

# Az ábraleképzés optimalizálásának lehetőségei LSI maszkok készítéséhez

BEKE ISTVÁN—  
BERECZKEI FERENC  
Híradástechnikai Ipari  
Kutató Intézet

Az integrált áramkörök előállítási technológiájában az egyes rétegek ábráinak kialakításához maszkokat használnak. Az Intézetünkben üzemelő szovjet maszkkészítő berendezések egyike az ún. ábragenerátor [2], amely a végső mérethez képest  $10\times$ -es nagyításban lehetővé teszi, hogy a maximálisan  $130\times 130$  mm<sup>2</sup> területen, téglalap alakú ablakokból, csaknem tetszőleges ábrát összeállítsunk. Az ablakok legkisebb mérete  $10\times 10$  μm<sup>2</sup>, a felbontás  $1\times 1$  μm<sup>2</sup>, míg az ablakok pozicionálása 1 μm-es felbontással lehetséges. Az ábragenerátorral kialakított ábrát azután (amely egy maszklemezen foglal helyet) az ún. léptető (step and repeat) [3] berendezés segítségével, végső méretre kicsinyítve, mátrix alakzatban sokszorosan meg lehet ismételni egy második maszklemezen. Az ábra maximális mérete itt is  $130\times 130$  mm<sup>2</sup> lehet, míg az ábracsoportok pozicionálása 1 μm-es felbontással végezhető el a megadott területen belül. Az ábracsoportok egymáshoz való illesztése  $\pm 0,5$  μm pontossággal történik.

Annyi ilyen maszkot kell készíteni, amennyit az áramköri technológia a rétegek kialakításához igényel. A teljes maszksorozat 4...13 maszkot tartalmazhat. Az áramkör elemi méreteinek csökkenése, az elemsűrűség és a chipméret növekedése egyre nagyobb követelményeket állít a maszkkészítés elé. A közepesen nagy bonyolultságú integrált áramkör egy maszkján az ábrát összerakó ablakok száma elérheti az 50 ezret a chipen belül. A maszklemez és a chip méretétől függően pedig 100...500 chip helyezkedhet el a maszklemezen, vagyis milliós, sőt tíz milliós nagyságrendű ablakot kell egyetlen lemezre leképezni. Ez a feladat korszerű programvezérelt maszkkészítő berendezések és számítógépes adatelő-készítés nélkül már nem oldható meg.

A hagyományos módszer szerint a chipen belüli összes alakzatot\* ábragenerálással alakítjuk ki, majd a chip ábráját kicsinyítve ismételtelen leképezzük. A képkialakításnak ez a módszere a nagy bonyolultságú áramkörök maszkjainál már nem gazdaságos, megnöveli az ábragenerálás időszükségletét és az

adatelőkészítés munkáját. A hagyományos módszer hátrányai a következők:

- az adatelőkészítés és a vezérlő szalag ellenőrzése, hibátlan előállítása a chipen belüli alakzatok nagy száma miatt rendkívül nehézkes;
- az ábragenerátor hosszú, folyamatos üzemeltetése miatt a géphiba, szolgáltatáskiesés, üzemzavar bekövetkezésének valószínűsége megnő;
- bármilyen üzemzavar lemezelejtet eredményez;
- az ábragenerálás és a lépkedés egyenlőtlen időszükséglete következtében az ábragenerátor terhelése túlzottá, a lépkedő berendezése kicsivé válik.

A fentiek felvetik a leképezések optimális szervezésének igényét. Az optimalizálásnál a következő szempontokat együttesen vesszük figyelembe:

1. Az ábragenerálás és a lépkedés időszükségletének összege minimális legyen maszkrétegenként.
2. Mind az ábragenerálás, mind a lépkedés esetén az egy lemezre készülő ábrák leképzési ideje rövidebb legyen a berendezések „két meghibásodás (üzemzavar) közötti várható időtartamánál”.
3. A lemezfelhasználás minimális legyen.
4. A berendezések leterhelése azonos legyen.

Az 1. követelményről belátható, hogy egyenértékű az ábragenerálás és a lépkedés azonos számú expozícióval történő megvalósításával. Tételezzük fel ugyanis, hogy egy ábra 10 ezer azonos méretű ablakból összerakható és hogy ezt az ábrát egy  $10\times 10$ -es mátrix elrendezésben többszörösen kell kialakítanunk. Összesen  $10\,000\times 10\times 10=1$  millió expozíció végrehajtásáról van tehát szó. Elvileg sok megoldása van az ábra kialakításának. Pl. egy ablakot az ábragenerátorral képezünk le, majd ezt egymilliószor „lelépkedjük” az előírt pozíciókba. Olyan megoldást is választhatunk, hogy 10 ablakot képezünk le az ábragenerátorral, ekkor 100 ezer további lépkedésre van szükségünk. 10 ezer expozíciós ábragenerálással viszont csupán 100 expozíciós lépkedés marad hátra. Képzelt feladatunk elképzelt megoldásait kétféle számmal jellemezzük: a két berendezéssel végzett expozíciók aránya,  $A_{exp}$ ; a másik a szükséges expozíciók összege,  $S_{exp}$ .

Az első megoldásban:  $A_{exp}=1/1\,000\,000$   
és  $S_{exp}=1\,000\,001$ ;

\* A továbbiakban alakzaton olyan egyszerűen vagy többszörösen összefüggő zárt poligont értünk, amely egyértelműen lefedhető derékszögű négyszögekkel. Az alakzatok sokasága adja a maszklemez ábráját. Az ábragenerátor derékszögű négyszögekből (elemi alakzat vagy ablak) rakja össze az alakzatokat.

Beérkezett: 1980. VII. 18.

a második változatban:  $A_{\text{exp}} = 10/100\ 000$   
és  $S_{\text{exp}} = 100\ 010$ ;  
a harmadik megoldásban:  $A_{\text{exp}} = 10\ 000/100$   
és  $S_{\text{exp}} = 10\ 100$ .

A példa nem valóságos esetet illusztrál, mégis alkalmas arra, hogy lényeges következtetéseket vonjunk le belőle. Az expozíciós arány változását követi az expozíciós összeg,  $S_{\text{exp}}$  változása. Gyanítható, hogy létezik olyan  $A_{\text{exp}}$ , ahol  $S_{\text{exp}}$  minimális, azaz az ábragenerálás és a lépkedés képkialakításában létezik optimális megosztás. Példánkban könnyen megtalálhatjuk, hogy az optimális esetben:

$$A_{\text{exp}} = 1000/1000 = 1 \text{ és} \\ S_{\text{exp}} = 2000.$$

További lényeges tanulságunk az, hogy a 4. követelmény kedvezően egybeesik az 1. követelménnyel, vagyis minimális összegű expozíció esetén azonosná válik a berendezések leterhelése.

Általánosságban az 1. és a 4. követelmények nemcsak a leképzési folyamat kedvező szervezését, hanem a nagy értékű berendezések jobb kihasználását is célozzák.

A 2. pont magától értetődő követelményt jelent. A gyakorlatban a két üzemzavar között eltelt időt csökkentik — a berendezések meghibásodásán túlmenően — az üzemeltetéshez szükséges szolgáltatások instabilitásai is. Ez a körülmény korlátozza az egy lemezre készíthető ábra nagyságát, pontosabban az egy lemezre leképezhető elemi alakzatok számát. Ellentmondás állhat elő tehát a 2. és a 3. pont alatt leírt követelmények között. Amennyiben az expozíciók száma olyan nagy, hogy a végrehajtásukhoz szükséges idő meghaladja a két üzemzavar közötti várható időtartamot, két vagy több lemezre kell részletekben leképezni az ábrát, vagyis nő a lemezfelhasználás. Az ábragenerálás és a lépkedés műveleteinek optimális megosztásával, illetve az expozíciók összegének minimalizálásával a 2. és a 3. pont követelményeinek is eleget tehetünk a közepesen nagy bonyolultságú ábrák esetén.

További javulást érhetünk el, ha az adatelőkészítést egy másik szempontból is optimalizáljuk. Ez pedig egy adott számú expozíció végrehajtásához szükséges idő minimalizálása. Mivel egy exponálás helye asztalmozgatással adható meg, adott számú expozíció végrehajtásához asztalmozgatások „növekményes” sorozata tartozik. A mozgás sebessége adott, így az asztalmozgatások összege arányos a végrehajtási idővel. Nagyszámú asztalmozgatás esetén már nem közömbös, hogy milyen sorrendben járjuk be az egyes pozíciókat. A bejárési sorrend optimális megválasztásával minimalizálni lehet a bejárési úthosszat és ezáltal az expozíciók végrehajtásához szükséges időt. A későbbiekben kimutatjuk, hogy a bejárési úthosszban jelentős megtakarítás érhető el kedvező esetben.

Összefoglalva azt reméljük az optimalizálásoktól, hogy egyrészt az expozíciók számának csökkentésén keresztül, másrészt az időegység alatt végrehajtható exponálások számának növelésével a berendezések termelékenységét, a lemezfelhasználás és a lemezselejt csökkenését, a biztonságos ábrakialakítást növelik, illetve javítják.

A továbbiakban — a dolgozat érdemi részében — az ábragenerálás és a lépkedés optimális szervezésének lehetőségeivel, valamint a leképzési útvonal minimalizálásának egy lehetséges megoldásával részletesebben is foglalkozunk.

#### A csoportos ábraleképzés optimalizálása és a kompozitálási technika lehetőségei

A bevezetőben már említettük, hogy a maszklemez ábráinak egy részét ábragenerálással elemi alakzatokból (ablak) rakjuk össze, majd ezt az ábracsoportot lépkedéssel megsokszorozzuk (és kicsinyítjük). A továbbiakban ezt a módszert csoportos képkialakításnak vagy csoportos ábraleképzésnek nevezzük. Célnk az, hogy az ábrageneráló és a lépkedő berendezés között úgy szervezzük a munkamegosztást, hogy a két berendezésen végrehajtott összes expozíciók száma minimális legyen. A maszklemezen levő összes elemi alakzat számát a következő összefüggéssel modellezhetjük:

$$N = m_x \cdot m_y [C_1 \cdot a_x \cdot a_y + C_2 \cdot b + C_3], \quad (1)$$

ahol:  $m_x$  az egy sorban levő chippek száma,  $m_y$  a chip sorok száma,  $C_1$  mátrixba rendezett alakzatszoportot jelöl a chipen belül, számértéke a csoportot alkotó ablakok számát adja,  $a_x$  az egy sorban levő  $C_1$  jelű csoportok száma,  $a_y$  a  $C_1$  jelű alakzatszoportból alkotott sorok száma,  $C_2$  olyan nem mátrixba rendezett alakzatszoportot jelöl, amely azonban többször is előfordul a chipen belül, számértéke a csoportot alkotó ablakok számát adja,  $b$  a  $C_2$  jelű alakzatszoport előfordulási számát adja,  $C_3$  nem mátrixba rendezett és a chipen belül csak egyszer szereplő alakzatszoportot jelöl, számértéke az ezt összerakó ablakok számát jelenti.

A teljes maszkábra kialakításához szükséges expozíciók száma attól függ, hogy az ábragenerálással mekkora alakzatszoportot alakítunk, vagy alakíthatunk ki. A hagyományos eljárással, LSI maszkok esetén, az expozíciós arány több nagyságrenddel eltér az egységtől:

$$A_{\text{exp}} = \frac{C_1 \cdot a_x \cdot a_y + C_2 \cdot b + C_3}{m_x \cdot m_y} = 10^2 \dots 10^4. \quad (2)$$

Az összes expozíció száma is meglehetősen nagy:

$$S_{\text{exp}} = C_1 \cdot a_x \cdot a_y + C_2 \cdot b + C_3 + m_x \cdot m_y = 10^4 \dots 10^6. \quad (3)$$

Az optimális méretű alakzatszoport meghatározásához átalakítjuk az (1) kifejezést:

$$N = m_x \cdot m_y \left( \frac{C_1 \cdot a_x \cdot a_y}{n_1} \cdot n_1 + \frac{C_2 \cdot b}{n_2} \cdot n_2 + C_3 \right). \quad (4)$$

A (4)-es kifejezést most már úgy értelmezzük, hogy a  $C_1$  és a  $C_2$  típusú alakzatszoportokat felbontjuk kisebb csoportokra. Ezeket a kisebb csoportokat ábragenerálással alakítjuk ki, ismételt leképzésüket pedig lépkedéssel valósítjuk meg. Ilyen értelemben az összes expozíciók száma a következőképpen alakul:

$$S_{\text{exp}} = \frac{C_1 \cdot a_x \cdot a_y}{n_1} + \frac{C_2 \cdot b}{n_2} + C_3 + m_x \cdot m_y (n_1 + n_2 + 1). \quad (5)$$

Megjegyezzük, hogy a  $C_3$  típusú alakzatsoprot nem tartalmaz ismétlődő részcsoprotokat, így teljes egészében ábragenerálással kell kialakítani. Több kisebb csoportra való bontását mégis indokoltta teheti az az eset, amikor  $C_3$  olyan nagy számú elemi alakzatosot tartalmaz, amelyeket biztonságosan nem lehet egyetlen lemezre leképezni. Ilyenkor mind a szükséges expozíciók száma, mind a felhasznált lemezek száma megnő.

Kedvezőbb a helyzet a  $C_2$  típusú alakzatsoprotnál. A  $C_2$  csoport nem szabályos ismétlődéssel helyezkedik el a chipen belül, ezért  $n_2=b$  választással kell élnünk, vagyis  $C_2$  alakzatait generálással képezzük le, majd  $b$ -szer ismételtlen leképezzük a lépkedés során.

Az optimális csoportalakítás szempontjából a legkedvezőbb a  $C_1$  típusú alakzatsoprot. A generálásnál választhatunk  $C_1$  és annak minden olyan egész számú többszörösének leképezése közül, amely egész számú osztója az  $a_x \cdot a_y$ -nak.

Az (5)-ös összefüggésből az elméletileg elérhető optimumot úgy kapjuk, ha meghatározzuk az  $n_1$  és  $n_2$  szerinti parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial S_{\text{exp}}}{\partial n_1} = -\frac{C_1 \cdot a_x \cdot a_y}{n_1^2} + m_x \cdot m_y \quad (6)$$

és

$$\frac{\partial S_{\text{exp}}}{\partial n_2} = -\frac{C_2 \cdot b}{n_2^2} + m_x \cdot m_y \quad (7)$$

A (6)-os és a (7)-es kifejezést nullával egyenlővé téve megkapjuk  $n_{1\text{opt}}$  és  $n_{2\text{opt}}$  értékét:

$$n_{1\text{opt}} = \sqrt{\frac{C_1 \cdot a_x \cdot a_y}{m_x \cdot m_y}} \quad (8)$$

és

$$n_{2\text{opt}} = \sqrt{\frac{C_2 \cdot b}{m_x \cdot m_y}} \quad (10)$$

Az összes expozíciók számának minimuma:

$$S_{\text{exp}}^{\text{min}} = \frac{C_1 \cdot a_x \cdot a_y}{n_{1\text{opt}}} + \frac{C_2 \cdot b}{n_{2\text{opt}}} + C_3 + m_x \cdot m_y (n_{1\text{opt}} + n_{2\text{opt}} + 1) \quad (11)$$

A (11)-ben hallgatólagosan azt az esetet vettük optimálisnak, amikor a  $C_3$  típusú alakzatsoprotot nem bontjuk részekre.

Az  $S_{\text{exp}}^{\text{min}}$  esetén az expozíciós arány:

$$A_{\text{exp}}^{\text{opt}} = \frac{[C_1 \cdot a_x \cdot a_y / n_{1\text{opt}}] + [C_2 \cdot b / n_{2\text{opt}}] + C_3}{m_x \cdot m_y \cdot [n_{1\text{opt}} + n_{2\text{opt}} + 1]} \quad (12)$$

Könnyen belátható, hogy  $A_{\text{exp}}$  akkor éri el az elméleti optimumot, ha  $C_3 = m_x \cdot m_y$  (13). Ilyenkor  $A_{\text{exp}} = 1$ .

A (4)-es összefüggésben szereplő felbontással és a (8), (10) kifejezésekből nyert optimális csoportokra bontással elvileg már megtervezhető a minimális expozíciós számot nyújtó csoportos ábraleképezés. A lemezfelhasználás és a biztonságos leképezés szempontjai, valamint a  $C_1$  és a  $C_2$  tényleges osztható-

sága azonban befolyásolják a tényleges optimum kialakítását. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a gyakorlatban általában csak közelíteni lehet az elméleti optimumot.

A csoportos ábraleképezés fontos része a kompozitálási technika. Kompozitálásnak nevezzük azt az ábraleképezési módszert, amelynek során az ábrát csoportokra bontva, azokat ábragenerálással alakítjuk ki, majd lépkedéssel egyrészt „összefűzzük”, másrészt többszörösen leképezzük az alakzatsoprotokat. Másképpen, a kompozitálás az ábrarészletek összeillesztésének, sorrendiségének, többszöri leképezésének megtervezése. Tágabb értelemben a kompozitálás az ábra csoportokra való bontásánál kezdődik, vagyis az ábragenerálás megtervezésénél. Az optimális csoportalakításnak így módon a kompozitálás az egyik alapvető eleme. A kompozitálásnak természetesen a berendezés oldaláról is van előfeltétele, nevezetesen az, hogy az ábrarészleteket minimális alak- és mérethibával lehessen összeilleszteni.

Szűkebb értelemben kompozitálásnak azt a technikát nevezzük, amikor a hagyományos módszertől eltérően a chipen belüli alakzatosot több részletben alakítjuk ki az ábragenerálás során, majd ezeket a „lépkedéssel” illesztjük össze és sokszorozzuk meg. Az előbbieket szerint azonban hiba lenne a kompozitálást önállóan vizsgálni, azaz elválasztani az optimális csoportalakítás, a lemezfelhasználás és a biztonságos leképezés kérdéseitől.

Az optimális csoportalakítást, a biztonságos leképezést, a minimális lemezfelhasználást és a kompozitálási technika kérdéseit most már együttesen vizsgálhatjuk egy gyakorlati példa kapcsán.

$$N = 11 \cdot 13 \cdot (5 \cdot 8 \cdot 256 + 24 \cdot 400 + 10\,000) \quad (14)$$

A  $C_1$  típusú ábrát az 5 ablakból kialakítható,  $8 \times 256$  méretű mátrixba rendezett alakzatsoprot képezi. A 400 elemi alakzatosból összerakható  $C_2$  típusú ábra 25-ször ismétlődik a chipen belül nem ciklikusan, illetve nem mátrix alakban. Itt jegyezzük meg, hogy a  $C_2$  ismétlődő ábrái azonos állásúak kell, hogy legyenek. Tükrözés vagy elforgatás esetén — az ábraleképezés szempontjából — már nem tekinthetjük  $C_2$  típusúnak az egyébként azonos felépítésű csoportot sem.

Végül a  $C_3$  típusú ábra 10 ezer elemi alakzatosból áll.

Az ábrák jellege szerint az LSI áramkörök sokfélék. Alapvetően azonban két jellegzetes csoportra oszthatjuk a logikai áramköröket. A memóriarámkörök képezik az egyik csoportot, amelyek topológiai felépítésére jellemző a mátrixba rendezett alakzatosok nagy száma. Úgy is mondhatjuk, hogy ekkor:

$$C_1 \cdot a_x \cdot a_y \gg C_2 \cdot b, \quad \text{sőt} \quad (15)$$

$$C_1 \cdot a_x \cdot a_y \gg C_2 \cdot b + C_3 \quad (16)$$

is általában teljesül.

Az áramkörök másik alapvető csoportja az ún. „véletlen logikák”. Ide sorolhatók a felhasználóorientált áramkörök is. Ezek topológiájára jellemző a nem ciklikusan ismétlődő alakzatosok túlsúlya, úgy

is írhatjuk, hogy:

$$C_2 \cdot b + C_3 \gg C_1 \cdot a_x \cdot a_y, \quad \text{sőt} \quad (17)$$

$$C_2 \cdot b \gg C_1 \cdot a_x \cdot a_y \quad \text{és} \quad C_3 \gg C_1 \cdot a_x \cdot a_y \quad (18)$$

is gyakran teljesül.

Ilyen szempontból a (14)-es összefüggéssel megadott ábra vegyesnek tekinthető. Szándékosan választottunk olyan példát, ahol a három alapvető ábratípus nagyságrendileg azonos mértékben szerepel.

Az elméletileg elérhető optimális felbontás a következő:

$$n_{1\text{opt}} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 256}{11 \cdot 13} \cong 8,4 \quad (19)$$

és

$$n_{2\text{opt}} = \frac{25 \cdot 400}{11 \cdot 13} \cong 8,3. \quad (20)$$

Az egész részeket véve figyelembe:

$$n_{1\text{opt}} = n_{2\text{opt}} = 8. \quad (21)$$

A  $C_1$  típusú ábrát többféleképpen is felbonthatjuk. Egy megoldás lehet az 5·256 expozícióból kialakítható alakzatsor leképzése ábragenerálással, majd ennek lépkedéssel való 8·11·13-szoros ismétlése.

A  $C_2$  típusú ábrához  $n_2$ -t  $b$  értéke szerint kell megválasztani. Az elvi optimum helyett így  $n_{2\text{opt}} = 25$  választása a legkedvezőbb.

A  $C_3$  típusú ábrát az expozíciószám és a lemezfelhasználás növelése árán lehet csak felbontani. Feltételezzük, hogy a leképzés biztonsága lehetővé teszi a  $C_3$  alakzatainak együttes generálását.

A tett feltételezésekkel:

$$S_{\text{exp}} = 5 \cdot 256 + 400 + 10\,000 + 11 \cdot 13 \cdot (8 + 25 + 1). \quad (22)$$

Míg a hagyományos eljárással:

$$S_{\text{exp}} = 5 \cdot 8 \cdot 256 + 25 \cdot 400 + 10\,000 + 11 \cdot 13. \quad (23)$$

Eredményeinket táblázatosan összefoglalva:

Eljárás	A szükséges expozíciószám		$S_{\text{exp}}$
	generálás	lépkedés	
Optimalizált	11 680	4862	16 542
Hagyományos	30 240	143	30 383

Látható, hogy az elméleti optimumot nem értük el az ábraösszetétel miatt, de jelentős javulást igen!

$$A_{\text{exp}} \Big|_{\text{opt}} = \frac{11\,680}{4862} \cong 2,4 \quad (24)$$

$$A_{\text{exp}} \Big|_{\text{hagy}} = \frac{30\,240}{143} \cong 211$$

A szükséges expozíciók száma — a hagyományoshoz képest — lényegesen, közel 50%-kal csökkent, ami jelentős gépidőcsökkenést eredményez.

A szükséges gépidők [2500 exp/óra leképzési sebességgel számolva]:

Eljárás	A szükséges gépidők (óra)		
	generálás	lépkedés	összesen
Optimalizált	4,6	2	6,6
Hagyományos	12,0	~ 0	12,0

A lemezfelhasználás a következőképpen alakul:

Eljárás	A lemezfelhasználás (db)		
	generálás	lépkedés	összesen
Optimalizált	1 (1)	1 (1)	2 (2)
Hagyományos	1 (2)	1 (1)	2 (3)

Feltételeztük, hogy a két meghibásodás közötti időtartam 20 óra. Ilyenkor a lemezfelhasználás az optimalizált és a hagyományos esetben megegyezik. A zárójeles értékeknél azonban 10 órára választottuk a két üzemzavar között várható időtartamot. Ilyenkor a lemezfelhasználás az optimalizált esetben a kedvezőbb.

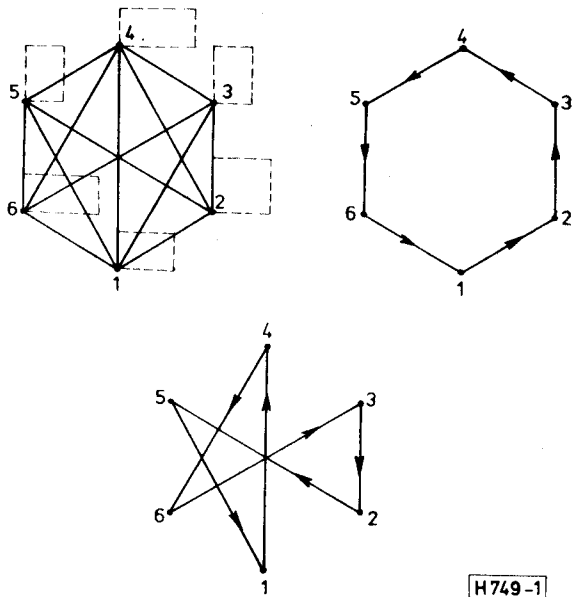
Végül a kompozitálás technikájáról néhány gondolatot. Az ábragenerálás során leképezzük az 5·256-os, a 400-as és a 10 000-es alakzatsoportokat egyetlen lemezre. Majd például a  $C_1$  és a  $C_2$  ábra letakarásával leképezzük  $C_3$ -at 11·13-szor, azután a  $C_1$  és a  $C_3$  letakarásával a  $C_2$ -t, 25·11·13-szor, végül  $C_2$  és  $C_3$  letakarásával 11·13·8-szor  $C_1$ -et. A lépkedés kivitelezése bonyolultabbá válik, mindez azonban bőségesen megtérül.

A leképzési útvonal minimalizálásának lehetőségei

Az LSI maszkretegeken számos olyan alakzat helyezkedik el, amelyek pozíciója nem járható be ciklikusan. Más szavakkal éppen annyi expozíciót kell végrehajtunk, ahány ilyen alakzat van. Az exponálás végrehajtása során a berendezések asztalát a kívánt pozícióba vezéreljük, ezt követi a megvilágítás. Az expozíciók végrehajtásához szükséges idő arányos az egyes elmozdulások eredő hosszával, vagyis a pozíciók bejárési útvonalának hosszúságával. A vezérlés szempontjából a pozíciók bejárési sorrendje közböns. Jogosan merül fel a kérdés, hogy van-e olyan bejárési sorrend, amelyhez minimális hosszúságú bejárési út tartozik?

A szemlélet alapján azt válaszolhatjuk, hogy létezik minimális úthosszú bejárési sorrend. Egyszerű esetben ezt próbálgatással is meg lehet határozni. Ilyen példát mutatunk be az 1. ábrán, ahol a szabályos hatszög csúcaiban elhelyezkedő hat téglalapot ábrázoltunk.

Legyen az a feladat, hogy az 1. pontból elindulva úgy járjuk be az 1–6. pozíciókat, hogy a megtett út minimális hosszúságú! Ehhez felrajoltuk az összes lehetséges két pontot összekötő vonalat. Példánkban a távolságok könnyen megadhatók: ha az 1–2. pont távolsága 1, akkor az 1–4. értéke 2, az 1–3. pontok között pedig  $\sqrt{3}$  mérhető. Az 1.b és az 1.c ábrán egy lehetséges utat tüntettünk fel, a



1. ábra. A szabályos hatszög csúcaiban elhelyezett „ablakok” bejárása

nyilak jelzik a bejárési sorrendet. Az 1.b útvonal hossza  $6 \cdot 1 = 6$  egység, az 1.c útvonalé pedig  $3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 10,46$ . A jelentős különbség igazolni látszik az optimalizálás szükségességét.

A hatszög pontjainak bejárásához még több utat kijelölhetnénk, de a további próbálgatás helyett a gráfelmélet segítségével megkíséreljük a feladat általános megoldását megtalálni. A berendezések  $n$  db expozíció során végrehajtott asztalmozgatásait egy  $n$ -pontú gráffal modellezzük. A gráf pontjait a leképezés sorrendjének megfelelően összekötjük. A különböző leképezési sorrendnek megfelelő gráfok az alábbi közös tulajdonságokkal rendelkeznek:

- összefüggőek,
- körök,
- pontjaik száma  $n$ ,
- éleik száma  $n$ .

Az ilyen gráfot Hamilton-gráfnak vagy Hamilton-körnek nevezik. Ha töröljük a kör utolsó élét (az  $n$ -ik pontból a kiinduló pontba vezetőt), Hamilton-utat kapunk. Lényegében elegendő a Hamilton-utat vizsgálni.

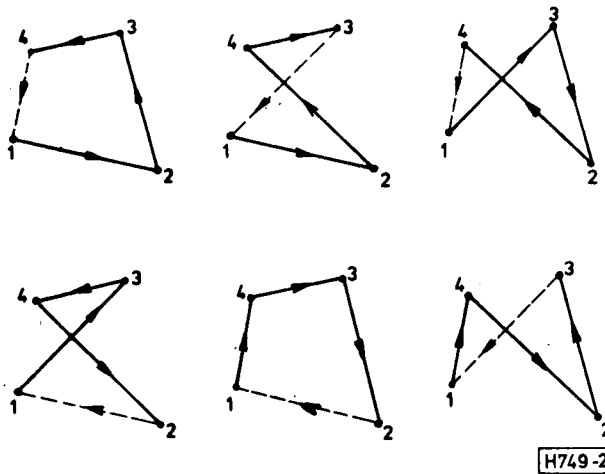
Vizsgálatainkhoz a teljes  $n$ -pontú gráfból indulunk ki. A teljes gráf összes lehetséges Hamilton-útjainak számát a következő gondolatmenettel határozhatjuk meg: a kitüntetett első pontból  $n-1$  felé mehetünk, a második pontból  $n-2$  irányban, és így tovább. Az utolsó előtti pontból már csak az utolsóba. Vagyis az összes lehetséges Hamilton-utak száma:

$$N_H = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)! \quad (26)$$

Ez a szám  $(n-1)$  faktoriális – a gráf pontjainak növekedésével igen nagy lehet. A 2. ábrán egy 4 pontú gráf lehetséges Hamilton-útjait vázoltuk.

Könnyen belátható, hogy az összes lehetséges Hamilton-körök száma éppen fele a Hamilton-utak szá-

mának. Az  $n$ -pontú teljes gráf bármelyik Hamilton-körét az irányítástól függően kétféleképpen járhatjuk be. Hamilton-utat keresve azonban egyszer az  $n$ . pontból az 1. pontba mutató élét, a második esetben a 2. pontból az 1. pontba mutató élét hagyjuk el a körnek, vagyis a kétféle bejárás két független megoldásként jelentkeznek. Feladatunk szempontjából ezeket egyetlen megoldásnak tekinthetjük. A 2. ábrán érzékelhető, hogy a hat Hamilton-út lényegében három Hamilton-körnek felel meg. A szaggatott rajzolt élekkel kiegészítve a gráfokat kiderül, hogy  $a-e$ ,  $b-d$  és  $c-f$  megegyeznek, ha az irányítástól eltekintünk.



2. ábra. A 4-pontú gráf Hamilton-útjai,  $N_H = 3! = 6$

Feladatunk most már az, hogy az utakból a leg-rövidebbet kiválasszuk. A legkisebb úthosszú, vagy a leggazdaságosabb Hamilton-út keresésére általános megoldást ez ideig még nem sikerült találni [1]. Feladatunk speciális esetnek tekinthető. Ennek megoldására megkísérlünk eljárást keresni.

Jelöljük ki egy kezdőpontot! Esetünkben ez egyszerű, hiszen a leképezési mező geometriai közép-pontjából indulunk mindig. Az első pontból  $n-1$  felé indulhatunk. Kiválasztjuk ezek közül a leg-rövidebb élet. A második pontból  $n-2$  felé mehetünk és ezek közül kiválasztjuk ismét a leg-rövidebbet. Eljárásunkat addig folytatjuk, amíg elfogyanak a még nem érintett pontok. Az utolsó előttiből már csak az utolsó pont felé indulhatunk. Mivel minden egyes lépésnél a minimális hosszúságú élet kiválasztottuk, ezek összege a minimális hosszúságú utat közelíti.

Érdeemes megvizsgálni, hogy hány lépésre van szükség. Az első él kiválasztásához  $n-1$  vizsgálatra, a másodikhoz  $n-2$  vizsgálatra és így tovább. Az  $(n-1)$ -ik él már tulajdonképpen nem kell, hogy szerepeljen a kiválasztásban, de a teljesség kedvéért következő képletünk ezt is tartalmazza:

$$V_H = n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Könnyen belátható, hogy  $V_H$  megegyezik az  $n$ -pontú gráf összes éleinek számával:

$$V_H = E_n = \binom{n}{2} = \sum_{k=2}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2}. \quad (28)$$

Ez mindenesetre sokkal kevesebb, mintha az összes Hamilton-utat vizsgálánánk ( $N_H$ ).

$$\frac{N_H}{V_H} = \frac{2 \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)} = 2 \cdot \frac{(n-2)!}{n} \gg 1. \quad (29)$$

A vázolt algoritmust mátrix-alakban is szemléltethetjük. Rendeljük ugyanis a teljes  $n$ -pontú gráf éleihez olyan számot, amely a két pont távolságát jellemzi. Ezeket a számokat mátrixba foglalhatjuk:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ \hline 1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{array} \quad (30)$$

A (30) lényegében az  $n$ -pontú gráf incidencia-mátrixa. Mi önkényesen érték-mátrixnak nevezzük, amelyben a diagonálisban szereplő értékek:

$$r_{11} = r_{22} = \dots = r_{nn} = 0 \quad (31)$$

és

$$r_{ik} = r_{ki}, \quad k = i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

A mátrixos felírás egyben azt jelenti, hogy a gráf pontjait 1, 2, ...,  $n$  sorszámokkal láttuk el. A mátrix első sora az 1. ponthoz csatlakozó élek értékét (hosszát), a második sora a 2. ponthoz csatlakozó élek értékét stb. jelenti. A minimális értékű út keresését a mátrix meghatározása után a következőképpen végezhetjük. Kiválasztjuk az első sorból a legkisebb értékű elemet. Ennek második indexében szereplő sorba „ugrunk”. Ebből a sorból töröljük azt az elemet, amelynek második indexében 1 szerepel és a maradékból kiválasztjuk a legkisebb értékű elemet. Ennek második indexe mutatja meg, hogy melyik a következő vizsgálandó sor. Az eljárást addig folytatjuk, míg minden sort végig nem járunk.

Az eljárás használhatóságát elvileg két tényező is leronthatja. Az egyik, hogy az első pont megválasztásától függően különböző hosszúságú minimális utakat kaphatunk. Szerencsére, feladatunk szerint, a kiinduló pont mindig a leképzési mező geometriai középpontja, amit bevonunk a gráf  $n$  pontja közé. Ezáltal a minimális út keresése egyértelművé válik. A másik problémát az okozhatja, ha a gráf élei között van kettő vagy több olyan, melyeknek hossza egyenlő. Tétélezzük fel ugyanis, hogy a 3. pontból kiinduló  $n-3$  db élet vizsgálva két egyforma értékűt találunk a legkisebbek között. Az egyiket választva végigvisszük az eljárást, majd a másikat választva újra elvégezzük az eljárást. Végül a két minimálisnak kapott út közül a kisebb értékűt tekintjük megoldásnak. Ha a minimális értékek kiválasztása során több azonos életet találunk, vagy ha több pont esetén is találunk ilyen éleket, akkor a vizsgálati lépések száma növekszik. Az első esetben a párhuzamosan kapcsolódó utak száma, a másodikban mind a párhuzamosan, mind a sorosan kapcsolódó

utak száma megnő. Kedvezőtlen esetben a vizsgálatok száma megközelíti az  $(n-1)!$  értékét, ami igen nagy szám lehet és egyúttal eljárásunk használhatatlanná válik.

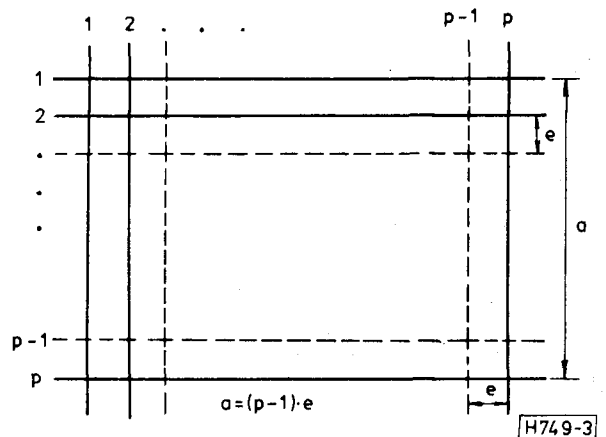
A probléma feloldását a következő módszerrel adhatjuk meg (1. irodalom):

Az élek hossza a berendezések asztalmozgatásának felbontása (legkisebb lépés) következtében mindig egész számnak vehető. Ha egy élhossz többször is előfordul, akkor előfordulásait egyikük kivételével úgy módosíthatjuk, hogy az egyikhez hozzáadjuk az egységnek a hányadát, legyen ez  $q$ , a másikhoz  $2 \cdot q$ -t, a harmadikhoz  $3 \cdot q$ -t stb. Ehhez  $q$ -t úgy választjuk meg, hogy a módosítások összege az egységnél kisebb legyen. Ha  $k$  számú élhossz fordul elő többször és egy élhossz maximálisan  $m$ -szer szerepel, akkor ehhez  $q$ -t az alábbi összefüggés szerint választjuk meg:

$$k \cdot [q + 2 \cdot q + \dots + (m-1) \cdot q] < 1. \quad (33)$$

Az így módosított gráfban már nincsenek azonos élhosszak és a minimalizálási feladat a vázolt eljárás szerint oldható meg. Belátható, hogy a megoldás nemcsak a módosított gráfnak, hanem az eredetinek is megoldása lesz (1. irodalom).

Végezetül megkíséreljük a várható úthossz nyereséget megbecsülni. Legyen négyzet az a terület, amelyen az elemi alakzatok elhelyezkednek. Feszítsünk a terület fölé négyzetes hálót és ennek keresztpontjaihoz rendeljük elemi alakzatot. A feladat most már az, hogy bejárjuk a háló összes pontját egyszer a lehető legrövidebb, egyszer pedig a lehető leghosszabb úton (3. ábra).



3. ábra. Leképzési terület. A négyzetháló keresztpontjait kell bejárni

A bejárando pozíciók száma a 3. ábra jelölésével:

$$n = p^2. \quad (34)$$

Tekintsük minimális úthosszú bejárásnak azt, amikor az  $n$  számú pontot úgy járjuk végig, hogy közben mindig egy osztásnyit lépünk. Ekkor a teljes úthossz:

$$\min S_H = (n-1) \cdot e = (p^2-1) \cdot e. \quad (35)$$

Tekintsük maximális úthosszú bejárásnak azt, amikor az  $n$  számú pontot úgy járjuk végig, hogy köz-

ben mindig a terület átlójának felét lépjük. Tételezzük fel, hogy ilyen bejárás — legalább is közelítőleg — létezik. Ekkor a teljes úthossz:

$$\max S_H = \frac{(n-1) \cdot \sqrt{2} \cdot (p-1) \cdot e}{2} = \frac{(p^2-1)(p-1)e \cdot \sqrt{2}}{2}. \quad (36)$$

A minimális és a maximális bejárás aránya:

$$\frac{\min S_H}{\max S_H} = \frac{\sqrt{2}}{p-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}-1}. \quad (37)$$

A nyereség százalékosan:

$$NY = 100 \cdot \left[ 1 - \frac{\min S_H}{\max S_H} \right] = 100 \cdot \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}-1} \right]. \quad (38)$$

Feltételezéseinket figyelembe véve (38) csak nagyon közelítő becslést nyújthat. Jól érzékelhető azonban, hogy a pontszám (n) növekedésével a maximálisan várható nyereség növekszik. Néhány ilyen becslést az expozíciós szám függvényében a következő táblázatban foglaltunk össze:

Expozíciós szám (n)	Az optimalizálás maximális úthossz-nyeresége (durva becsléssel)
9	30%
25	64%
100	84%
1 600	96%
10 000	98%

Gyakorlatilag nem érhető el a maximális nyereség. Ennek két alapvető oka lehet:

- a pozíciók elhelyezkedése és azok bejárása általában nem olyan, ahogyan a példában az egyszerű számítás kedvéért feltételeztük;
- az optimalizálás nélküli bejárás általában nem a leghosszabb utat adja.

Hátra van még a gépidő-megtakarítás becslése. Egy elemi alakzat leképzési ideje két tagból tevődik össze:

$$t = t_1 + t_2, \quad (39)$$

ahol  $t_1$  az asztalmozgatáshoz szükséges idő,  $t_2$  a megvilágítási idő.

A 3. ábra szerinti minimális bejárás időszükséglete:

$$T_{\min} = \frac{(n-1) \cdot e}{v} + (n-1) \cdot t_2, \quad (40)$$

míg a maximális bejárás időszükséglete:

$$T_{\max} = \frac{(n-1) \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{n}-1) \cdot e}{2 \cdot v} + (n-1) \cdot t_2, \quad (41)$$

ahol  $v$  az asztal átlagos mozgási sebessége. A (40) és a (41)-ben az  $e$  egységnyi elmozdulás időszükségletét tekinthetjük  $t_1$ -nek:

$$t_1 = \frac{e}{v}. \quad (42)$$

Az időmegtakarítás százalékosan:

$$T_{NY} = 100 \cdot \left( 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \right). \quad (43)$$

Behelyettesítés és átalakítás után,  $t_1 = t_2$  feltételezéssel:

$$T_{NY} = 100 \cdot \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{n}-1) + \sqrt{2}} \right). \quad (44)$$

Néhány becslést értéket az expozíciós szám függvényében a következő táblázatban tüntettünk fel:

Expozíciós szám (n)	Az optimalizálás maximális időmegtakarítása (durva becsléssel)
9	18%
25	48%
100	73%
1 600	93%
10 000	97%

Maximális időmegtakarítás nem érhető el a maximális útnyereségnél említett okok miatt. Mindenesetre a becslés azt látszik igazolni, hogy a bejárásúthossz minimalizálása jelentős megtakarítást eredményezhet a nagy expozíciós számú ábrák generálási idejében.

#### I R O D A L O M

- [1] *Andrásjai Béla*: Ismerkedés a gráfelmélettel. Tankönyvkiadó, 1973.
- [2] *Usztanovka* mikrofotonabornaja, EM—549. Gépkönyv, 1976.
- [3] *Fotopovtorityel*, EM—552. Gépkönyv, 1976.

**Lapunk példányonként megvásárolható**

**V., Váci utca 10.**

**V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. szám alatti  
hírlapboltokban**