

Főszerkesztő: HORVÁTH IMRE

Szerkesztő: ANGYAL LÁSZLÓ

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BHG

Laczkó Endre  
Bernhardt Richárd  
Eisler Péter  
Dr. Gosztony Géza  
Honti Ottó  
Klug Miklós  
Tölgyesi László

ORION

Jakubik Béla  
Baracs Sándor  
Csernoch János  
Froemel Károly  
Sass Károly  
Szabó Károly

TERTA

Bánsághi Pál  
Baján Tibor  
Benedek Elek  
Egerszegi Béla  
Hutter Mihály

BHG ORION TERTA

MŰSZAKI  
KÖZLEMÉNYEK

XXVII. évfolyam

1981

7. szám

## Alközponti kezelők terhelésének optimális elosztása\*

CSÁSZÁR GYULA  
KONKOLY LÁSZLÓNÉ  
SZÁDECZKY-KARDOSS TAMÁS  
BHG

### 1. BEVEZETÉS

A telefonközpontok kifejlesztésének legkülönbözőbb fázisaiban van szükség arra, hogy a készülő rendszer kapacitását megbecsüljük. A telefonközpontok egyes részeinek helyes méretezésével a központ forgalomlebonyolító képessége növelhető. Az a cél, hogy a telefonközpont műszaki megvalósítása olyan legyen, hogy az minél jobb szolgáltatást nyújtson a felhasználóknak, illetve, hogy a gondos méretezéssel gazdaságos rendszereket lehessen kialakítani.

E cikkben a BHG-ban kifejlesztett tárolt programvezérlésű (TPV) telefonalközpontok tervezése során felmerült egyik problémával, a kezelői rendszer kialakításával foglalkozunk. A TPV azt jelenti, hogy a telefonközpontot számítógép jellegű berendezés vezérli. A beszéd-összeköttetések felépítését, illetve lebontását a vezérlő számítógép programjai irányítják. A továbbiakban kezelői rendszeren a bejövő hívások kiszolgálásához szükséges berendezések és eljárások (hardware és software) összességét értjük, a kezelői személyzettel együtt. A kezelői rendszer tervezésekor mind az előfizetőkre, mind a kezelőkre tekintettel kell lenni. A bejövő hívások számára az a fontos, hogy ne kelljen sokat várniuk a kezelésre, másrészt a kezelők terhelése sem lehet nagyobb egy fiziológiailag megengedett értéknél. (A svéd posta szerint max. 0,7 erl/kezelő.) (Lásd [1].)

Az irodalomban számos olyan általános módszerrel találkozhatunk, amelyek ilyen típusú kiszolgálási rendszerek vizsgálatával foglalkoznak (lásd pl. [2]). A kezelők előtti keverés és link kapcsolás esetére pl. [3]-ban található közelítő módszer. A BHG már korábban is foglalkozott egyes kezelői rendszerek vizsgálatával ([4]), azonban a forgalmi szempontból optimális kezelői rendszer kialakítására irányuló kutatások a TPV alközpontok kifejlesztésével egyidejűleg kezdődtek el ([5–8]).

\* Előadás formájában elhangzott a „Hírközlő rendszerek és berendezések kutatása és fejlesztése” c. ifjúsági konferencián.  
Budapest, Távközlési Kutató Intézet, 1980. november 17.

Az eddig elkészült alközpontokban különféle kezelői rendszereket alkalmaztak. Ha a kezelők mind foglaltak, akkor az érkező hívások várakozni kénytelenek, és a kezelőket mindenképpen tájékoztatni kell arról, hogy vannak várakozó hívások. Egy kiskapacitású alközpont esetén, ahol egy kezelő van, az egyetlen kezelőkészleten kijelzhetjük a bejövő vonalak állapotát, pl. lámpatabló formájában. Ilyen esetben a bejövő vonalak és a kezelői vonaláramkör között egyértelmű a megfeleltetés. Egy nagykapacitású alközpontban, több kezelő esetén is megvalósítható az egyértelmű megfeleltetés a bejövő vonalak és a kezelői vonaláramkörök között, de ez több szempontból nem célszerű (pl. a kezelők nem tudják kisegíteni egymást, kis forgalmú időszakban is szükség van az összes kezelőre). Ilyen esetben az ún. koncentrált kezelést alkalmazzák, ami azt jelenti, hogy a bejövő vonalak és a kezelői vonaláramkörök között nincs egyértelmű megfeleltetés. A kezelők csak a hozzájuk oda-kapcsolt vonalak állapotát ismerik.

Forgalmi csúcsok esetén sok a kiszolgálandó hívás, hosszú a várakozási idő, tehát, hogy feleslegesen ne terheljük a kapcsolómezőt várakozó forgalommal, az a cél, hogy minél kevesebb hívást kapcsoljunk egyszerre a kezelőhöz. A kezelő tájékoztatására és kiszolgálásra való serkentésére viszont célszerűbb, ha több vonal állapotát ismeri, vagyis az, hogy több vonalat kapcsolunk hozzá egyidejűleg.

Ezek egymásnak ellentmondó követelmények. Forgalmi és pszichológiai szempontok mérlegelése alapján lehet az optimumot megtalálni.

A várakozó hívásoknak a kezelőkhöz történő kiosztásakor többféle elvet követhetünk. Olyan rendszerek kialakítására törekszünk, amelyek a különféle műszaki követelményeket is szem előtt tartva, a lehető legjobb szolgáltatást biztosítják.

Az alábbiakban részletesen ismertetjük a vizsgált kezelői rendszert kétféle híváskiosztási stratégia alkalmazása esetén. Röviden utalunk azokra az elméleti és utánzásos módszerekre, amelyeket felhasználunk a kétféle kiosztási elvet összehasonlító vizsgálatokban. A vizsgálati eredmények értékelése kapcsán kimutatjuk az ún. simított híváskiosztás előnyeit.

## 2. RENDSZERLEÍRÁS

A vizsgált kezelői rendszer többkiszolgálós, több várakozási sorral rendelkező speciális tömegkiszolgálási rendszer. A kiszolgálás nem mindig beérkezési sorrendben történik, időtartam eloszlása lognormális eloszlással közelíthető legjobban.

A vizsgált rendszerben a kezelők egy-egy saját várakoztatási sorral rendelkeznek, továbbá van egy közös sor is, ahol a várakozó hívások még nincsenek egy adott kezelőhöz kiosztva (ld. 1. ábra). A közös sorba akkor kerülnek be a hívások, ha az összes kezelői sor betelt. Az időközben megüresedő saját várakozási helyekre rögtön átkerül egy hívás a közös sorból. Egyszerűen belátható, hogy az optimális rendszerkialakítás az lenne, ha csak közös sor létezne. Ekkor azonban nem lenne mód a kezelő tájékoztatására.

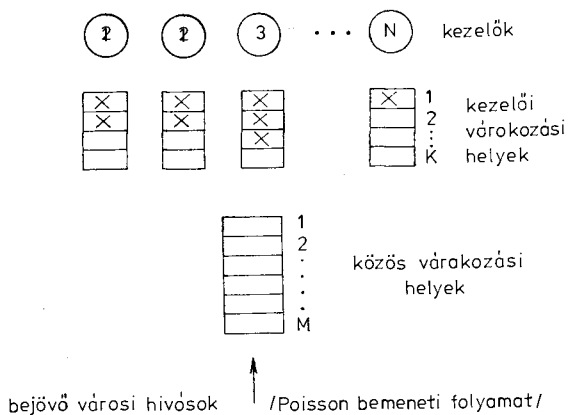
Amikor nincs minden kezelői sor betöltve, akkor a hívások sorbaállításának az alábbi kétféle stratégiáját vizsgáltuk:

- Az egyik a **VÉLETLEN** eset, amikor a szabad várakozási helyeket tartalmazó sorok közül egyenletes eloszlás szerint választja ki a vezérlő program azt a sort, ahová a hívást beállítja, függetlenül attól, hogy a sorban hány szabad hely van.
- A másik az ún. **SIMÍTOTT** eset, amikor a beérkező hívások mindig a szabad kezelők egyikéhez, illetve a legrövidebb kezelői sorok egyikébe állnak be véletlenszerűen.

[Mindkét esetben elvesznek azok a hívások, amelyek akkor érkeznek, ha a rendszer telített. A központban egyidejűleg csak annyi bejövő hívás lehet, ahány alkalmas csatlakozó vonal (ún. bejövő vonal) van. Amíg ezek mind foglaltak, nem érkeznek újabb hívások.]

A vizsgált modellben feltételeztük, hogy a központ torlódásmentes, vagyis, hogy a kapcsolómező és a vezérlő nem hátráltatja a bejövő hívásokat. Ez feltételezhető a kapcsolómező általában megengedett 1 százalékos vesztesége esetén.

A kezelő szabaddá válása és a saját kezelői sorában várakozó hívás kiszolgálásának kezdete között ún.



[B 202-1]

1. ábra. Kezelői rendszer

reakcióidő telik el. Ez emberi tényezőktől függ, pl. attól, hogy a kezelő milyen gyorsan veszi észre, hogy hívás érkezett, hogy milyen gyorsan kezd el a már ott levő hívás kiszolgálását stb.

A véletlen kiosztás műszakilag egyszerűbben oldható meg. A simított híváskiosztás várhatóan jobb szolgáltatást fog adni, mint a véletlen kiosztás.

A simított kiosztás során ugyanis a hívások mindig a legkevesbé elfoglalt kezelőhöz kerülnek, és így azok terhelése kiegyenlítettebbé válik. Heurisztikusan belátható, hogy a várakozási jellemzőket tekintve is jobb a simított kiosztás a véletlennél. Ezt alátámasztják az utánzásos vizsgálatok és a Markov modellen alapuló számítások is. Az elvégzett vizsgálatok fő értéke amellett, hogy igazolták magát a szemléletet az, hogy lehetővé vált ilyen bonyolult rendszerek forgalmi és várakozási jellemzőinek a kiszámítása.

Igen fontos ez annak megállapításához, hogy érdemes-e a véletlen kiosztást a továbbiakban felcserélni a simítottal. Ehhez mindenképpen tudni kell, hogy milyen mértékű javulást várhatunk a várakozási jellemzőkben. A kapott számítási eredményeket felhasználhatjuk a kezelői munkahelyek számának meghatározásához, illetve annak felmérésére, hogy az egyes paraméterek változtatása milyen mértékben módosítja a rendszerjellemzőket.

## 3. VIZSGÁLATI MÓDSZEREK

3.1. Az általános rendszert csak **SZÁMÍTÓGÉPES UTÁNZÁS**-sal vizsgálhatjuk meg, mivel megfelelő számítási eljárások nem ismeretesek. Ilyen időhű utánzóprogramot készítettünk SIMULA 67 nyelven, amely az MTA SZTAKI CDC 3300-as számítógépén futtatható.

A programmal az előző fejezetben leírt általános rendszert tudjuk vizsgálni. Az utánzás következtében a kapott eredmények statisztikai jellegűek (konfidencia intervallum). A statisztikai egyensúly eléréséhez sok hívás megfigyelésére van szükség, ezért a program futási ideje viszonylag hosszú.

Remenő adatként meg kell adni a következőket:

- a) rendszerjellemzők:
  - kezelők száma
  - kezelői várakozási helyek száma
  - közös várakozási helyek száma
  - hívások sorbaállításának módja (SIMÍTOTT, VÉLETLEN)
- b) kezelői jellemzők:
  - kezelői reakcióidő eloszlás típusa (konstans, exponenciális, lognormális), jellemzői (átlag, szórás)
  - kiszolgálási idő eloszlás típusa, jellemzői (mint előbb)
- c) hívás jellemzők:
  - beérkezési intenzitás (mindig Poisson folyamatra vonatkozik),
- d) futtatási jellemzők:
  - bemelegítési hívásszám,
  - szakaszonkénti hívásszám.

Az utánzás eredményei:

Minden adattípusra kapunk

- szakaszonkénti középértéket,
- a teljes futásra érvényes középértéket,
- 95%-os (Student) konfidencia intervallumot.

a) Általános utánzási eredmények:

- kiszolgált igények száma,
- várakozási helyek telítettsége miatt elvesztett igények száma,
- megfigyelés időtartama.

b) Az egyes kezelők által lebonyolított forgalom.

c) Várakozási sor jellemzők (kezelői, közös és teljes rendszer)

- várakozók számának eloszlása,
- átlagos várakozási idő,
- várakozási forgalom,
- várakozás valószínűsége,
- várakozási idő eloszlása.

Az utánzóprogramról és a futtatásokról bővebben [5]-ben találhatóunk.

3.2. Mivel az utánzás számítógép-időigényes, ezért Markov modellt feltételezve, foglalkoztunk a statisztikai egyensúlyon alapuló ÁLLAPOTEGYENLET RENDSZER MEGOLDÁSÁ-val is.

Első lépésként zárt képlettel megadtuk az állapotvalószínűségeket 2, 3 és 4 kezelő esetén.

Feltételeztük, hogy a kezelői sorokban legfeljebb 1 hívás várakozhat, mivel az eddig tervezett kezelői rendszerek ilyenek voltak. A Markov modellen alapuló számításokat mindkét híváskiosztás esetén elvégeztük a fenti esetekre.

3 kezelő esetére az állapotdiagram a 2. ábrán látható. Az összehasonlíthatóság kedvéért egy ábrába foglaltuk a véletlen és a simított esetet.

Az állapotter (j, k, m) jelölésében j a foglalt kezelők száma, k a foglalt kezelői várakozási helyek száma, m a közös sorban várakozók száma. A 2. ábrán szaggatott nyíllal rajzolt átmenetek a simított esetben hiányoznak.

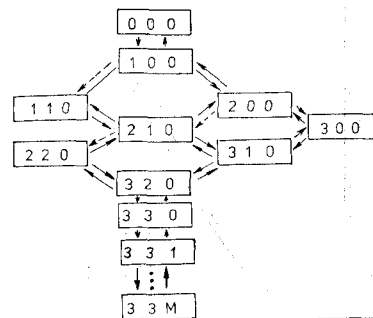
A kapott eredmények azt mutatják, hogy a kétféle híváskiosztással kapott várakozási idők közt, különösen több kezelő esetén, lényeges különbségek mutatkoznak a simított kiosztás javára.

3.3. Ezek után nyilvánvalóvá vált, hogy érdemes foglalkozni az általános rendszerrel is. Az állapotegyenleteknek zárt képlettel való megoldása már 4 kezelő esetén is igen nehézkes, ezért tetszőleges számú kezelő és tetszőleges számú kezelői várakozási hely esetére algoritmust dolgoztunk ki a simított esetre. Az algoritmushoz számítógépes program is készült. Az algoritmus részletes ismertetését ld. a Függelékben.

#### 4. VIZSGÁLATI EREDMÉNYEK

Az alábbi 1. és 2. táblázatban százalékosan tüntettük fel, hogy a várakozási idők mennyivel növekszenek a simított esethez képest, ha a véletlen kiosztást alkalmazzuk. A táblázatokban R a fajlagos forgalmat, K a kezelői várakozási helyek számát mutatja. Az 1. táblázat az exponenciális eloszlású kezelési időre vonatkozik, míg a 2. táblázat a valószínűségi közeli

j k m  
j: foglalt kezelők száma  
k: foglalt kezelői várakozási helyek száma  
m: közös sorban várakozók száma



[B 202-2]

2. ábra. Állapotdiagram 3 kezelő és 1 kezelői várakozási hely esetén (A szaggatott nyíllal jelölt átmenetek csak véletlen kiosztás esetében lehetségesek.)

álló lognormális eloszlású kezelési időre. Az 1. táblázatban szereplő adatok számításból, illetve utánzásból, a 2. táblázat adatai pedig utánzásból származnak.

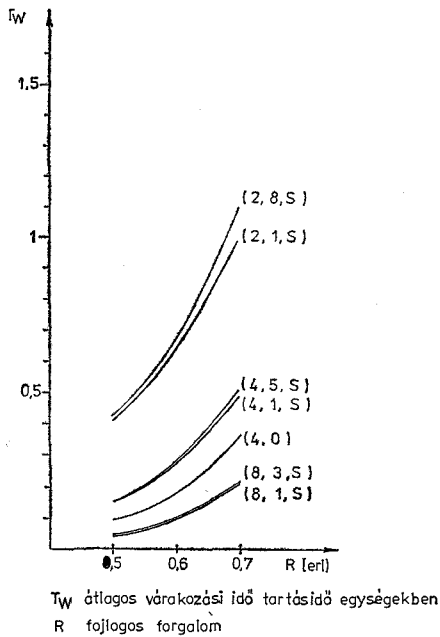
R \ K	1	3	5
0,5	168	432	—
0,6	92	244	—
0,7	49	168	202

1. táblázat: Az átlagos várakozási idő százalékos növekedése a véletlen esetben a simítottéhoz viszonyítva, exponenciális kezelési idő és 4 kezelő esetén. (Az exponenciális eloszlás paramétere  $\mu=1$  volt.)

R \ K	1	3	5
0,7	63	212	263

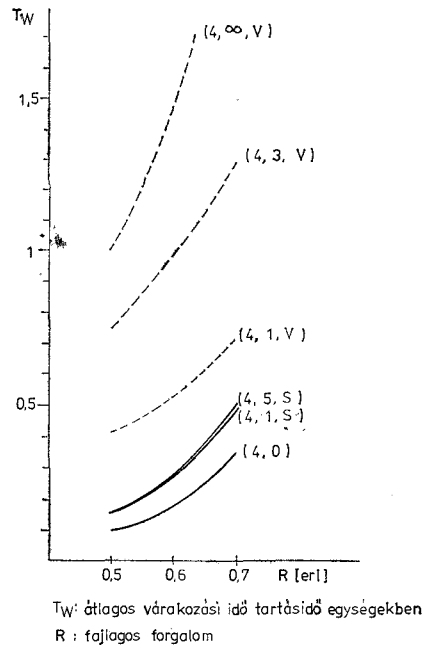
2. táblázat: Az átlagos várakozási idő százalékos növekedése a véletlen esetben a simítottéhoz viszonyítva, lognormális kezelési idő és 4 kezelő esetén. (A lognormális eloszlás paramétereit,  $M=15.9375$  várható értékét és  $a=9.0776$  szórását a BHG-ban 1968-ban elvégzett mérések adataiból számítottuk.)

A fenti táblázatokból látható, hogy a simított kiosztás lényegesen kedvezőbb, mint a véletlen. Kedvező tulajdonsága továbbá az is, hogy a várakozás valószínűsége még a teljes elérhetőségű nyalábénál ( $K=0$ ) is kisebb, mind az exponenciális, mind a lognormális eloszlású tartásidő esetén és a kezelői várakozási helyek számának növelésével ez tovább csökken. A 3. ábrán látható, hogy adott számú kezelő esetén simított kiosztás mellett a kezelői várakozási helyek növelésekor a várakozási idő csak igen kis mértékben növekszik, tehát lényegében nem számít



[B 202-3]

3. ábra. Átlagos várakozási idő alakulása különböző számú kezelő és kezelői várakozási hely esetén a simított kiosztást alkalmazva  
 $T_w$ : átlagos várakozási idő, tartásidő egységeiben  
R: fajlagos forgalom



[B 202-4]

4. ábra. Átlagos várakozási idő alakulása a simított és véletlen kiosztásnál 4 kezelő és különböző számú várakozási helyek esetén  
 $T_w$ : átlagos várakozási idő tartásidő egységeiben  
R: fajlagos forgalom

az, hogy hány várakozó hívást kapcsolunk oda a kezelőkhöz. Az ábrán alkalmazott jelölésben pl. (2, 8, S) azt jelenti, hogy olyan simított híváskiosztású rendszerről van szó, ahol 2 kezelő és 8 kezelői várakozási hely van. Az ábrán (4,0)-val jelöltük a csak közös sort tartalmazó, teljes elérhetőségű rendszert.

Mindemellett egy simított híváskiosztású rendszer azzal az igen kedvező tulajdonsággal is rendelkezik, hogy a várakozási jellemzők szempontjából jobb bármely olyan véletlen kiosztású rendszerénél, ahol a kezelők száma ugyanannyi. Azaz, ha  $(N, K_S, S)$  jelöli a simított kiosztású rendszert  $N$  kezelő és  $K_S$  számú kezelői várakozási hely esetén  $(N, K_V, V)$ , pedig a megfelelő véletlen kiosztású rendszert, akkor igaz az, hogy a  $(N, K_S, S)$  rendszer jobb lesz a  $(N, K_V, V)$   $K_V = 1, 2, 3, \dots$  rendszerek mindegyikénél tetszőleges  $K_S$ -re.

Az utánzás azt mutatta, hogy ez a lognormális eloszlás esetére is igaz.

Összehasonlítással a 4. ábrán látható a  $K$  hatása a kétféle híváskiosztásnál, 4 kezelő esetén.

A  $(4, \infty, V)$ -vel jelölt rendszer jellemzői az irodalomban  $M|M|1$ -gyel jelölt, 1 kiszolgálós Markov modellből származtathatók.

## 5. KÖVETKEZTETÉSEK

A kapott eredmények alátámasztják a simított híváskiosztási elv alkalmazását, ugyanis:

1. A simított kiosztás alkalmazásával egy adott rendszer esetén a várakozási jellemzők jelentősen javulnak a véletlen kiosztáshoz képest.

2. Egy adott simított kiosztású rendszer jobb az összes ugyanannyi kezelős véletlen kiosztású rendszerénél.

3. A kezelői várakozási helyek száma gyakorlatilag nem befolyásolja a rendszerjellemzőket. A várakozási jellemzők gyakorlatilag nem változnak, így rugalmasabban figyelembe vehetők egyéb szempontok a méretezés során.

4. A várakozás valószínűsége még a teljes elérhetőségű nyalábénál is kisebb, és a kezelői várakozási helyek számának növelésével kismértékben tovább csökken.

Mindezeket az előnyöket figyelembe véve indokolt a simított kiosztás általános bevezetése.

## FÜGGELÉK

### 1. Az állapotok leírása

A statisztikai egyensúlyban levő rendszert a különböző állapotok valószínűségével jellemezzük.

A rendszer lehetséges állapotainak leírásakor eltekintünk a közös sortól, mivel az anélküli rendszer jellemzőiből a valószínűségek egyszerűen számolhatók tetszőlegesen hosszú közös sor esetén.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az éppen kiszolgálásban levő igényeket is hozzászámoljuk a kezelői sorban levőkhöz, és ennek megfelelően legyen  $K := i + a$  a kezelői várakozási helyek száma

és ha  $j$  hosszúságú sorról beszélünk, akkor  $j > 0$  esetén ez tulajdonképpen csak  $(j-1)$  várakozót jelent.

A rendszer állapotát azzal jellemezzük, hogy adott hosszúságú sorból hány db van.

Ennek megfelelően jelölje  $i_j$  a  $j$  hosszúságú sorok számát,  $j=0, 1, \dots, K$ -ra, s így kapunk  $(K+1)$ -elemű vektorokat

$$I = (i_0, i_1, \dots, i_k).$$

Nyilván

$$0 \leq i_j \leq N \quad \text{és} \quad i_0 + i_1 + \dots + i_k = N. \quad (1)$$

Az ilyen vektorok száma:  $\binom{N+K}{N}$ .

Az 5. ábrán  $N=K=3$  esetre fel is van tüntetve mind a 20.

## 2. Az állapotátmenetek jellemzése

Az 5. ábrán vastag nyíllal ábrázoltuk az új igény érkezésével lehetséges állapotátmeneteket, vékony nyíllal a kiszolgálás befejezésével történőket.

Jelölje  $\lambda$  az érkezési intenzitást,  $\mu$  a megszűnést, ekkor  $A = \lambda/\mu$  a rendszernek felajánlott forgalom. Az egyszerűség kedvéért  $\mu$ -t egységnyiére választjuk.

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy az állapotvektorok koordinátáinak segítségével hogyan jellemezhetők az átmenetek.

### – Átmenetek megszűnéssel

Ezeket aszerint osztályozhatjuk, hogy milyen hosszúságú sorban fejeződött be a kiszolgálás. Ha  $j$  hosszúságúban, akkor az azt jelenti, hogy eggyel több  $(j-1)$  hosszúságú és eggyel kevesebb  $j$  hosszúságú sor lesz. Az  $I$  vektorból így keletkező vektort jelölje  $g_{j-1}(I)$ .

E transzformáció inverzét, amikor a  $j$ -edik koordináta növelendő eggyel, és az előtte levő csökkenendő, jelölje  $f_{j-1}(I)$ .

### – Átmenet érkezéssel

Legyen  $m = m(I)$  a legrövidebb sor hossza, az új igény egy ilyenbe áll be, s ezért az új állapot  $F(I) = f_{m(I)}(I)$  lesz:

az  $I$  vektorban balról jobbra haladva az első pozitív elemet lecsökkentjük eggyel, az utána levőt pedig megnöveljük.

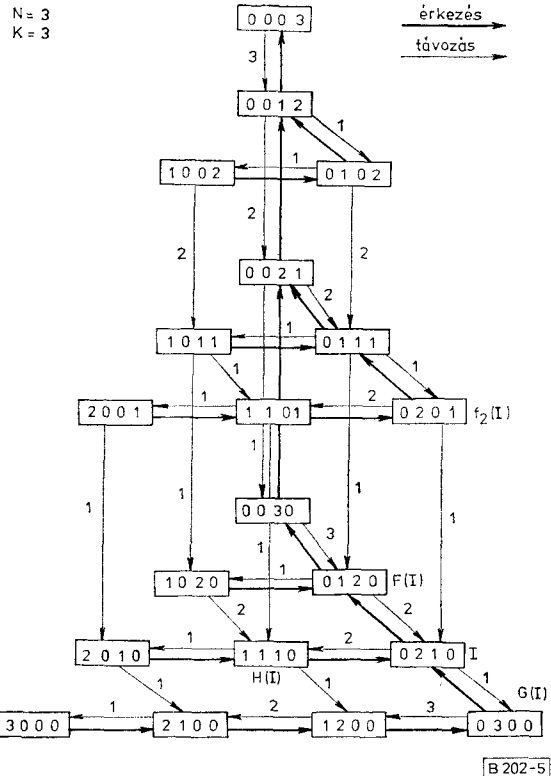
Szükségünk van ennek az inverzére is, és mint megmondható, legfeljebb két olyan vektor van, melyre  $F(J) = I$ , ezek pedig a már említett transzformációkkal így fejezhetők ki:

$$J_1 = G(I) = g_m(I), \quad \text{ill.} \quad J_2 = H(I) = g_{m-1}(I).$$

Ezek után felírható az  $I$  állapotra vonatkozó egyenlet (l. pl. [9]):

az állapotból történő összes kimeneti intenzitás szorozva az állapot valószínűségével = az állapotba lehetséges bemenetek intenzitása szorozva a megfelelő állapotok valószínűségeivel, nevezetesen:

$$\begin{aligned} (\lambda + n - i_0) \cdot p(I) &= \lambda \cdot \{p[G(I)] + p[H(I)]\} + \\ &+ \sum_{j=1}^K (i + i_j) \cdot p[f_{j-1}(I)] \end{aligned} \quad (2)$$



5. ábra. Az állapottér

Az összes állapotra felírható ilyen egyenlet, ilyen módon  $\binom{N+K}{N}$  egyenletről álló lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk.

A lineáris egyenletrendszer mátrixának felírásához az állapotoknak valamilyen sorrendjét kell megállapítanunk, amely lehet tetszőleges, és található olyan is, melynek bizonyos előnyei vannak.

## 3. Rendezés az állapotok között

Legyen  $I, J$  két állapotvektor. Azt mondjuk, hogy  $I$  kisebb mint  $J$ , ( $I < J$ ), ha  $i_k < j_k$ , vagy  $i_k = j_k$ , de  $i_{k-1} < j_{k-1}$ , vagy  $i_{k-1} = j_{k-1}$ , de  $\dots$

Tulajdonképpen lexikografikus rendezés valósul meg, a nagyobb indexű koordinátának van nagyobb helyiértéke.

Az így rendezett állapottérben az érkezéssel történő átmenet mindig egy „nagyobb”, a távozással történő pedig mindig egy „kisebb” állapotba vezet. (Lásd az 5. ábrát.)

Ebből az következik, hogy az egyenletrendszer mátrixa „majdnem” felső háromszögmátrix, ugyanis

- a főátló alatt egyetlen nem 0 elem áll,
- annak értéke  $\lambda$ ,
- és az esetek nagy részében közvetlenül a főátló alatt helyezkedik el.

## 4. Az egyenletrendszer mátrixa

Jelöljük  $M_N^{(K)}$ -nel az egyenletrendszer mátrixát,  $P_N^{(K)}$ -nel az állapotvalószínűség-vektort, amely az  $M_N^{(K)} \cdot P_N^{(K)} = 0$  egyenletrendszer megoldása.

Ez csak a vektor elemeinek arányát határozza meg, mivel  $M_N^{(K)}$  oszlopaiban az elemek összege 0.

Ezért válasszuk a „legnagyobb” állapot „valószínűségét” 1-nek, és az erre vonatkozó egyenletbe csempésszünk  $(-\lambda)$ -t mindkét oldalra, s legyen ezután  $M_N^{(K)}$  az így módosított mátrix. Az új egyenletrendszer

$$M_n^{(k)} \cdot P_n^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} N+K \\ N \end{pmatrix} \text{ elemű vektor} \right. \quad (3)$$

$M_N^{(K)}$  utolsó oszlopában az összeg  $(-\lambda)$  lesz, és igaz az alábbi:

Ha  $I_N^{(K)}$  jelöli az  $\begin{pmatrix} N+K \\ N \end{pmatrix}$ -ed rendű egységmátrixot, és

$$M_0^{(K)} = M_N^{(0)} = (-\lambda), \quad (4)$$

akkor a következő rekurzív előállítás érvényes (6. ábra):

Ez úgy értendő, hogy a következőket tesszük:

– először blokkokat helyezünk a főátlóra, az  $m$ -edik éppen

$$M_{N-m}^{(K-1)} - m \cdot I_{N-m}^{(K-1)} \quad (m=0, \dots, N)$$

– ezután az  $m$ -edik blokk fölé egy ugyanolyan rendű diagonális mátrixot helyezünk:

$m \cdot I_{N-m}^{(K-1)}$ -et. [Ez azonban kisebb méretű, mint a tőle balra levő  $(m-1)$ -edik blokk.]

– végül az  $m$ -edik blokk „bal alsó sarka” mellé, balra egy  $\lambda$ -t írunk.

A (3)-as egyenletet úgy oldjuk meg, hogy eliminációs eljárást végrehajtva, előbb ténylegesen felső háromszög mátrixszá transzformáljuk  $M_N^{(K)}$ -t, majd pedig a „legnagyobb” állapottól visszafelé haladva, sorra behelyettesítjük a nyert értékeket, és így mintegy felgöngyölítjük a rendszert.

## 5. Az egyenletek felgöngyöltése

A (3)-as egyenlet mindkét oldalán ugyanazokat a transzformációkat végezzük el. Mivel a jobboldali

vektor elemei egy kivételtől eltekintve csupa nullák, azért a változások tulajdonképpen csak a baloldali mátrixon fognak jelentkezni.

Adjuk össze az első néhány egyenletet (ami a mátrix sorainak összeadásával ekvivalens) addig a sorig, mely az  $m$ -edik blokk utolsó sorát alkotja:

- ebben a sorban a főátló előtti elemek nullák lesznek,
- a főátlóban  $(-\lambda)$  fog állni,
- tőle jobbra, az  $(m+1)$ -edik blokk fölött csupa  $(m+1)$ , és azok után ismét nullák.

Ezáltal úgy módosítottuk az egyenletrendszert, hogy legfeljebb két blokkhoz tartozó ismeretlenek fognak szerepelni minden egyenletben. Ennek segítségével memória takarékoság érhető el számítógépes programban (nincs szükség az összes ismeretlen egyidejű tárolására).

Az előbbi átalakítással valójában azt értük el, hogy a főátló alatti elemek eltüntetése az olyan állapotok esetében egyszerű, melyeknél valamilyen  $m$ -re

$$i_m + i_{m+1} = N. \quad (5)$$

Ugyanis azt kaptuk, hogy  $m=K-1$  esetén

$$P(i) = \frac{1 + i_{m+1}}{\lambda} \cdot P\{a(K-1) - \text{hosszúságú sorok száma} = 1 + i_m\}. \quad (6)$$

Mivel  $M_N^{(K)}$  bal felső blokkja maga is egy ugyanilyen struktúrájú mátrix, az előbbi módszert alkalmazva, tetszőleges  $m$ -re érvényes, hogy:

$$p(i) = \frac{1 + i_{m+1}}{\lambda} \cdot P(i, F(i)) + \frac{1}{\lambda} \cdot P(F^{i_m}(i), f_{m+1}(i)) \quad (7)$$

(a (,) alulról nyílt intervallum a bevezetett rendezés szerint.)

További lényeges észrevételek közvetlenül (2)-ből kiindulva tehetők, amikor is a jobb oldalon hiányzik a  $G(i)$ -vel, illetve  $H(i)$ -vel kapcsolatos tag.

a) Az olyan állapotoknál, amelyekben van szabad

$$M_N^{(K)} = \left( \begin{array}{c|c|c} M_N^{(K-1)} & I_{N-1}^{(K-1)} & \\ \hline & M_{N-1}^{(K-1)} - I_{N-1}^{(K-1)} & \\ \hline & \lambda & \\ \hline & & \dots \\ & & m \cdot I_{N-m}^{(K-1)} \\ \hline & M_{N-m}^{(K-1)} - m \cdot I_{N-m}^{(K-1)} & (m+1) \cdot I_{N-m-1}^{(K-1)} \\ \hline & \lambda & \\ \hline & & \dots \\ & & N \cdot I_0^{(K-1)} \\ \hline & & \lambda M_0^{(K-1)} - N \cdot I_0^{(K-1)} \end{array} \right)$$

B202-6

6. ábra. A mátrixok rekurzív előállítása. Az üresen hagyott helyeken 0-k állnak

kezelő ( $i_0 > 0$ ), hiányzik  $H(1)$  és akkor a  $p(1)$  valószínűség előállítható az alábbiak szerint:

$$p(1) = \alpha(1) \cdot p(f_0(1)) + \sum_{j=2}^k \sum_{i=0}^{i_j} \beta_j^{(i)}(1) \cdot p(g_0^i \cdot f_{j-1}(1) \cdot (1+i)) \quad (8)$$

(Megjegyzés: a jobb oldalon csupa olyan állapot valószínűsége szerepel csak, amelyek „nagyobbak”  $1$ -nél – tehát (8) az említett célnak megfelelő előállítás.)

Az  $\alpha$ ,  $\beta_j^{(i)}$  együtthatók egy a (2)-ből kapható rekurziós formulából kiszámíthatók, és a

$$W_l^{(v)} = \sum_{s=0}^l \binom{v-1+s}{s} \cdot \lambda \frac{l-s}{(l-s)!}$$

Brockmeyer polinomok segítségével fejezhető ki:

$$v = v(1) = i_2 + \dots + i_k \text{-val}$$

$$\alpha(1) = \frac{W_{i_1}^{(v)}}{W_{1+i_1}^{(v)}}, \quad \beta_l(1) = \frac{W_l^{(v)} \cdot W_{i_1-l}^{(0)}}{W_{1+i_1}^{(v)} \cdot \binom{i_1}{l} \cdot (1+i_1)} \quad (9)$$

( $\beta_l(1)$  a  $j$ -től független.)

b) A  $K=2$  eset számítása az a)-ban elmondottak alapján egyszerűen elvégezhető, mivel akkor az állapotok 3-elemű vektorok, és ahol  $i_0=0$ , ott  $i_1+i_2=N$ , tehát (5) teljesül.

c) Amikor két kezelő van,  $N=2$ , az  $M_N^{(K)}$  csupán három blokkból áll:

- a jobb alsó „blokk” a legnagyobb állapottal kapcsolatos, amelynek a „valószínűségét”  $1$ -nek választottuk,
- a középső blokk, melyben viszont az fog teljesülni, hogy (2)-ben a jobb oldalon hiányzik  $G(1)$  (Megjegyzés: ez az  $(N-1)$ -edik blokkra mindig teljesül),

– végül a bal felső blokk, amely egy kisebb méretű, de ugyanilyen struktúrájú mátrix, és ezért itt is könnyen végezhető el a felső háromszög-mátrixszá transzformálás.

Az általános esetben ( $N > 2$ ,  $K > 2$ ) az (5)–(9) összefüggések lényeges egyszerűsítéseket jelentenek, de az eliminációt tovább kell folytatni.

## IRODALOM

- [1] *Anderberg, M. – Arestig, A.*: Studies on Human Factors in a PABX  
Proceedings of 7th International Symposium on Human Factors in Telecommunications, 1974. Montreal, Canada pp. 1–16.
- [2] *Störmer, H.*: Verkehrstheoretische Grundlagen für die Planung von handbedienten Vermittlungsanlagen  
A. E. Ü. 12 [1958], 119–126.
- [3] *Jurgis Rubas*: Dimensioning of Manual Operating Positions in PABX's  
7. ITC, Stockholm 1973. 342/1–7.
- [4] *Rét Andrásné*: Kezelők tevékenységének vizsgálata  
BHG – GYFO, VJ – 144, 1968.
- [5] *Ágostházi Margit – Szádeczky-Kardoss Tamás*: Számítógépes utánpótlóprogram alközponti kezelők formális vizsgálatához  
BHG – FI VJ 90110 – 234/79
- [6] *Konkoly Lászlóné*: A QA 96 MRK kezelői elrendezés vizsgálata számítással  
BHG – FI VJ 90110/267/79.
- [7] *Konkoly Lászlóné – Császár Gyula*: Alközponti kezelők terhelésének optimális elosztása  
Operációkutatási Konferencia Debrecen, 1980. IX. 09 – 11.
- [8] *Császár Gyula – Szádeczky-Kardoss Tamás*: Alközponti kezelői elrendezés vizsgálata simított hívás-kiosztási stratégiánál  
BHG – FI VJ 90110 – 251/80
- [9] *Kleinrock, L.*: Queueing Systems I.  
John Wiley & Sons, 1975.