$A \leftarrow$ $B \leftarrow$	
Generátor 	$R = R_g$	$A = 2U - U_0$ $B = U_0$	$\rightarrow B$ $\rightarrow A$	

H757-T1

2. táblázat.

Az analóg hálózat	Jellemző egyenletek	Kényszerfeltétel- paraméter	Reflexiós mátrix	Elvi kapcsolási rajz	Jelképes ábrázolás
	$I_1 = I_2 = I_3$	$R_3 = R_1 + R_2$ $\alpha = \frac{R_1}{R_3}$	$\begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -1-\alpha & \alpha & -1-\alpha \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$		
	$U_1 = U_2 = U_3$	$R_3 = R_1 \times R_2$ $\beta = \frac{R_3}{R_1}$	$\begin{pmatrix} -1-\beta & 1-\beta & 1 \\ \beta & -\beta & 1 \\ \beta & 1-\beta & 0 \end{pmatrix}$		
	$U_1 = U_2$ $I_1 = I_2$	$\gamma = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$	$\begin{pmatrix} \gamma & 1-\gamma \\ 1-\gamma & -\gamma \end{pmatrix}$		

H757-T2

felesleges a (10a, b, c, d) típusú bonyolult egyenletrendszer felírása, a létrakapcsolású hullámdigitális szűrő a referens szűrő kapcsolásából közvetlenül megrajzolható. Egyetlen szabadsági fok van, s ez az átkötés (illesztő adaptor) elhelyezése. Ennek eldöntése után már a normalizáló ellenállások értéke is egyértelműen határozható meg. Példaként bemutatjuk a 8. ábrán látható nem triviális referens szűrő hullámdigitális megfelelőjének tervezési lépéseit (9a, b, c, d ábra).

2.2. Rácskapcsolású hullámdigitális szűrők

Ha a referens szűrő szimmetrikus, akkor létezik hídkapcsolású ekvivalense (X-tag) [10]. A hídkapcsolásból származtatott digitális szűrőt Fettweis nyomán rácskapcsolásúnak (lattice) nevezzük [11]. A származtatás ugyanazzal a módszerrel történik, amelyet az előző szakaszban alkalmaztunk. A hálózat célszerű felbontását a 10. ábra mutatja. Most, mivel ezt az irodalomból [10] készen kapjuk, az X-tag impedanciaparaméteres leírásából indulunk ki. A 10. ábra mérőirányaival a négyfólust jellemző egyenletek:

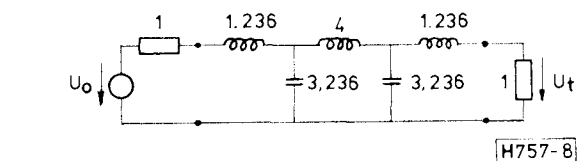
$$U_1^Z = \frac{1}{2} (Z_I + Z_{II}) I_1^Z + \frac{1}{2} (Z_{II} - Z_I) I_2^Z$$

$$U_2^Z = \frac{1}{2} (Z_{II} - Z_I) I_1^Z + \frac{1}{2} (Z_I + Z_{II}) I_2^Z$$

A beeső és visszavert feszültség hullámokat bevezetve, normalizáló ellenállásnak mindkét kapunál R -el választva, majd az egyenleteket átrendezve:

$$B_1^Z = \frac{1}{2} (S_{II} + S_I) A_1^Z + \frac{1}{2} (S_{II} - S_I) A_2^Z$$

$$B_2^Z = \frac{1}{2} (S_{II} - S_I) A_1^Z + \frac{1}{2} (S_{II} + S_I) A_2^Z$$



H757-B

8. ábra. Létrakapcsolású, szimmetrikus referens szűrő

ahol

$$S_I = \frac{Z_I - R}{Z_I + R}; \quad S_{II} = \frac{Z_{II} - R}{Z_{II} + R}$$

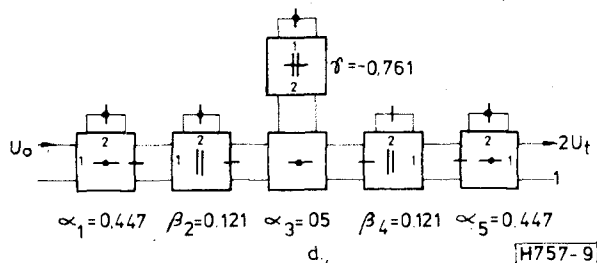
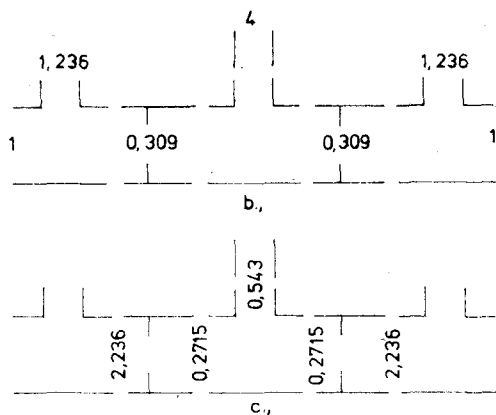
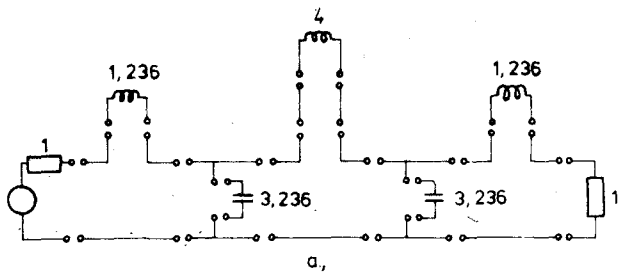
A bilineáris transzformációt elvégezve a digitális szűrőt jellemző egyenleteket nyerjük. Ha rendelkezésre állnak az S_I és S_{II} reflexiós tényezők bilineáris transzformáltjait megvalósító digitális szűrők az X-tag hullámdigitális megfelelője a 11. ábra szerinti kapcsolásban realizálható.

Az S_I és S_{II} -höz tartozó digitális szűrők a 2.1. szakaszban foglaltak szerint a Z_I és Z_{II} impedanciák valamely kanonikus realizációjából könnyen előállíthatók. További előnyös megvalósításokra ad lehetőséget az 1.2. szakaszban említett RT elem. Az ottani megállapítások értelmében reaktáns impedanciák RT elemek lánckapcsolásával is realizálhatók. Hogy az RT elem hullámdigitális megfelelőjét meghatározzuk, érdemes megvizsgálni, milyen összefüggés van az RT elem bemeneti (Z_{be}) és lezáró (Z_l) impedanciájának az $R = Z_{be}$ (1) értékű normalizáló ellenállásra vett reflexiós tényezői között.

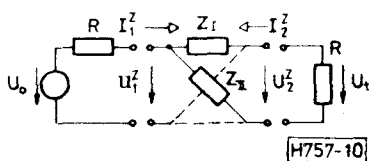
A bemeneti impedancia reflexiós tényezője:

$$S_{be} = \frac{Z_{be} - R}{Z_{be} + R}$$

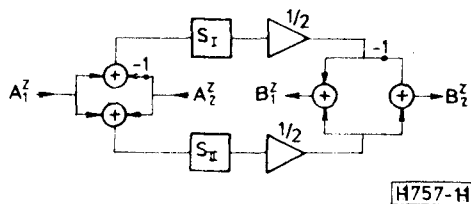
(6) behelyettesítésével:



9. ábra. Létrakapcsolású hullámdigitális szűrő tervezésének lépései



10. ábra. Hltdkapcsolású referens szűrő felbontása elemekre



11. ábra. Rácskapcsolású hullámdigitális szűrő felépítése

$$S_{be} = \frac{1-s}{1+s} \frac{Z_t - R}{Z_t + R} = \frac{1-s}{1+s} S_t$$

A hullámdigitális szűrő S_{be} és S_t bilineáris transzformáltjait realizálja. Ezek között az összefüggést

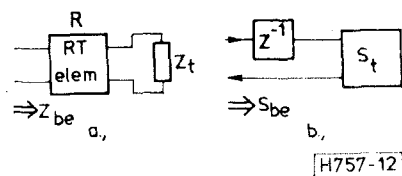
az

$$\frac{1-s}{1+s} = z^{-1}$$

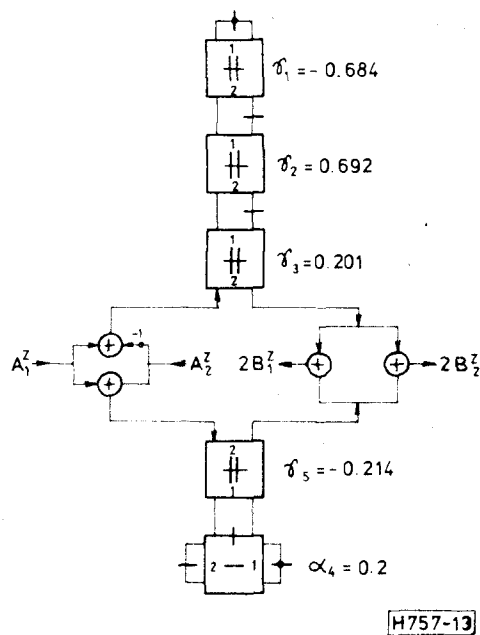
szorzótényező hozza létre. Ez egyetlen késleltető-elemmel megvalósítható, a megvalósítás módját a 12b. ábra mutatja.

A kaszkádba kapcsolt RT elemek R paramétere általában különböző. Ennek megfelelően az egyes RT elemek közé a hullámdigitális hálózatba illesztő adaptorok kerülnek (2. táblázat).

A 8. ábrán bemutatott szimmetrikus referens szűrő hullámdigitális megfelelőjét a 13. ábra mutatja. Ebben a realizációban a harmadfokú hídimpedanciát RT elemek és illesztő adaptorok realizálják.



12. ábra. RT elem és hullámdigitális megfelelője



13. ábra. Rácskapcsolású hullámdigitális szűrő

3. A véges szóhosszúság hatása RT elemes hálózatban

3.1. Illesztő adaptorok zajának jellemzői

A digitális szűrőben a jelet megjelenítő kód-szavak hossza kötött, ezért minden szorzást egy szóhosszcökkentő — újrakvantáló — eljárás követ. Így a szorzások eredménye általában pontatlan, s ez a szűrő kimeneti jelének torzulását okozza. A bemenő jel kvantált voltából eredően is hasonló jellegű hiba jelenik meg a szűrő kimenetén. Kézenfekvő, hogy ezeket a hibákat az ideális jelhez adódó, additív zajnak fogjuk fel. Digitális szűrők zajanalízisénel

feladatunk az, hogy a hálózat struktúrájának és szorzóparamétereinek ismeretében kijelentéseket tegyünk a kimeneti kerekítési zaj (roundoff noise) valamely jellemzőjére. Jelen cikkben fixpontos aritmetikájú, kerekítéses szóhosszrövidítést alkalmazó digitális szűrőket vizsgálunk [2]. Annak érdekében, hogy a jelenségeket analitikusan kezelni tudjuk, a szorzások eredményének újrakvantálásakor keletkező additív hibajelek sorozatáról a következőket tételezzük fel:

- a hibajelek ergodikusság, korrelátlanság sorozatot alkotnak,
- a hibák amplitúdó-eloszlása egyenletes,
- az egyes szorzók keltette hibák függetlenek.

Feltevésünk következménye, hogy ha a hiba maximális értéke h_0 , akkor a zaj szórásnégyzete (átlagteljesítménye):

$$P_0 = \frac{1}{3} h_0^2.$$

Feltevésünk mellett igazolható az irodalomban általánosan alkalmazott, következő tétel [12]:

ha egy digitális szűrőben valamely szorzó kimenetétől a szűrő kimenetéig értelmezett átviteli függvény $K_i(z^{-1})$, akkor a szűrő kimenetén az ezen szorzó keltette zaj szórásnégyzete:

$$P_i = \frac{1}{3} h_0^2 \frac{1}{2\pi j} \oint K_i(z^{-1}) K_i(z) z^{-1} dz \quad (12)$$

és itt az integrálást a z -sík egységkörén kell elvégezni.

Ha a $K_i(z^{-1})$ átviteli függvény stabil, belátható, hogy az egységkör bizonyos környezetében

$$K_i(z^{-1}) K_i(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_j z^j \quad (13)$$

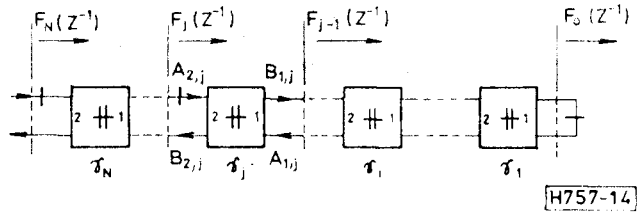
érvényes, ahol $k_{-j} = k_j$ minden j -re. Komplex függvénytanai megfontolásokból adódik, hogy (12) kifejezhető a (13) sorfejtés szabad tagjával:

$$P_i = \frac{1}{3} h_0^2 k_0. \quad (14)$$

A k_0 állandót a $K_i(z^{-1})$ zajátviteli függvény zajtényezőjének nevezzük. Figyelembe véve az egyes szorzók keltette zajok függetlenségét, a hálózat kimeneti kerekítési zajának szórásnégyzete az egyes szorzóktól származó P_i mennyiségek összege lesz.

Bár ez a zajmodell az egyetlen, amely analitikusan kezelhető, és az irodalomban általánosan elterjedt, meg kell jegyeznünk, hogy kiindulási feltételei csak korlátozott érvényűek. A modell segítségével kapott eredmények akkor közelítik jól a valóságot, ha a szűrő elegendően bonyolult. Mégis, a modell jelentősége abban áll, hogy alkalmazásával lehetőség nyílik arra, hogy a különböző realizáló struktúrák zajviszonyairól áttekintő képet kapjunk, amely – legyen bár pontatlan – értékes segítséget nyújthat a struktúra kiválasztásának feladatában.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos hullámdigitális hálózatok esetén ez a zajmodell igen egyszerű eredményeket szolgáltat, amelyek felhasználásával a szóban forgó struktúrák zajra optimalizálhatók. Az alkalmazott módszer kiterjeszhető általánosabb felépítésű hullámdigitális hálózatokra is [7], most azonban ezzel nem foglalkozunk.



14. ábra. RT elemes hullámdigitális kétpólus

Tekintsünk egy RT elemekből és illesztő adaptorból felépített struktúrát, amely legyen egy reaktáns referens impedancia hullámdigitális megfelelője (14. ábra). Az i -edik illesztő adaptor szorzójának kimenetétől a j -edik adaptor 2. kapujának kimenetéig számított átviteli függvényt $K_{i,j}(z^{-1})$ -el jelöljük. Ha az i -edik illesztő adaptor szorzójának kimenetén a hibasorozat z -transzformáltja $h_i(z^{-1})$, az ábra jelöléseivel:

$$A_{1,j} = F_{j-1}(z^{-1}) B_{1,j} + K_{i,j-1}(z^{-1}) h_i(z^{-1}). \quad (15)$$

A 2. táblázat segítségével, figyelembe véve, hogy a j -edik adaptor szorzója is termel zajt:

$$\begin{aligned} B_{1,j} &= \gamma_j A_{1,j} + (1 - \gamma_j) A_{2,j} + h_j(z^{-1}) \\ B_{2,j} &= (1 + \gamma_j) A_{1,j} - \gamma_j A_{2,j} + h_j(z^{-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

(15)-t behelyettesítve, majd $B_{1,j}$ -t eliminálva kapjuk:

$$\begin{aligned} B_{2,j} &= \frac{F_{j-1}(z^{-1}) - \gamma_j}{1 - \gamma_j F_{j-1}(z^{-1})} A_{2,j} + \frac{1 + F_{j-1}(z^{-1})}{1 - \gamma_j F_{j-1}(z^{-1})} h_j(z^{-1}) + \\ &+ \frac{1 + \gamma_j}{1 - \gamma_j F_{j-1}(z^{-1})} K_{i,j-1}(z^{-1}) h_i(z^{-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

Könnyen látható, hogy a bevezetett jelölésekkel:

$$F(z^{-1}) = z^{-1} \frac{F_{j-1}(z^{-1}) - \gamma_j}{1 - \gamma_j F_{j-1}(z^{-1})}. \quad (18)$$

A j -edik adaptor saját zajátviteli függvénye:

$$K_{j,j}(z^{-1}) = \frac{1 + F_{j-1}(z^{-1})}{1 - \gamma_j F_{j-1}(z^{-1})}. \quad (19)$$

Vezessük be $T_j(z^{-1})$ -et, amelyet a j -edik adaptor tranzit zajátviteli függvényének nevezünk!

$$T_j(z^{-1}) = \frac{1 + \gamma_j}{1 - \gamma_j F_{j-1}(z^{-1})}. \quad (20)$$

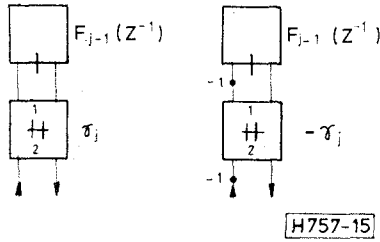
Szembetűnő, hogy (17) szerint:

$$K_{i,j}(z^{-1}) = T_j(z^{-1}) K_{i,j-1}(z^{-1}). \quad (21)$$

Először az $F_j(z^{-1})$ függvények tulajdonságait vizsgáljuk meg. A (18) összefüggés ekvivalens alakja:

$$F_j(z^{-1}) = -z^{-1} \frac{(-F_{j-1}(z^{-1}) - (-\gamma_j))}{1 - (-\gamma_j)(-F_{j-1}(z^{-1}))}. \quad (22)$$

Ez az ekvivalencia fizikailag egyszerűen interpretálható: a j -edik adaptort hullámdigitális girátorokkal fogjuk közre, és hogy az eredő transzfer függvény ne változzék, a szorzó előjelét megváltoztatjuk (15. ábra).



15. ábra. Ekvivalens hálózatok

Reaktáns referens impedancia esetén $F_0(z^{-1}) = z^{-1}$. Így:

$$F_1(z^{-1}) = z^{-1} \frac{z^{-1} - \gamma_1}{1 - \gamma_1 z^{-1}} = \frac{1}{z} \frac{1 - \gamma_1 z}{z - \gamma_1} = \frac{1}{F_1(z)}$$

Tehát:

$$F_1(z^{-1})F_1(z) = 1.$$

Ha viszont

$$F_j(z^{-1})F_j(z) = 1, \quad (23)$$

akkor ez $j+1$ -re is teljesül, hiszen

$$F_{j+1}(z^{-1}) = z^{-1} \frac{F_j(z^{-1}) - \gamma_{j+1}}{1 - \gamma_{j+1} F_j(z^{-1})} = \frac{1}{z} \frac{F_j(z^{-1})(1 - \gamma_{j+1} F_j(z))}{F_j(z^{-1})(F_j(z) - \gamma_{j+1})}$$

Egyszerűsítve az adódik, hogy

$$F_{j+1}(z^{-1}) = \frac{1}{F_{j+1}(z)}$$

Ezért reaktáns referens impedanciák esetén (23) minden j -re teljesül.

A $K_{i,j}(z^{-1})$ zajátviteli függvényt A-típusnak nevezzük, ha az egységkör valamely környezetében

$$F_j(z^{-1})K_{i,j}(z^{-1})K_{i,j}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}. \quad (24)$$

A $z \Rightarrow z^{-1}$ cserével adódik, hogy ekkor

$$F_j(z)K_{i,j}(z^{-1})K_{i,j}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k. \quad (25)$$

Könnyen igazolható, hogy a (23) összefüggés teljesülése esetén bármely illesztő adaptor $K_{i,i}(z^{-1})$ belső zajátviteli függvénye A-típusú. A (18) és (19) kifejezéseket (24)-be helyettesítve ugyanis

$$F_j(z^{-1})K_{i,j}(z^{-1})K_{i,j}(z) = z^{-1}K_{i,i}^2(z^{-1})$$

amely láthatóan (24) alakú sorba fejthető.

További gondolatmenetünk szempontjából alapvető fontosságú tény, hogy ezekben a hullámdigitális struktúrákban a zajátviteli függvények (24), (25) szerinti tulajdonsága „öröklődik”. Igaz a következő

kijelentés: ha $K_{i,j}(z^{-1})$ A-típusú, akkor $K_{i,j+1}(z^{-1})$ is A-típusú. (18) és (20) alkalmazásával:

$$F_{j+1}(z^{-1})T_{j+1}(z) = z^{-1}T_{j+1}(z^{-1})F_j(z^{-1}) \quad (26)$$

(21) és (26) alapján pedig:

$$F_{j+1}(z^{-1})K_{i,j+1}(z^{-1})K_{i,j+1}(z) = z^{-1}T_{j+1}^2(z^{-1})F_j(z^{-1})K_{i,j}(z^{-1})K_{i,j}(z)$$

amely feltételünk mellett (24) alakú sorba fejthető.

Az A-típusú zajátviteli függvények zajtényezője egyszerűen számítható. Ha $K_{i,j}(z^{-1})$ A-típusú, és zajtényezője $k_{i,j}$; $T_{j+1}(z^{-1})$ tranzit zajtényezője pedig t_{j+1} , akkor $K_{i,j+1}(z^{-1})$ zajtényezője

$$k_{i,j+1} = k_{i,j}t_{j+1} \quad (27)$$

A (20) képlet behelyettesítésével ellenőrizhető, hogy

$$T_{j+1}(z^{-1})T_{j+1}(z) = c_{j+1}T_{j+1}(z^{-1})F_j(z^{-1}) + t_{j+1} + c_{j+1}T_{j+1}(z)F_j(z) \quad (28)$$

ahol

$$c_{j+1} = \frac{\gamma_{j+1}}{1 - \gamma_{j+1}}, \quad t_{j+1} = \frac{1 + \gamma_{j+1}}{1 - \gamma_{j+1}}. \quad (29)$$

A (21) kifejezés és (28) segítségével írható:

$$K_{i,j+1}(z^{-1})K_{i,j+1}(z) = c_{j+1}T_{j+1}(z^{-1})F_j(z^{-1})K_{i,j}(z^{-1})K_{i,j}(z) + t_{j+1}K_{i,j}(z^{-1})K_{i,j}(z) + c_{j+1}T_{j+1}(z)F_j(z)K_{i,j}(z^{-1})K_{i,j}(z) \quad (30)$$

(30) első sora feltételeink szerint (24), harmadik sora pedig (25) alakú sorba fejthető, hozzájárulásuk az eredő zajtényezőhöz zérus. Az eredő zajtényező egészét a második sor szolgáltatja, úgy, ahogyan azt a (27) összefüggés állítja.

Hátra van még a belső zajátviteli függvények zajtényezőjének meghatározása. A (18) és (20) egyenletek behelyettesítésével ellenőrizhető, hogy

$$K_{i,i}(z^{-1})K_{i,i}(z) = \frac{1}{2}k_{i,i}T_i(z^{-1})F_{i-1}(z^{-1}) + k_{i,i} + \frac{1}{2}k_{i,i}T_i(z)F_{i-1}(z) \quad (31)$$

ahol

$$k_{i,i} = \frac{2}{1 - \gamma_i} = 1 + t_i$$

$k_{i,i}$ éppen a keresett belső zajtényező, hiszen (31) első és harmadik tagjának sorfejtése szabad tagot nem tartalmaz.

Az elmondottakat összegezve megállapíthatjuk, hogy egy N darab illesztő adaptort tartalmazó RT elemes hullámdigitális kétpólusban, amely reaktáns referens impedanciából származott, az i -edik illesztő adaptor szorzójára vonatkozó zajtényező:

$$k_{i,N} = (1 + t_i) \prod_{j=i+1}^N t_j. \quad (32)$$

A kétpólus kimenetén fellépő zaj szórásnégyzete pedig:

$$P_e = \frac{1}{3} h_0^2 \sum_{i=1}^N (1+t_i) \prod_{j=i+1}^N t_j. \quad (33)$$

A t_i tranzit zajtényezők pozitív értékűek. P_e tehát akkor minimális, ha valamennyi t_i érték a lehető legkisebb. E mennyiségek a struktúra megszabta határokon belül valóban minimalizálhatók. A (22) ekvivalenciatulajdonság lehetőséget ad arra, hogy az illesztő adaptor γ_i paraméterei akár pozitív, akár negatív értéket felvegyenek. A (29) összefüggés szerint kötött $|\gamma_i|$ esetén t_i minimális, ha γ_i előjele negatív. Így kijelenthető, hogy zaj szempontjából azok az RT elemes struktúrák optimálisak, amelyekben valamennyi illesztő adaptor negatív paraméterű. Optimális struktúra zajára felső becslés is adható. Ez esetben ugyanis $t_i=1$ minden i -re, és az eredő zaj szórásnégyzete:

$$P_e = \frac{2}{3} h_0^2 N. \quad (34)$$

Gyakorlati esetekben a (24) becslés igen tág határt ad.

3.2. RT elemes struktúrák érzékenysége

Digitális szűrőkben a kalkulációt végző áramkörök véges szóhosszúságának hatása nem merül ki a kerekítési zajok megjelenésében. Maguk a szorzóállandók sem ideálisan pontosak, hanem szinten kerekített értékek lehetnek. A megvalósított szűrő átviteli karakterisztikái ezért nem ideálisak, attól lényegesen eltérhetnek. Az eltérés nemcsak a szorzóállandók pontosságától, hanem a struktúra tulajdonságaitól is függhet.

A digitális szűrőt leíró hálózatjellemző érzékenységgé függvényeit hasonlóképpen értelmezzük, mint analóg hálózatok esetén [10]. Általános esetben ezek vizsgálata bonyolult. Hullámdigitális struktúráknál belátható, hogy a digitális szűrő mintegy „öröklí” a referens szűrő érzékenységi tulajdonságait [13], ez azonban ritkán jelenti a vizsgálatok jelentős egyszerűsödését. Azokban az esetekben, amikor ezeket a vizsgálatokat elvégezték, úgy találták, hogy a hullámdigitális hálózatok jóval érzékletlenebbek az egyszerűen előállítható kaszkád és párhuzamos struktúráknál [14]. Konkrét paraméterekkel megadott szűrők esetében ezt igazolja Mitra is, amikor valamivel általánosabban bemutatja, hogy a létra (ladder) és a rács (lattice) kapcsolású szűrők érzékenységi tulajdonságai jobbakké a kaszkád kapcsolás hasonló jellemzőinél [15].

E cikkben nem vállalkozhattunk arra, hogy ennek a kérdésnek megfelelő teret szenteljünk. Most mindössze egy becslési módszert mutatunk be, melynek segítségével a 3.1. szakaszban vizsgált RT elemes digitális kétpólusok érzékenységeire adunk felső korlátot.

Tekintsük ismét a 14. ábrán felrajzolt hálózatot! A kétpólus $F_N(z^{-1})$ átviteli függvényének az i -edik illesztő adaptor szorzóparaméterére vett érzékenységgé függvénye:

$$\frac{\partial F_N(z^{-1})}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial F_i(z^{-1})}{\partial \gamma_i} \prod_{j=1}^{N-i} \frac{\partial F_{N-j+1}(z^{-1})}{\partial F_{N-j}(z^{-1})}. \quad (35)$$

Először a szorzat első tényezőjét vizsgáljuk meg. A (18) kifejezés segítségével:

$$\frac{\partial F_i(z^{-1})}{\partial \gamma_i} = z^{-1} \frac{F_{i-1}(z^{-1}) - F_{i-1}(z)}{(1 - \gamma_i F_{i-1}(z^{-1}))(1 - \gamma_i F_{i-1}(z))}. \quad (36)$$

A (23) egyenlőségből következik, hogy

$$F_{i-1}(z^{-1}) = e^{j\varphi}, \quad F_{i-1}(z) = e^{-j\varphi}$$

a z -sík egységköre mentén. (36)-ban helyettesítve:

$$\left| \frac{\partial F_i(z^{-1})}{\partial \gamma_i} \right| = \frac{|2 \sin \varphi|}{1 + \gamma_i^2 - 2\gamma_i \cos \varphi}. \quad (37)$$

Kifejezésünk szélsőértéket vesz fel, ha

$$2 \cos \varphi (1 + \gamma_i^2 - 2\gamma_i \cos \varphi) - 4\gamma_i \sin \varphi = 0.$$

Ezt az egyenletet megoldva:

$$\cos \varphi = \frac{2\gamma_i}{1 + \gamma_i^2}, \quad \sin \varphi = \frac{1 - \gamma_i^2}{1 + \gamma_i^2}.$$

Visszahelyettesítve (37)-be, kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\partial F_i(z^{-1})}{\partial \gamma_i} \right| \leq \frac{2}{1 - \gamma_i^2}. \quad (38)$$

Hasonló eljárást végezhetünk (35) többi tényezőjének vizsgálatánál is. A végeredmény:

$$\left| \frac{\partial F_j(z^{-1})}{\partial F_{j-1}(z^{-1})} \right| \leq \frac{1 + |\gamma_j|}{1 - |\gamma_j|}. \quad (39)$$

A (38) és (39) képletek a szorzóparaméterek előjelétől függetlenül eredményt adnak. A végső becslést ezen eredmények felhasználásával kaphatjuk:

$$\left| \frac{\partial F_N(z^{-1})}{\partial \gamma_i} \right| \leq \frac{2}{1 - \gamma_i^2} \prod_{j=1}^{N-i} \frac{1 + |\gamma_j|}{1 - |\gamma_j|}.$$

4. Összefoglalás

Cikkünkben hullámdigitális szűrők szintézisével és e szűrőosztály egy alcsoportjának analizisével foglalkoztunk, a véges szóhosszúság hatásának vizsgálatára szorítkozva.

A hullámdigitális szűrőket a referenciául szolgáló analóg szűrők segítségével származtatjuk. A hullámdigitális és a referens szűrő hálózatjellemzőit a bilineáris transzformáció kapcsolja össze, miközben a két struktúra között meglehetősen szoros összefüggés áll fenn. Szemben a többi digitális struktúrával, a hullámdigitális hálózatok esetében a referens szűrő ezért fokozott szerepet kap. Az analóg referens hálózatok szinte kizárólag a létrakapcsolású és a szimmetrikus struktúrák. A referens szűrők leszűkítése erre a két csoportra jelentősen egyszerűsíti a keletkező digitális szűrőt. Ekkor ugyanis a hullámdigitális hálózatban alaptagok értelmezhetők. Alaptagok szolgálnak a tárolóelemek és a soros, párhuzamos, illesztő adaptorok. A girátorok, RT elemek megvalósításához nincs szükség külön egységekre, hiszen ezek az elemek a többi adaptor megfelelő összekapcsolásával realizálhatók. Az alaptagok nem túl bonyolultak, és segítségükkel jó minőségű, szelektív

szűrési feladatok ellátására alkalmas szűrők hozhatók létre.

Általában megállapítható, hogy a hullámdigitális szűrő ugyanannyi tárolóelemet tartalmaz, mint a referens szűrő reaktáns elemeinek száma. Létrakapcsolású hálózatoknál a szorzók száma eggyel kisebb, mint a referens szűrő ágainak száma. Belátható, hogy a hullámdigitális struktúrák e tekintetben optimálisak. Nem minimális a hullámdigitális szűrő összeadó egységeinek a száma, ez azonban szimmetrikus hálózatoknál jelentősen csökkenthető (RT elemes hálózatok).

A véges szóhosszúság hatásával kapcsolatban a reaktáns referens impedanciákból származtatott RT adaptoros hullámdigitális kétpólusok zaját vizsgáltuk. Eredményül egy igen egyszerű összefüggés adódott, amely megadta a kapcsolatot a hálózat szorzóparameterei és a kimeneti kerekítési zaj szórásnégyezete, átlagteljesítménye között. Felhasználásával sikerült megadnunk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az ily struktúrák zaja minimális legyen. Ez a feltétel sem bonyolult: valamennyi szorzóparaméter negatív értékű kell legyen. Eredményünk alkalmas arra, hogy a várható zajjelenségeket a tervezésnél figyelembe vegyük. A bemutatott vizsgálati módszer általánosítható, ez részben megtörtént [16].

Jelen dolgozatban csak éppen érintettük a toleranciák és érzékenységek kérdését; RT elemes struktúrák érzékenységre egy felső becslést adtunk meg.

Köszönöm dr. Géher Károlynak és dr. Sallai Gyulának, hogy felhívták figyelmemet erre a témára, és tanáccsal, segítőkészséggel sohasem fukarkodva munkámban irányítottak is.

I R O D A L O M

- [1] Dr. Sallai Gy.: A mintavételező (digitális) szűrők osztályozása. Híradástechnika, XXVII. évf. 7. szám, 208—214. 1976. július.
- [2] Dr. Sallai Gy.: A digitális szűrők tervezésének alapelvei. Híradástechnika, XXVII. évf. 9. szám, 257—267. 1976. szeptember.
- [3] Dr. Sallai Gy.: Direkt módszerek véges memóriájú digitális szűrők tervezéséhez. Híradástechnika, XXIX. évf. 10. szám, 289—296. 1978. október.
- [4] Fettweis, A.: Digital filter structures related to classical filter networks. AEÜ, Vol. 25. 79—89. 1971.
- [5] Sedlmeyer, A., Fettweis, A.: Digital filters with true ladder configuration. IJCTA. Vol. 1. 5. 10. 1973.
- [6] Rader, C. M., Gold, B.: Digital processing of signals. McGraw-Hill. New York, 1966.
- [7] Osváth L.: Hullámdigitális szűrők. Diplomaterv. BME, 1975.
- [8] Sallai Gy., Géher K.: Digitális szűrők. Tanulmány a Műszeripari Kutató Intézet számára. Budapest, 1974.
- [9] Fraiture, L., Neirynch, J.: Theory of unit element filters. Revue HF. Vol. 7. 325—340. 1969.
- [10] Géher K.: Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1972.
- [11] Fettweis, A., Levin, H., Sedlmeyer, A.: Wave digital lattice filters. IJCTA. Vol. 2. 203—211. June, 1974.
- [12] Jackson, L. B.: Roundoff noise analysis for fixed point digital filters realised on cascade or parallel form. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. 18. 107—122. June, 1970.
- [13] Fettweis, A.: Roundoff noise and attenuation sensitivity in digital filters with fixed-point arithmetic. IEEE Trans. Circ. Theor. Vol. 20. 174—175. 1973.
- [14] Crochiere, R. E.: Digital ladder structures and coefficient sensitivity. IEEE Trans. Audio Electroacoustic. Vol. 20. 240—246. 1973.
- [15] Mitra, S. K., Hirano, K., Sakaguchi, H.: A simple method of computing the input quantization and multiplication roundoff errors in a digital filter. IEEE Trans. ASSP. Vol. 22. 326—329. 1974.
- [16] Osváth L.: Digitális szűrők időtartománybeli vizsgálata. Egyetemi doktori értekezés. BME. 1978.