

## A diszkrét és a gyors Fourier transzformáció

CEBE LÁSZLÓ  
TERTA – KKVMF

### 1. Bevezetés

A PCM technika megjelenése, vagyis a jelek mintavételezés és kódolás útján továbbítása új korszakot nyitott meg a híradástechnikában. A megindult rohamos fejlődésben új és döntő lépést jelentett a mintavételezett és kódolt jelek számítógépes feldolgozása és az analóg vagy digitális átviteli utak numerikus leutánczása.

A technikai megvalósítást a gyors működésű számítógépek teszik lehetővé. Az LSI technológia bevezetésével a 70-es évek közepétől rendelkezésre állnak az egyre kisebb méretű, egyre gyorsabb működésű és egyre olcsóbbá váló számítógépek és ezzel megindulhatott az új elveken felépülő berendezések kifejlesztése.

Jelenleg a fő cél az FDM rendszereknél a csoportképzés numerikus úton való megvalósítása, hogy a költséges és nagyméretű analóg szűrőket el lehessen kerülni, valamint a PCM és FDM rendszerek közvetlen összekapcsolása.

Sajnos, ez az új technika magasabb matematikát és a hagyományos analóg és digitális technikában megszokott elvektől eltérő ismereteket kíván.

Ezen új technika elsajátításához elsősorban

- a diszkrét és a gyors Fourier transzformáció,
- a Z Transzformáció és
- a digitális szűrők

ismerete szükséges. Jelen cikkünkben az első témakörrel foglalkozunk. Célunk az, hogy olyan egyszerű és világos tárgyalásmódot adjunk, amelyet az átlagos matematikai képzettséggel rendelkezők is nagyobb nehézség nélkül követni tudnak. A hangsúlyt a fizikai kép megvilágítására helyezzük, ezért a matematikai formulákat lehetőleg részletes ábrákkal és számpéldákkal egészítjük ki.

### 2. A Fourier-sor

Ismeretes, hogy az 1. ábra szerinti bármilyen  $f(t)$  periodikus jel felbontható szinusz és koszinusz jelek összegére:

$$\left. \begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + \\ & + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ahol:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \\ a_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\ b_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Célszerű  $t_1$ -et úgy megválasztani, hogy az integrálok kiszámítása lehetőleg egyszerű legyen. Általában  $t_1=0$  vagy  $t_1=\frac{T_0}{2}$  értéket választunk.

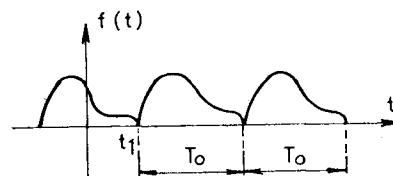
Formuláink tömörebbé és áttekinthetőbbé válnak a komplex számolási móddal. A

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \text{és} \quad \sin x = j \frac{e^{-jx} - e^{jx}}{2}$$

összefüggések felhasználásával az 1. formulát átalakíthatjuk.

A  $k\omega_0$  frekvenciájú tagok összevonásából:

$$\begin{aligned} a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t &= \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \\ &+ \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} = C_k e^{jk\omega_0 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \end{aligned}$$



B 130-1

1. ábra. Periodikus folytonos függvény

Az 1. és 2. formulákba behelyettesítve:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3a)$$

$$C_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \left[ \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} - j \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j} \right] dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3b)$$

$f(t)$  és  $C_k$  kölcsönösen meghatározzák egymást, ezért Fourier-pároknak nevezzük őket.

### 2.1 Periodikus függvény felbontása páros és páratlan összetevőre

Az 1. és 2. formulákból látszik, hogy a Fourier-sor-képzés lineáris művelet. Ha az  $f(t)$  függvényt tetszőlegesen felbontjuk

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots \quad (4)$$

összetevőkre, akkor érvényes a lineáris szuperpozíció elve. Vagyis, ha külön-külön a részfüggvényekre meghatározzuk az  $a_i$ ,  $b_i$  vagy  $C_i$  komponenseket, akkor az egyes  $a_i$ ,  $b_i$ , ill.  $C_i$ -k összeadásából nyerjük az eredeti  $f(t)$  függvény megfelelő komponenseit.

Különösen két felbontásnak van jelentősége:

#### a) Felbontás páros és páratlan függvényekre

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad \text{ahol: } \left. \begin{aligned} f_1(t) &= \frac{f(t) - f(-t)}{2} \\ f_2(t) &= \frac{f(t) + f(-t)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

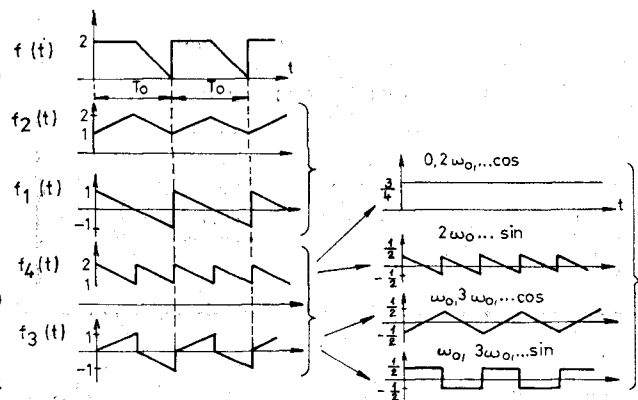
$f_1(t)$  páratlan, csak szinusz összetevőket tartalmaz.  $f_2(t)$  páros, csak koszinusz összetevőket tartalmaz.

#### b) Felbontás csak páros, ill. páratlan harmonikusokat tartalmazó részre

Egyszerűen levezethető, hogy a következő felbontás esetén:

$$f(t) = f_3(t) + f_4(t), \quad \text{ahol: } \left. \begin{aligned} f_3(t) &= \frac{f(t) - f\left(t + \frac{T_0}{2}\right)}{2} \\ f_4(t) &= \frac{f(t) + f\left(t + \frac{T_0}{2}\right)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$f_3(t)$  csak páratlan harmonikusokat,  $f_4(t)$  pedig csak páros harmonikusokat tartalmaz. Példaképpen a 2. ábrában megadjuk egy periodikus függvény felbontását az 5. és 6. formuláknak megfelelően. Semmi akadálya sincs annak, hogy a két eljárást egymás után alkalmazzuk és így az eredeti  $f(t)$  függvény négy részre bontható, amelyek közül kettő páros és kettő páratlan függvény és mindegyik csak páros, ill. csak páratlan harmonikusokat tartalmaz.



B 130-2

2. ábra. Periodikus függvény felbontása

### 2.2 Periodikus impulzusfüggvények Fourier-sora

Periodikus impulzusfüggvénynek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek minden egymást követő  $T_0$  időszakban azonos elrendezésben impulzusokat tartalmaznak. Általános esetben a  $T_0$  időközön belül az impulzusok szabálytalan módon helyezkedhetnek el, de mi csak azt a speciális esetet fogjuk tárgyalni, amikor az impulzusok szabályos  $T$  időközönként követik egymást (3. ábra).

Így:

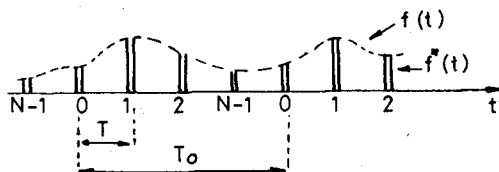
$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{\omega_m}{\omega_0} \quad (7)$$

impulzus van minden  $T_0$  periódusidőben. Az impulzusfrekvencia vagy mintavételezési frekvencia:

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T}$$

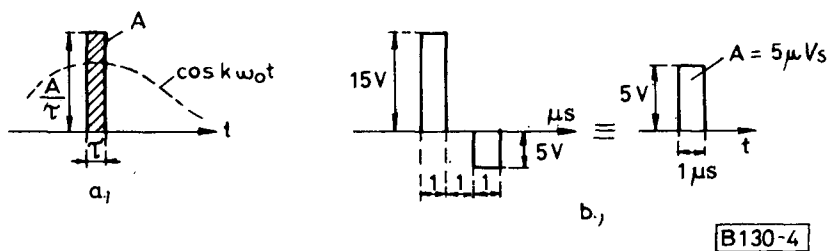
Az impulzusfüggvényt jelöljük  $f^*(t)$ -vel.  $f^*(t)$  rendszerint a burkoló folytonos  $f(t)$  függvény mintavételezéséből származik, de a következőkben mint önálló függvényt tárgyaljuk.

Néhány szót kell szólnunk az impulzusok alakjáról is. A Fourier-komponensek meghatározásánál csupán azt kell megvizsgálnunk, hogy a 2. formula szerinti integrálok mennyiben érinti az impulzusok alakja. A viszonyokat a 4a ábrán világítjuk meg. Könnyen belátható, hogy mivel a  $k$ -ik komponens meghatározásánál az impulzus és  $\cos k\omega_0 t$ , ill.  $\sin k\omega_0 t$  szorzata szerepel, az integrálok értéke változatlan marad mindaddig, amíg az impulzusidő tartama alatt a  $\cos$  vagy  $\sin$  függvény közel állandó. Vagyis amíg  $\tau \ll \frac{1}{k\omega_0}$ , a felharmonikus periódus idejéhez képest.



B 130-3

3. ábra. Periodikus impulzusfüggvény



4. ábra. Az impulzus alakjának a hatása a Fourier. komponensre

Ekkor viszont az impulzust egyértelműen meghatározza az „A” területe. Ha  $\tau$  összemérhető  $\frac{1}{k\omega_0}$  - lal, akkor az illető felharmonikuson már figyelembe kell venni az impulzus alakját. Más szóval, a Fourier-sor felbontóképességét a legmagasabb figyelembe vett felharmonikus határozza meg. Így például a 4b ábra szerinti kettős impulzus kb. 50 kHz-ig (periódus idő 20  $\mu$ s) egyetlen  $5\mu$ Vs területű impulzusnak tekinthető.

Mi a következőkben az impulzusokat  $\tau$  szélességű és  $\frac{A}{\tau}$  magasságú négyszögimpulzusnak tekintjük, ahol  $\tau \ll T$ , határesetben  $\tau \rightarrow 0$ , Dirac impulzusra való átmenettel.

Határozzuk meg ezeketán az 5. ábra szerinti periodikus impulzusfüggvény Fourier-sorát. Tekintsük az impulzusfüggvényt az  $f(t)$  függvény mintavételezésének,  $f(nT) = X_n$  legyen  $f(t)$  metszete és minden metszethez rendeljünk hozzá egy  $A_n = X_n T$  területű impulzust. (A  $T$  szorzót azért érdemes felvenni, mert így az impulzusfüggvény területe közel azonos lesz az  $f(t)$  görbe alatti területtel.)

A Fourier-komponensek számítása nagyon egyszerű lesz, ha felismerjük, hogy a 2., ill. 3b formulákban az integrálszámításnál csak az impulzusok időpontját kell figyelembe venni. Így az integrál összegezéssé fajul. A 3b formulából kapjuk:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f^*(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} [X_0 T e^{-jk\omega_0 \cdot 0T} + X_1 T e^{-jk\omega_0 T} + X_2 T e^{-jk\omega_0 2T} + \dots + X_{N-1} T e^{jk\omega_0 (N-1)T}] = \frac{T}{T_0} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{-jk\omega_0 mT}.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{T_0}{T} = N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{és} \quad W = e^{-\frac{j2\pi}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} - j \sin \frac{2\pi}{N}.$$

Kapjuk:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{-\frac{j2\pi km}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m W^{km} \quad (8a)$$

és fordítva, a 3a formula alapján:

$$f^*(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi knT} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k W^{-kn}. \quad (8b)$$

A fenti formulákban, ha végtelen sok harmonikust veszünk figyelembe, Dirac impulzusokkal számolunk,  $f^*(nT)$  az n-ik impulzus területét adja meg.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen időfüggvényt kapunk, ha csak a  $k=0, 1, \dots, N-1$  komponenst vesszük figyelembe.  $C_k$  értékét 8a-ból 8b-be helyettesítve:

$$\sum_{k=0}^{N-1} C_k W^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} X_m W^{km} \cdot W^{-kn}. \quad (9a)$$

A két összegzés sorrendjét felcserélve:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m \sum_{k=0}^{N-1} W^{k(m-n)} = X_m, \quad (9b)$$

ugyanis:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{k(m-n)} = \begin{cases} N, & \text{ha } n=m \\ 0, & \text{ha } n \neq m. \end{cases}$$

Végeredményben a 8a és 9b formulák alapján:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m W^{km}, \quad (10a)$$

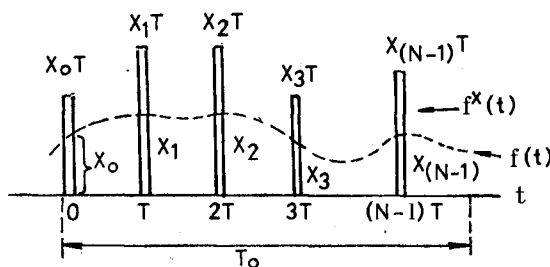
$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} C_k W^{-kn} \quad (10b)$$

$C_k$  és  $X_n$  kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, Fourier-párt képeznek. A 8 és 10 formulák fő jellemzője a periodicitás. Mivel

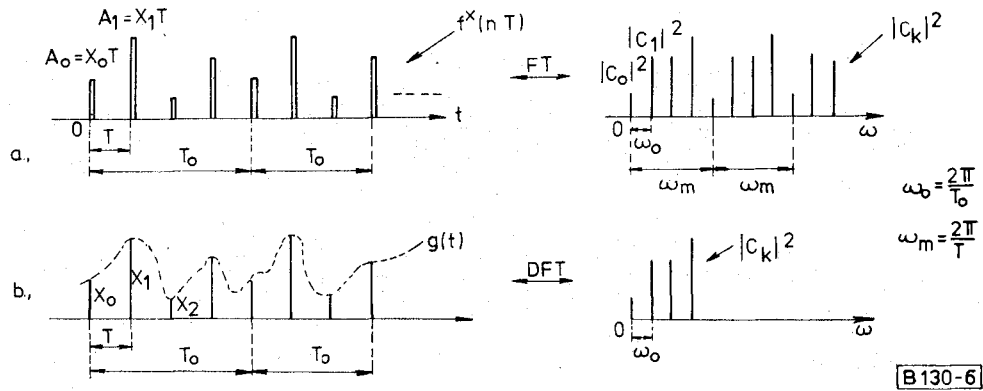
$$W^{sk+rN} = W^{sk}$$

minden  $r, s, k$  egész szám esetén, szükségszerűen fennáll:

$$\left. \begin{aligned} C_{k+rN} &= C_k \\ X_{n+rN} &= X_n \\ f^*[(n+rN)T] &= f^*(nT). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



5. ábra. Az impulzusfüggvény értelmezése



6. ábra. Az FT és DFT spektruma

Figyelemreméltó és alapvető fontosságú a következő megállapítás: a 8. formulában végtelen sok  $C_k$  amplitúdójú komponens előállítja a mintavételezett  $f^x(nT)$  függvényt, amely csak a  $t=nT$  időpontokban tartalmaz  $X_n T$  területű impulzusokat, a  $t \neq nT$  esetben zérust ad. A 10. formula ezzel szemben, mivel csak véges  $N$  számú komponenset tartalmaz, egy periodikus függvényt állít elő, amely a  $t \neq nT$  pontokban is véges. Lényeges viszont, hogy a  $t=nT$  pontokban ez a függvény pontosan az  $X_n$  értéket veszi fel. A viszonyokat a 6. ábrán tüntetjük fel.  $f^x(nT)$  spektruma  $\omega_m$  periódusonként ismétlődik. A  $C_k$  értékek és  $f^x(nT)$  között a kapcsolatot a Fourier-sor-képzés, más szóval a Fourier-transzformáció (FT) adja meg. A nem ismétlődő spektrumhoz a 6b ábra szerint  $g(t)$  függvény tartozik, amely az  $nT$  időpontokban az  $X_n$  értékeket veszi fel, közben pedig véges értékű, általában komplex.  $X_n$  és  $C_k$  között a kapcsolatot a 10. formulák adják meg, ezt diszkrét Fourier transzformációnak nevezzük (DFT). Teljesen általánosítva, bármilyen függvényre való vonatkoztatás nélkül mondhatjuk, hogy a DFT az  $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$  értékekhez a  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$  értéket rendeli. (Megjegyezzük, hogy a hozzárendelésnél fontos a sorrend is, mert például  $X_1$  és  $X_2$  felcserélése  $C_k$  értékeit is megváltoztatja, nemcsak a sorrendjét.) Általános esetben az  $X_n$  értékek komplexek, így a DFT tulajdonképpen  $2N$  adathoz  $2N$  adatot rendel. Ha az  $X_n$  értékek valósak, a  $C_k$  értékek általában komplexek. Ekkor a DFT  $N$  adathoz  $2N$  adatot rendel, ami látszólag redundenciát jelent, ami abban jelentkezik, hogy a  $C_k$  értékek nem függetlenek egymástól. Mint később látni fogjuk, ebben az esetben a  $C_k$ -kat is  $N$  adattal jellemezhetjük.

### 2.3 A $C_k$ együtthatók számítása

Mivel gyakran lesz rá szükségünk, először ábrázoljuk a komplex síkon az előzőleg bevezetett  $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ -et és egész számú hatványait. Elemi komplex algebrai úton könnyen igazolható, hogy  $W^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) a komplex síkon egy egységsugarú körbe írt szabályos  $N$  szög csúcspontjaiban helyezkedik el. Páros és páratlan  $N$  esetét (például  $N=5$  és  $6$ ) a 7. ábra tünteti fel. Határozzuk meg ezután  $C_k$

explicit alakját. A 8a formulából:

$$C_k = \frac{1}{N} [X_0 + X_1 W^{1k} + X_2 W^{2k} + \dots + X_{N-1} W^{(N-1)k}]. \quad (12a)$$

Vagy a fenti formulát  $W^{-Nk} = 1$ -gyel szorozva:

$$C_k = \frac{1}{N} [X_0 + X_1 W^{-(N-1)k} + X_2 W^{-(N-2)k} + \dots + X_{N-1} W^{-k}]. \quad (12b)$$

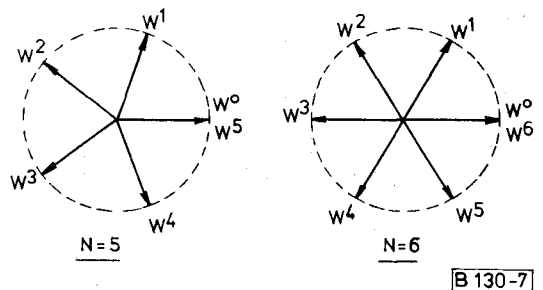
Szemléletesebb képet kapunk, ha  $C_k$  számítását grafikusán követjük végig. A 8. ábrán a 12a formula szerint a komplex síkon felvesszük  $X_0$ -t és ennek végpontjában a  $W^k$  egységvektorral szorzott  $X_1$ -et és így tovább. Ha az  $X$  értékek valósak, a tört vonalak mindig  $W^k$  szögével megtörve követik egymást. Az  $N-1$ -ik vektor végpontja adja  $C_k$ -t.

A  $C_k$ -ra vonatkozólag a következő fontosabb megállapításokat tehetjük:

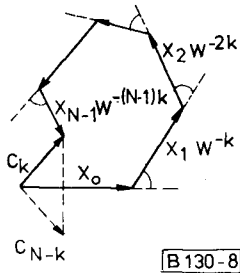
a)  $C_0 = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_{N-1}$ . (13)  
Ha az  $X$  értékek valósak,  $C_0$  is valós.

b) Ha  $N$  páros:  
 $C_{\frac{N}{2}} = X_0 - X_1 + X_2 - \dots - X_{N-1}$ . (14)

Ha az  $X$  értékek valósak,  $C_{\frac{N}{2}}$  is valós.

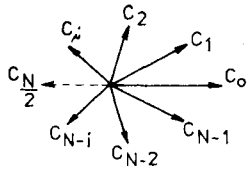


7. ábra.  $W^n$  szerkesztése az egységsugarú körön



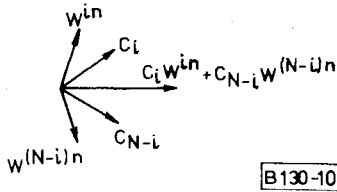
B130-8

8. ábra.  $C_k$  szerkesztése valós  $X$  esetén



B130-9

9. ábra. A  $C_k$  komponensek valós  $X$  esetén



B130-10

10. ábra.  $X_n$  szerkesztése

c) Ha az  $X$  értékek valósak,  $C_{N-k} = C_k^*$ . (15)

Ugyanis a 12a formulában  $k$  helyébe  $(N-k)$ -t írva, az  $i$ -edik tag lesz:

$$X_i W^{i(N-k)} = X_i W^{-ik},$$

ami a konjugáltja a  $C_k$ -ban levő tagnak, minden tag a konjugáltjává vált át.

Tehát ha minden  $X_i$  valós, elég  $C_0, C_1, \dots, C_{\frac{N}{2}}$  (páratlan  $N$  esetén  $\frac{C_{N-1}}{2}$ ) meghatározása, a többi  $C_k$  érték konjugált képzés útján adódik.

Ebben jelentkezik az előzőleg említett redundancia. Végeredményben, ha minden  $X_i$  valós, a DFT komponensek a 9. ábra szerint konjugált páronként he-

lyezkednek el a komplex síkon. A 8. ábra szerinti szerkesztésből is követhető, hogy  $C_{N-k}$  meghatározásánál  $X_1 W^{-k}$  stb. vektorok szerepelnek, tehát az eredő  $C_k^*$  lesz.

### 2.4 $X_n$ meghatározása $C_k$ -ből

A 10b formulából felírhatjuk  $X_n$  értékét explicit alakban:

$$X_n = C_0 + C_1 W^{-1n} + C_2 W^{-2n} + \dots + C_{N-1} W^{-(N-1)n}. \quad (16a)$$

Vagy a fenti formulát  $W^{Nn} = 1$ -gyel szorozva:

$$X_n = C_0 = C_1 W^{(N-1)n} + C_2 W^{(N-2)n} + \dots + C_{N-1} W^n. \quad (16b)$$

A 12. és 16. formulák összevetéséből látszik a teljes analógia ( $C_k$ -ban a konstans  $N$  osztótól eltekintve). Tehát ugyanaz a számítási módszer alkalmas az  $X_n$ -ekből  $C_k$  vagy a  $C_k$ -kból  $X_n$  meghatározására. (A kittevőben szereplő negatív előjel csupán annyit jelent, hogy  $W$  helyébe  $W^*$ -ot kell írunk.)

Ha az  $X$  értékek valósak, a komplex síkon is könnyen követhetjük  $X_n$  meghatározását. A 10. ábrán tüntetjük fel a 16a formula „ $i$ ” és „ $N-i$ ” tagjának a hatását. Látszik, hogy a

$$C_i W^{-in} + C_{N-i} W^{-(N-i)n}$$

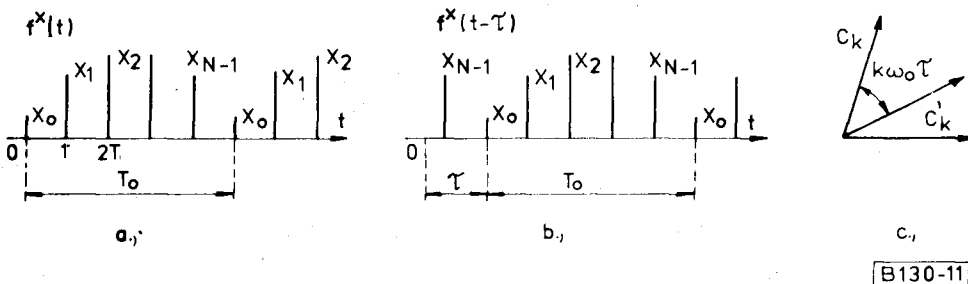
összevonás valós értéket ad.

### 2.5 Időeltolás hatása a Fourier-komponensekre

A 11a ábra szerinti periodikus (impulzus) függvény Fourier-komponenseit jelöljük  $C_k$ -val. Felmerül a kérdés, ha a függvényt  $\tau$  idővel jobbra toljuk (b ábra), hogyan változnak meg a komponensek. Az új komponenseket jelöljük  $C'_k$ -vel. A 3b alapformulából kapjuk:

$$C'_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f^*(t-\tau) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f^*(u) e^{-jk\omega_0(u+\tau)} du = C_k e^{-jk\omega_0 \tau}. \quad (17)$$

Vagyis a 11c ábra szerint az új komponenseket régieiből  $-k\omega_0 \tau$  elforgatással kapjuk. Ez megfelel a frekvenciával arányos fázisforgatásnak, ami szükséges is az alakhú időeltoláshoz.



B130-11

11. ábra.  $f^*(t)$  eltolása  $\tau$  idővel

Mintavételezett függvényeknél fontos eset, ha  $\tau = rT$ , a mintavételezési idő egész számú többszöröse. Ekkor:

$$C'_k = C_k e^{-j k \omega_0 \tau} = C_k e^{-\frac{j 2\pi k r}{N}} = C_k W^{kr}. \quad (18)$$

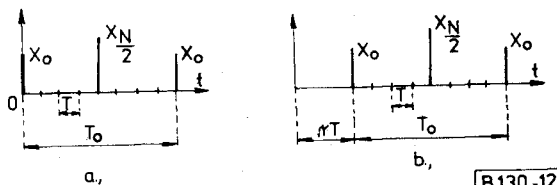
Ha:  $\tau = \frac{T_0}{2}$  akkor  $C'_k = C_k e^{-j\pi k} = \pm C_k$ . (19)

Megjegyezzük, hogy a  $\tau = rT$  időeltolás a DFT szempontjából egyenértékű az  $X$  értékek ciklikus cseréjével. Például  $N=4$  és  $r=2$  esetén  $X_0, X_1, X_2, X_3$  helyett az  $X_2, X_3, X_0, X_1$  sorrend felvételével.

### 2.6 Két egymástól $\frac{T_0}{2}$ távolságra levő impulzus

A következőkben hasznos lesz, ha a 12a ábra szerinti, két egymástól  $\frac{T_0}{2}$  távolságra levő impulzus DFT-jét kiszámítjuk. A második impulzust jelöljük  $X_{N/2}$ -vel. Ekkor a 12. formula szerint, mivel  $N=2$ , kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2} \left[ X_0 + X_{\frac{N}{2}} \right] \\ C_1 &= \frac{1}{2} \left[ X_0 - X_{\frac{N}{2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$



12. ábra. Két impulzus eltolása  $rT$  idővel

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a fenti két komponens a  $t=0$  és  $\frac{T_0}{2}$  helyen valóban előállítja az  $X_0$  és  $X_{\frac{N}{2}}$  értéket.

Azonban, mint előzőleg arra rámutattunk, a közbelső helyeken a két komponens valamilyen nullától eltérő értéket állít elő.

Következő lépésként osszuk fel  $T_0$ -t  $N$  egyenlő részre ( $N$  legyen páros) és az impulzusfüggvény  $t=0$ , ill.  $\frac{T_0}{2}$  helyen legyen továbbra is  $X_0$  és  $X_{\frac{N}{2}}$ , de a többi  $t=nT$  helyen legyen zérus. Ekkor  $N$  feltételünk van.

Mivel  $X_i=0$ , ha  $i \neq 0$  vagy  $\frac{N}{2}$ , a 12. formulából kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{1}{N} \left[ X_0 + X_{\frac{N}{2}} W^{\frac{N}{2}k} \right] = \frac{1}{N} \left[ X_0 + X_{\frac{N}{2}} e^{-j\pi k} \right] \\ \text{vagyis:} \\ C_k &= \frac{1}{N} \left[ X_0 + X_{\frac{N}{2}} \right] \text{ ha } k=0, 2, 4, \dots, N-2 \\ C_k &= \frac{1}{N} \left[ X_0 - X_{\frac{N}{2}} \right] \text{ ha } k=1, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Végül számoljuk ki a DFT-t, ha az impulzusfüggvényt  $\tau=rT$  idővel eltoljuk (12b ábra). A 18. formula szerint kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} C'_0 &= C_0 \\ C'_1 &= C_1 W^r \\ C'_2 &= C_2 W^{2r} \\ &\dots \\ C'_{N-1} &= C_{N-1} W^{(N-1)r}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

### 3. A DFT számításának az egyszerűsítése

A DFT számítása hosszadalmas és sok algebrai művelet elvégzését teszi szükségessé. A 12. formula szerint minden  $C_k$  együttható  $N$  tagból áll és általános esetben, ha  $X_i$  komplex, mivel  $W^k$  is komplex, minden tagot két komplex szám szorzata képez, ami az

$$(a + jb)(c + jd) = ac - bd + j(bc + ad) \quad (23)$$

összefüggés alapján négy valós szorzásnak és 3 összeadásnak felel meg. Ezen tagok összege, tehát  $N-1$  komplex összeadás után kapjuk meg az egyes  $C_k$ -kat. Tehát az  $N$  számú  $C_k$  kiszámításához:

$N^2$  komplex szorzás

és  $N(N-1) \approx N^2$  komplex összeadás (24)

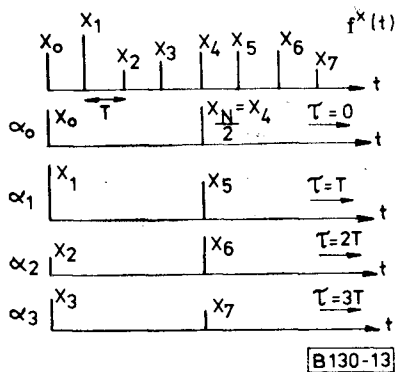
szükséges. Egyszerűsítést jelent, ha felismerjük, hogy speciális esetekben a komplex szorzások kevesebb művelettel elvégezhetők.

Így a:

$$\left. \begin{aligned} k = \frac{N}{2} \text{ esetén: } (a + jb)W^{\frac{N}{2}} &= -a - jb \\ k = \frac{N}{4} \text{ esetén: } (a + jb)W^{\frac{N}{4}} &= b - ja \\ k = \frac{N}{8} \text{ esetén: } (a + jb)W^{\frac{N}{8}} &= \\ &= 0,707(a + b) + j0,707(b - a) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

alakra hozhatók. Ezek az egyszerűsítések akkor alkalmazhatók, ha  $N$  páros, illetve  $N=2^s$ , kettő egész számú hatványa.

Lényegesebb egyszerűsítést és egyúttal mélyebb bepillantást ad a DFT számításába a következő módszer: Ha  $N$  páros, a 13. ábra szerint az impulzusfüggvényt felbonthatjuk a feltüntetett  $\frac{N}{2}$  számú, csak két impulzust tartalmazó függvényre. Jelöljük



13. ábra.  $f^*(t)$  felbontása impulzuspárookra

őket  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\left(\frac{N}{2}-1\right)}$ -gyel. Ezeket a függvényeket rendre  $0T, 1T, 2T, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right)T$  időeltolás után lineárisan szuperponálva, az eredeti függvényt kapjuk. Az eredeti impulzusfüggvény  $C_k$  együtthatóit megkapjuk, ha ezen időben eltoltt részfüggvények megfelelő együtthatóit összeadjuk. A 21. formula szerint az időben el nem tolt részfüggvények együtthatói:

$$\left. \begin{aligned} C_{ki} &= \frac{1}{N} \left[ X_i + X_{i+\frac{N}{2}} \right] & k=0, 2, \dots, N-2 \\ C_{ki} &= \frac{1}{N} \left[ X_i - X_{i+\frac{N}{2}} \right] & k=1, 3, \dots, N-1 \\ i &= 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ahhoz, hogy az eredő együtthatókat kapjuk, a 22. formula szerint figyelembe kell venni a  $\tau=0, T, 2T, \dots$  időeltolásokat és az így kapott együtthatókat kell összegezni. Kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= C_{00} + C_{01} + C_{02} + \dots + C_{0, \left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ C_1 &= C_{10} + C_{11}W + C_{12}W^2 + \dots + \\ &\quad + C_{1, \left(\frac{N}{2}-1\right)}W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ C_{N-1} &= C_{(N-1), 0} + C_{(N-1), 1}W^{N-1} + C_{(N-1), 2}W^{2(N-1)} + \\ &\quad + \dots + C_{(N-1), \left(\frac{N}{2}-1\right)}W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)(N-1)} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

A fenti eljárással a műveletek száma kb. a felére csökkenthető.

#### 4. A gyors Fourier transzformáció (FFT, Fast Fourier Transform)

Ha a DFT-t jelátvitelben akarjuk használni, akkor a kiszámításhoz annyi idő áll rendelkezésre, amennyi az  $N$  minta tényleges átfutási ideje. Ez a „Real Time” üzemmód nagy  $N$  esetén és kis  $T$  mintavételezési idő mellett még a leggyorsabb számítógé-

pekkel sem valósítható meg az előzőekben ismertett módszerekkel.

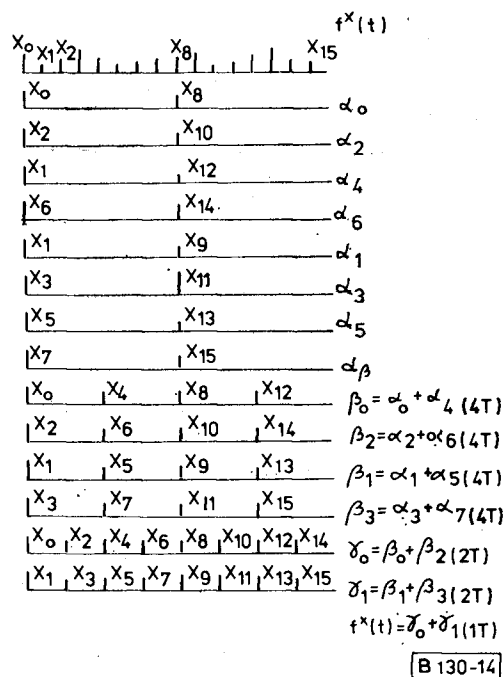
Azokat a számítási módszereket, amelyek a DFT kiszámításához szükséges műveletek számát sokkal nagyobb mértékben csökkentik, Gyors Fourier Transzformációnak nevezzük.

Nagyszámú ilyen módszer létezik, de ezek lényegében mind két alapvető módszerre vezethetők vissza:

- Az eredeti impulzusfüggvény időbeli felbontása (Decimation In Time);
- Az eredeti impulzusfüggvény frekvencia szerinti felbontása (Decimation in Frequency).

#### 4.1 A „Decimation In Time” módszer

A legismertebb és legelterjedtebben használt FFT eljárást J. W. Cooley és J. W. Tukey ismertette 1965-ben. Lényegét az előző pontban tárgyaltak alapján könnyen megérthetjük. Vegyük például  $N=$



14. ábra.  $f^*(t)$  felbontása „Decimation In Time” FFT számításához

$= 16$  esetét. A 14. ábra szerinti impulzusfüggvényt felbonthatjuk 8 darab két impulzust tartalmazó részfüggvényre. Célszerűségi okokból szétválasztottuk a páros és páratlan sorszámú impulzusokat tartalmazó függvényeket.

Bejelöltük, hogy az egyes függvényeket milyen idővel kell eltolni, hogy az eredeti helyükre kerüljenek. Egyöntetűbb a számítás menete, ha a páratlan függvényeket először  $0, T, 2T$ -vel toljuk el, majd összegezzük őket és utolsó lépésként alkalmazunk egy közös  $T$  eltolást. Látszik, hogy ez a módszer alapján véve teljesen megegyezik a 13. ábrán ismertett módszerrel. A különbség, ami a műveletek számát lényegesen lecsökkenti, az lesz, hogy a rész-

függvényeket nem egy lépésben adjuk össze, hanem először párosával összevonva négyes csoportokat képezünk, majd ezeket a négyeseket újra páronként összevonjuk és így tovább, amíg az összevonás eredménye az eredeti függvényt adja. Az eljáráshoz szükséges, hogy  $N=2^s$  számú legyen.

A számítás menete a következő:

- a) Először a 14. ábrának megfelelően az „ $\alpha$ ” részekre való felbontást végezzük el. Minden  $\alpha_i$ -hez két együttható tartozik. A 20. formula szerint:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \left\{ \begin{aligned} C_{00\alpha} &= X_0 + X_{\frac{N}{2}} = X_0 + X_8 \\ C_{01\alpha} &= X_0 - X_{\frac{N}{2}} = X_0 - X_8 \end{aligned} \right. \\ \alpha_2 \left\{ \begin{aligned} C_{20\alpha} &= X_2 + X_{2+\frac{N}{2}} = X_2 + X_{10} \\ C_{21\alpha} &= X_2 - X_{2+\frac{N}{2}} = X_2 - X_{10} \end{aligned} \right. \\ \dots \\ \alpha_1 \left\{ \begin{aligned} C_{10\alpha} &= X_1 + X_{1+\frac{N}{2}} = X_1 + X_9 \\ C_{11\alpha} &= X_1 - X_{1+\frac{N}{2}} = X_1 - X_9 \end{aligned} \right. \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

- b) A következő lépés a „ $\beta_i$ ”-k kiszámítása. A 14. ábrában ( $nT$ ) indexszel jelöljük az illető „ $\alpha$ ” időeltolását. A 22. formula szerint:

$$\beta_0 \left\{ \begin{aligned} C_{00\beta} &= C_{00\alpha} + C_{\frac{N}{4}, 0\alpha} = C_{00\alpha} + C_{40\alpha} \\ C_{01\beta} &= C_{01\alpha} + C_{\frac{N}{4}, 1\alpha} = C_{01\alpha} + C_{41\alpha} W^4 \\ C_{02\beta} &= C_{00\alpha} + C_{\frac{N}{4}, 0\alpha} = C_{00\alpha} + C_{40\alpha} W^8 \\ C_{03\beta} &= C_{01\alpha} + C_{\frac{N}{4}, 1\alpha} = C_{01\alpha} + C_{41\alpha} W^{12} \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Hasonlóképpen számoljuk ki a többi  $\beta_i$ -t is.

- c) Ezután  $\gamma$  kiszámítása következik, majd esetünkben  $\gamma_0$  és  $\gamma_1$  összevonásából a végeredményt kapjuk.  $\alpha$  két,  $\beta$  négy,  $\gamma$  nyolc és a végeredmény már a 16 együtthatót tartalmazza.

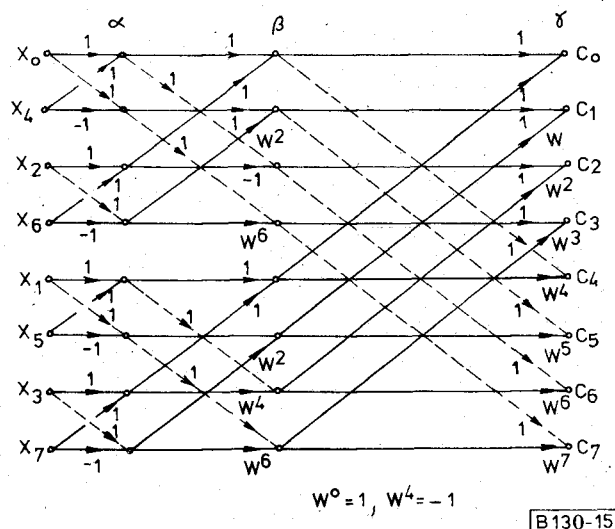
A szükséges műveletek száma lényegesen lecsökkent. Ugyanis, ha  $N=2^s$ , az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma \dots$  lépések száma  $s = \lg_2 N$ . Mind az  $\alpha$ , mind a  $\beta$ ,  $\gamma \dots$  rész számításaiban összesen  $N$  együtthatót kell kiszámolni és minden együttható számítása egy komplex szorzást (a  $W^k$ -val való szorzást) és egy komplex összeadást kíván. (Az  $\alpha_i$ -knél a komplex szorzás elmarad, de nagy  $N$  esetén ez nem lényeges). Így összesen:

$$N \lg_2 N$$

összeadásra és szorzásra van szükség, szemben  $N^2$ -vel, ha a 12. formula szerint számolunk. A csökkenés aránya:

$$a = \frac{N^2}{N \lg_2 N} = \frac{N}{\lg_2 N} \quad (30)$$

Tehát  $N=128$ -nál a 18-ad részére,  $N=1000$ -nél a 100-ad részére csökken a szükséges műveletek száma.



15. ábra. Folyamatábra a „Decimation In Time” FFT számításához

Az előzőekben ismertetett eljárást jól követhetjük a 15. ábra szerinti folyamatábrán,  $N=8$  esetén. Az ábrán a nyilak mellé írt  $W^n$  számok a balról jövő információ  $W^n$ -nel való szorzását jelentik, a kis körök pedig a beérkező információk összegezését. A számítási folyamat előrehaladásával az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  függőleges síkok az előző számítás menetének felelnek meg.

Bár cikkünkben csak elvi számítási módszerekkel foglalkozunk, két szempontra rámutatunk, amelyek számítógéppel való számolás esetén felmerülnek.

Az első szempont a beérkező  $N$  adatnak a számítás által megkívánt sorrendbe való rendezése. Ez legegyszerűbben az ún. bit sorrend megfordításával (bit reversal) történik. Lényege a következő: ha a beérkező adatokat az alábbi táblázat szerint binárisan számozzuk, akkor a bitrendet megfordítva, az új sorrend éppen a számítások által megkívánt 0, 4, 2, 6, 1, 3, 5, 7 lesz. Könnyen igazolható, hogy állításunk bármilyen  $N=2^s$  esetén igaz. (Az  $N=8$  esetet az 1. táblázat tünteti fel.)

1. táblázat

A „bit reversal”  $N=8$  esetén

	Bináris számozás	Fordított számozás	Új sorrend
$X_0$	000	000	$X_0$
$X_1$	001	100	$X_4$
$X_2$	010	010	$X_2$
$X_3$	011	110	$X_6$
$X_4$	100	001	$X_1$
$X_5$	101	101	$X_5$
$X_6$	110	011	$X_3$
$X_7$	111	111	$X_7$



A másik szempont, amire rá akarunk mutatni, hogy a számítógép gazdaságos kihasználását nagymértékben befolyásolja a szükséges memóriaelemek száma. Az ismertetett számítási módszer ebből a szempontból is igen előnyös. Ugyanis, ha a bejövő  $N$  adatot beirtuk a feltétlenül szükséges  $N$  számú tárolóba, további tárolókra már elvileg nincs szükség. Ugyanis kövessük például végig a 15. ábra folyamatábráját. Válasszuk ki az  $\alpha$  síkon két összetartó párt, például  $X_1$  és  $X_5$ -öt. Az  $X_1 + X_5$  és  $X_1 - X_5$  művelet elvégzése után  $X_1$  és  $X_5$ -re, tehát a bejövő tárra nincs többé szükségünk, ezért  $X_1 + X_5$  és  $X_1 - X_5$  értékét mindjárt beírhatjuk  $X_1$  és  $X_5$  tárljába. Hasonló a helyzet a  $\beta$  síkon a 4, a  $\gamma$  síkon a 8 összetartozó értékpárral. A tárolók ilyen kihasználását „computation in place”-nak nevezzük.

Nem minden FFT eljárás rendelkezik ezzel a lehetőséggel.

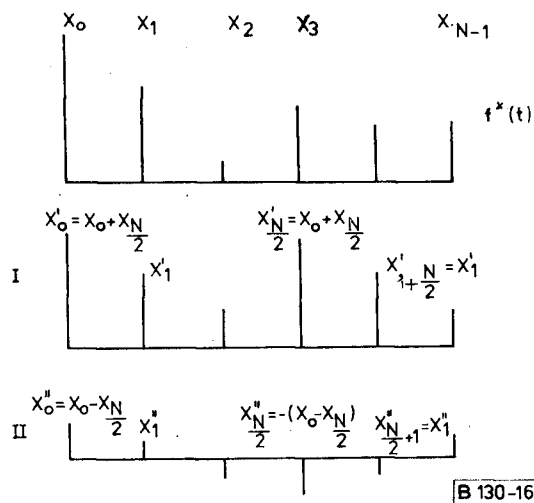
#### 4.2 A „Decimation In Frequency” módszer

Lényege a következő: A 16a ábra szerinti impulzusfüggvényt a 6. formulának megfelelően két részre

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } C'_k &= \left[ X'_0 + X'_1 W^k + X'_2 W^{2k} + \dots + X'_{\frac{N}{2}-1} W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)k} \right] \left( 1 + W^{\frac{N}{2}k} \right) \\ \text{II. } C''_k &= \left[ X''_0 + X''_1 W^k + X''_2 W^{2k} + \dots + X''_{\frac{N}{2}-1} W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)k} \right] \left( 1 - W^{\frac{N}{2}k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Mivel  $W^{\frac{N}{2}k} = \pm 1$ , I. csak páros „ $k$ ”, II. csak páratlan „ $k$ ” esetén ad zérustól eltérő értéket. A két formula nagyon hasonló. Egyszerű számítással meggyőződhetünk arról, hogy:

$$C''_{2k+1} = C'_{2k} \quad [\text{ha } X'_0, X'_1, X'_2, \dots \text{ helyébe } X''_0, X''_1 W, X''_2 W^2, X''_3 W^3 \dots \text{-t írunk}]. \quad (32)$$



16. ábra.  $f^*(t)$  felbontása csak páros (I) és csak páratlan (II) harmonikusokat tartalmazó részre

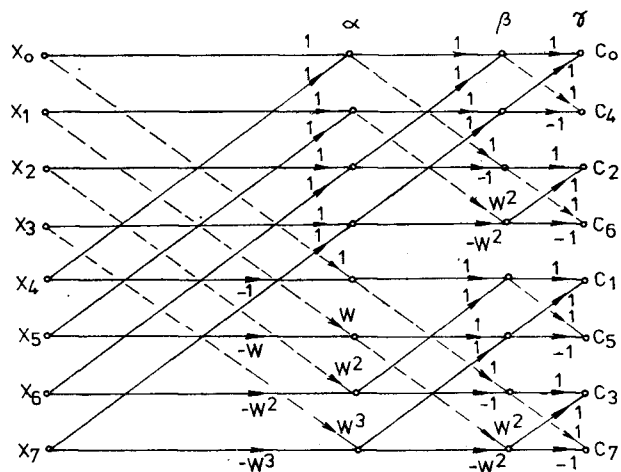
bontjuk: a csak páros és a csak páratlan harmonikusokat tartalmazó részre (I. és II.).

A 2-es osztót, amely csak arányossági tényező, elhagytuk. Ezután külön-külön képezzük e két részfüggvény DFT-jét. Az első rész  $C_0, C_2, C_4, \dots$ -et, a második pedig  $C_1, C_3, \dots$ -at adja. Mindkét rész már csak  $\frac{N}{2}$  számú komponenset tartalmaz.

A páros rész számításánál nincs probléma, az  $\frac{N}{2}$  impulzus  $\frac{T_0}{2}$  időközönként szabályosan ismétlődik. A páratlan rész azonban, bár csak  $\frac{N}{2}$  számú különböző impulzust tartalmaz, ezek  $\frac{T_0}{2}$  időközönként váltott polaritással követik egymást.

Hogy a számítási módszerünk homogén legyen, a páratlan részt alakítsuk át. Írjuk fel a 12a formula alapján a  $C_k$  együtthatót. Figyelembe véve, hogy az I. esetben  $X = X_{l+\frac{N}{2}}$ , a II. esetben pedig

$$X_l = -X_{l+\frac{N}{2}}, \text{ kapjuk:}$$



B 130-17

17. ábra. Folyamatábra a „Decimation In Frequency” számításához

Így II. számítását visszavezetjük I-re.  $C''_1$  azonos lesz az így számolt  $C'_0$ -vel,  $C''_3$  azonos  $C'_2$ -vel stb.

A hosszadalmas számítások helyett csupán a 17. ábrában a folyamatábrát rajzoljuk fel. Az  $\alpha$  síkon befejeződik az impulzusfüggvény fent ismertetett felbontása. Következő lépésként a most már  $\frac{N}{2}$  elemet tartalmazó két impulzusfüggvény újra fel-

bontható csak páros és csak páratlan harmonikusokat tartalmazó részre (természetesen  $2\omega_0$  alapfrekvenciára vonatkoztatva), így a  $\beta$  síkra jutunk. Az eljárást addig folytatjuk, amíg csak egy komponens marad, ez megadja  $C_0, C_2, C_4, \dots$ , illetve  $C_1, C_3, \dots$  értékét.

Látszik, hogy ennél a módszernél a bejövő adatok természetes sorrendben, a kimenő adatok pedig a bit-fordításnak megfelelő sorrendben helyezkednek el.

A 16. és 17. folyamatábrát összehasonlítva, a fel-tűnő különbség az, hogy amíg az első esetben két impulzust tartalmazó elemi részfüggvényeket párosítottunk egyre nagyobb, 4, 8, 16, ... impulzust tartalmazó részfüggvényekké, addig a második esetben fokozatos lebontás történik 8, 4, 2, 1 impulzust tartalmazó részfüggvényekké.

A folyamatábrából látszik, hogy a „Decimation In Frequency” módszer szintén alkalmas „computation in place” számításra és hogy a szükséges műveletek száma itt is  $N \lg_2 N$  arányban csökken.

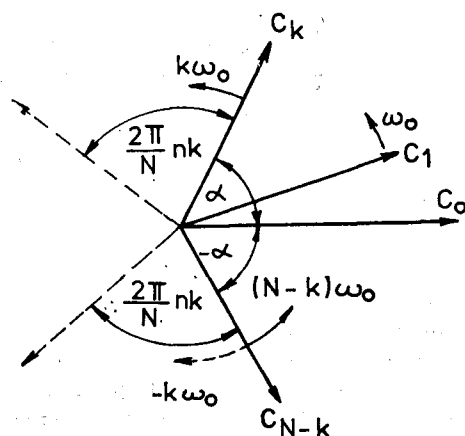
### 5. A DFT, a Nyquist tétel és az „Aliasing” jelenség

Amint arra rámutattunk, ha az  $X_n$  értékek valósak, a DFT redundáns. Ez abban jelentkezik, hogy  $C_{N-k} = C_k^*$ . A viszonyokat a 18. ábrán tüntetjük fel. A  $C_1$  vektor az alapharmonikus frekvenciájával,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  sebességgel forog,  $C_k$  és  $C_{N-k}$  pedig  $k$ , ill.  $N-k$ -szor gyorsabban. A DFT szempontjából csak a vektorok  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, \dots$  időpontokban levő helyzetének van szerepe, vagyis a  $C_1$  vektor  $\frac{2\pi}{N}n$ , a  $C_k$  vektor  $\frac{2\pi}{N}nk$  és a  $C_{N-k}$  vektor

$$\frac{2\pi}{N}n(N-k) = 2\pi n - \frac{2\pi}{N}nk \quad (33)$$

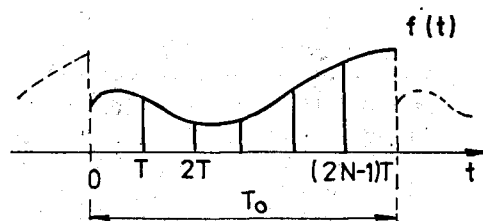
szögelfordulásainak.

A  $2\pi n$  teljes fordulatokat nem véve figyelembe, ez megfelel  $C_{N-k}$  negatív  $\frac{2\pi}{N}nk$  nagyságú szögelfordulásának.



B 130-18

18. ábra. Az „aliasing” jelenség magyarázata



B 130-19

19. ábra. A Nyquist tétel igazolása

Így a  $C_{N-k}$  vektor forgása a DFT szempontjából azonos a  $-k\omega_0$  sebességű forgással. Könnyen igazolható, hogy minden  $(rN-k)\omega_0$  sebességgel forgó vektort ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) mintavételezve  $T = \frac{T_0}{N} = \frac{2\pi}{\omega_0 N}$  időközönként, a  $k\omega_0$  sebességgel forgó vektor azonos időközű mintavételezésével megegyező impulzusfüggvényt kapunk. Ezt a jelenséget, amikor egy forgó vektor, illetve egy szinusz függvény mintavételezéséből nem tudjuk egyértelműen meghatározni az eredeti függvény egyes komponenseinek a frekvenciáját, „aliasing” jelenségnek nevezzük.

Tehát valós  $X_n$ -ek esetén  $C_{N-k}$  frekvenciája azonos  $C_k$  frekvenciájával. Így  $T_0$  idő alatt  $N$  valós mintát egyértelműen meghatározza az  $\frac{N}{2}$  számú szinusz jel,  $\omega_0, 2\omega_0, \dots, \frac{N}{2}\omega_0$  frekvenciával. Mivel a frekvenciák  $T_0$  által adottak, az egyes komponensek jellemzéséhez csak az amplitúdóra és a kezdőfázisra van szükség, amelyeket a  $C_k$ -k határoznak meg. Az előzők alapján szemléletes módon igazolhatjuk Nyquist tételét. Vegyük a 19. ábra szerinti folytonos jelet a  $0-T_0$  időközben. A jel tetszőleges lehet, egyetlen kikötésünk, hogy sávkorlátozott legyen 0 és  $f_1 = Nf_0$  között, ahol  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ . (Ez pontosan nem lehet igaz, mert ha a jel időben korlátozott van, a sávja nem lehet korlátozott. De ha  $f_0$  igen kicsi a sáv legmagasabb frekvenciájához képest, azaz  $N \gg 1$ , akkor a fellépő hiba elhanyagolható.)

Ha  $T_0$  igen nagy, akkor a viszonyok nem változnak lényegesen, ha a  $0-T_0$  időközön kívül a jelet ismétlődőnek tekintjük. Ekkor felírhatjuk a periodikus jel Fourier-sorát.  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  az alapharmonikus és mivel a jel  $Nf_0$ -nál sávkorlátozott, csak véges számú  $N$  harmonikus léphet fel. Az amplitúdók és kezdőfázisok  $2N$  adatot jelentenek. Tehát sávkorlátozott jelünket  $T_0$  idő alatt  $2N$  adat, például  $2N$  minta egyértelműen meghatározza. Egyenletes mintavételezés mellett ez

$$f_m = \frac{2N}{T_0} = 2N \cdot f_0 = 2f_1 \quad [\text{minta/s}] \quad (34)$$

mintavételezési sebességnek felel meg. Ezzel tulajdonképpen be is bizonyítottuk Nyquist mintavételezési törvényét.

## 6. Példák

6.1 Első példaként határozzuk meg a 20a ábrán szerinti  $\delta^*(t)$  mintavételező függvény Fourier-sorát. Az egyes impulzusok területe legyen  $T$ . Határesetben az impulzusokat tekintjük Dirac impulzusoknak. A kezdő pontnak az ábra szerinti megválasztása mellett a számítás igen egyszerű. A páros szimmetria miatt csak koszinusz összetevők lépnek fel, és ha az impulzusok szélessége igen kicsi,  $\tau \approx 0$ , akkor a Fourier-komponensek kiszámításánál szereplő integrálok az impulzus területnek egy konstanssal való szorzására egyszerűsödnek. A 2. és 3b formulákból kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_k &= \frac{2T}{T_0} = 2, \quad k=1, 2, 3, \dots \\ C_k &= 1, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

vagyis:

$$\delta^*(t) = 1 + 2 \cos \omega_0 t + 2 \cos 2\omega_0 t + \dots = 1 + e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} + e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t} + \dots$$

ahol:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

A DFT szempontjából  $\delta^*(t)$  egy  $N=1$  mintájú impulzusfüggvénynek tekinthető, ami  $C_0=1$ -gyel jellemezhető. A 20b ábrán a komplex síkon feltüntetjük  $C_0$ -t, a „c” ábrán a DFT által előállított  $f(t)$  folytonos és az  $f^*(t)$  mintavételezett függvényt.

6.2 A váltott polaritású mintavételező függvény (21a ábra) Fourier-sora

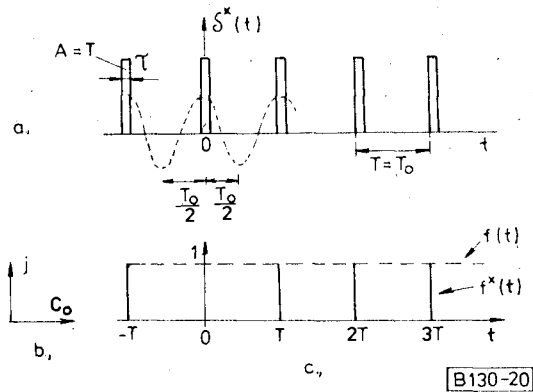
A kezdőpontnak az ábra szerinti felvételével itt is csak koszinusz összetevőket kapunk. A 2., ill. a 3b formulákból:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \quad C_0 = 0 \\ a_k &= \frac{2}{T_0} \cdot 2T = 2 \quad k=1, 3, 5 \dots \quad C_k = 1 \\ \delta^{**}(t) &= 2 \cos \omega_0 t + 2 \cos 3\omega_0 t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

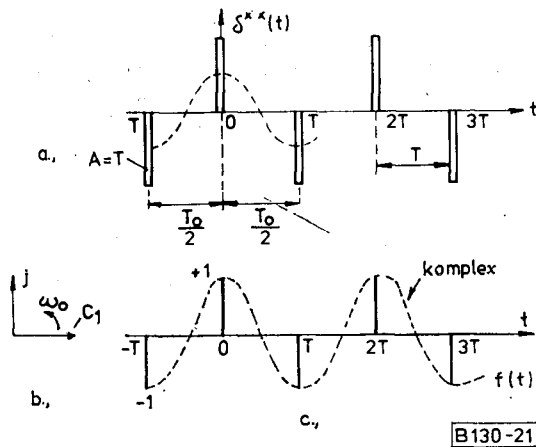
ahol:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{T}$$

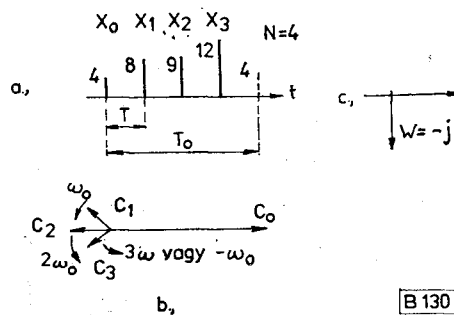
A DFT szempontjából  $\delta^{**}(t)$  egy  $N=2$  mintájú impulzusfüggvénynek tekinthető, ami  $C_0=0$  és  $C_1=1$ -gyel jellemezhető. A 21b ábrán a komplex síkon feltüntetjük  $C_1$ -et,  $C_1\omega_0$  sebességgel forog és előállítja a „c” ábra szerinti  $f(t)$  függvényt. Látszik, hogy  $f(t)$  a  $t=nT$  diszkrét helyeken felveszi a  $\pm 1$  értéket, másutt komplex.



20. ábra. A mintavételező függvény,  $\delta^*(t)$



21. ábra. A váltott polaritású mintavételező függvény,  $\delta^{**}(t)$



22. ábra. Példa DFT számítására

6.3 Határozzuk meg a 22a ábra szerinti impulzusfüggvény DFT-jét.

A 12a formula szerint:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{4} (4 + 8 + 8 + 12) = 8 \\ C_1 &= \frac{1}{4} (4 - j8 - 8 + j12) = -1 + j \\ C_2 &= \frac{1}{4} (4 - 8 + 8 - 12) = -2 \\ C_3 &= \frac{1}{4} (4 + j8 - 8 - j12) = -1 - j \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

A 22b ábrában a komplex síkon feltüntetjük a  $C_i$ -ket. Könnyel ellenőrizhető, hogy ha a  $C_i$  vektorok a jelzett szögsebességgel forognak, akkor  $t=nT$  időpontokban előállítják az  $X_0, X_1, X_2, X_3$  értékeket, közben pedig egy komplex függvényt. Az „aliasing” jelenség következtében azonos eredményt kapunk, ha  $C_3$  „ $-w_0$ ” sebességgel forog. A 16a formulából ellenőrizhetjük  $X(nT)$  előállítását:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= 8 + (-1+j) - 2 + (-1-j) = 4 \\ X_1 &= 8 + (-1+j)j + 2 + (-1-j)(-j) = 8 \\ X_2 &= 8 + (-1+j)(-1) - 2 + (-1-j)(-1) = 8 \\ X_3 &= 8 + (-1+j)(-j) + 2 + (-1-j)j = 12. \end{aligned} \right\} (38)$$

6.4 Határozzuk meg a 23d ábra szerinti impulzusfüggvény DFT-jét FFT-vel. Először  $W$  hatványait számítjuk ki. (A „b” ábrán ábrázoljuk, vagy táblázatba foglaljuk, számítógépes számításban a táblákban helyezzük el őket.) Ezután a 28, 29 formula szerint megkezdjük  $\alpha, \beta \dots$  számítását. Kapjuk:

$$\alpha_0 \begin{cases} C_{00\alpha} = X_0 + X_4 = 8 \\ C_{01\alpha} = X_0 - X_4 = -4 \end{cases} \quad \alpha_2 \begin{cases} C_{20\alpha} = X_2 + X_6 = -6 \\ C_{21\alpha} = X_2 - X_6 = 2 \end{cases}$$

$$\alpha_1 \begin{cases} C_{10\alpha} = X_1 + X_5 = 0 \\ C_{11\alpha} = X_1 - X_5 = 4 \end{cases} \quad \alpha_3 \begin{cases} C_{30\alpha} = X_3 + X_7 = 8 \\ C_{31\alpha} = X_3 - X_7 = 0 \end{cases}$$

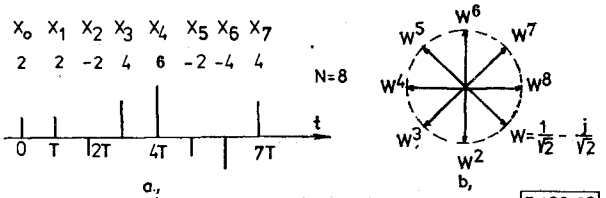
$$\beta_0 \begin{cases} C_{00\beta} = C_{00\alpha} + C_{20\alpha} = 2 \\ C_{01\beta} = C_{01\alpha} + C_{21\alpha}W^2 = -4 - j2 \\ C_{02\beta} = C_{00\alpha} + C_{20\alpha}W^4 = 14 \\ C_{03\beta} = C_{01\alpha} + C_{21\alpha}W^6 = -4 + j2 \end{cases} \quad (39)$$

$$\beta_1 \begin{cases} C_{10\beta} = C_{10\alpha} + C_{30\alpha} = 8 \\ C_{11\beta} = C_{11\alpha} + C_{31\alpha}W^2 = 4 \\ C_{12\beta} = C_{10\alpha} + C_{30\alpha}W^4 = -8 \\ C_{13\beta} = C_{11\alpha} + C_{31\alpha}W^6 = 4. \end{cases}$$

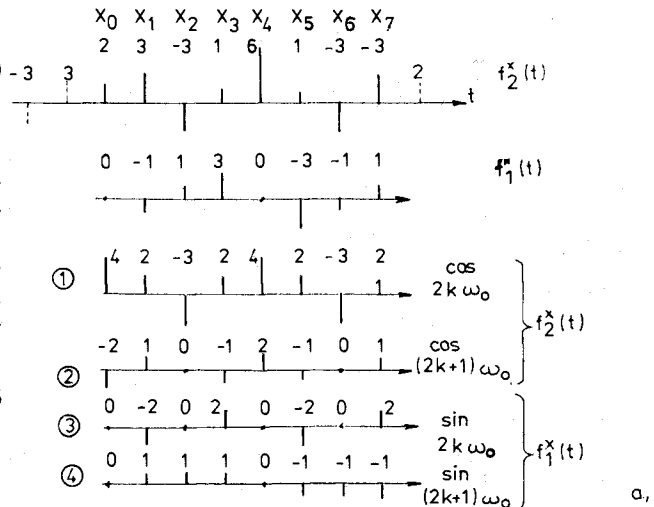
A következő lépésben már a végeredményt kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= C_{00\beta} + C_{10\beta} = 10 \\ C_1 &= C_{01\beta} + C_{11\beta}W = 2\sqrt{2} - 4 - j(2+2\sqrt{2}) \\ C_2 &= C_{02\beta} + C_{12\beta}W^2 = 14 + j8 \\ C_3 &= C_{03\beta} + C_{13\beta}W^3 = -4 + j2 \\ C_4 &= C_{02\beta} + C_{10\beta}W^4 = -6 \\ C_5 &= C_{01\beta} + C_{11\beta}W^5 = 4 - j \\ C_6 &= C_{02\beta} + C_{12\beta}W^6 = 14 - j8 \\ C_7 &= C_{03\beta} + C_{13\beta}W^7 = 2\sqrt{2} - 4 + j(2+2\sqrt{2}). \end{aligned} \right\} (40)$$

6.5 Az előző példa szerinti impulzusfüggvényt az 5. és a 6. formula szerint bontsuk fel  $f_1^*(t)$  és  $f_2^*(t)$  páratlan és páros függvényre, valamint ezeket a függvényeket bontsuk tovább csak páratlan és csak páros harmonikusokat tartalmazó részre. A felbontást a 24a ábra tünteti fel, az ábra alatti táblázatban pedig az egyes részfüggvényekhez tartozó



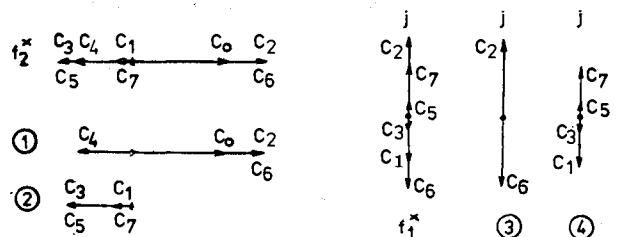
23. ábra. Példa FFT számítására



	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$f_2^*$	10	$-4 + 2\sqrt{2}$	14	$-4 - 2\sqrt{2}$	-6
$f_1^*$	-	$-j(2 + 2\sqrt{2})$	$j8$	$j(2 - 2\sqrt{2})$	-
④	10	-	14	-	-6
②	-	$-4 + 2\sqrt{2}$	-	$-4 - 2\sqrt{2}$	-
③	-	-	$j8$	-	-
④	-	$-j(2 + 2\sqrt{2})$	-	$j(2 - 2\sqrt{2})$	-

B130-24

24. ábra. A 23. ábra szerinti impulzusfüggvény felbontása



B130-25

25. ábra. A 23. ábra szerinti impulzusfüggvény DFT komponensei

DFT együtthatókat adjuk meg. (A lényegtelen  $N=8$ -as osztót nem vettük figyelembe és a  $C_5, C_6, C_7$  konjugált együtthatókat sem tüntettük fel.)

A táblázatból jól látszik a törvényszerűség:

- a) Páros függvény esetén  $C_k$  valós;
- b) Páratlan függvény esetén  $C_k$  képzetes;
- c) Csak páros harmonikusokat tartalmazó függvény esetén  $C_1, C_3 \dots = 0$ ;

d) Csak páratlan harmonikusokat tartalmazó függvény esetén  $C_0, C_2, C_4 \dots = 0$ .

Az egyes részfüggvényekhez tartozó  $C_k$  együtthatókat a komplex síkon a 25. ábra tünteti fel.

## 7. A DFT és a Fourier-sor

A 2.2 pontban a periodikus impulzusfüggvény Fourier-sorából vezettük le a DFT számítási módszerét. Levezetésünk teljesen egzakt volt, a DFT az  $N$  számú  $X_n$  értékhez egyértelműen hozzárendelte a  $C_k$  együtthatókat és fordítva. Azonban éppen az egyszerű levezetés okozhatja a DFT hamis értelmezését és okoz nehézségeket a DFT helyes megértésében. A viszonyokat a 26. ábra szerinti egyszerű példán tisztázzuk. Határozzuk meg az ábra szerinti négyszögjel Fourier-sorát és DFT-jét (a jel oldalait kis mértékben döntjük, hogy a 2. és 6. pontokban ne legyen gond a függvény értelmezésével. De teljesen általánosan a szakadási pontokban a függvény értéke mindig a két szomszédos pont középértéke).

Ismeretes, hogy a négyszögjel Fourier-sora:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right] = \frac{2}{\pi} \left[ e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{3} e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{3} e^{-j3\omega_0 t} + \dots \right]$$

Tehát a Fourier-együtthatók:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{\pi} = 0,637 \\ C_3 &= -\frac{2}{3\pi} = -0,212 \text{ stb.} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

A DFT meghatározására osszuk fel egy periódust például  $N=8$  részre. A 12a formula szerint, az együtthatókat vesszővel jelölve:

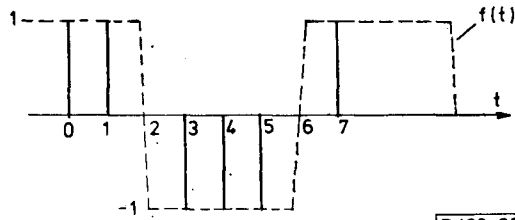
$$C'_k = \frac{1}{8} [1 + W^k - W^{3k} - W^{4k} - W^{5k} + W^{7k}].$$

Tehát a DFT komponensek:

$$\left. \begin{aligned} C'_0 &= C'_2 = C'_4 = C'_6 = 0 \\ C'_1 &= C'_7 = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{2}) = 0,6036 \\ C'_3 &= C'_5 = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{2}) = -0,1036. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

A 41. és 42. formula összehasonlításából látszik, hogy  $C'_1 \approx C_1$ , de  $C'_3$  és  $C_3$  között már rossz az egyezés. A Fourier-sornál a magasabb rendű komponensek véges értékűk, a DFT-nél  $C'_5$  és  $C'_7$  negatív frekvenciáknak felel meg, magasabb harmonikusok pedig nincsenek értelmezve.

Látszólag ellentmondásra jutottunk. Azonban ellentmondásról szó sincs. Ugyanis a Fourier-komponensek egyeznek a folytonos görbét (esetünkben a négyszögjelet — de éppen így másik folytonos görbét is felvettünk volna, amely a 0, 1, 2... pontokban +1 vagy -1 értéket vesz fel —) megközelíti.



B 130-26

26. ábra. Négyszögjel mintavételezése

teni. Ha véges számú Fourier-komponenst összegezzünk, csak véletlenszerű lehet, ha ezek tényleg előállítják az adott pontokban a  $\pm 1$  értéket. Ezzel szemben a DFT határozottan előállítja a jelzett pontokat, de a közbenső értékekre semmit sem mond.

Így nem is várhatjuk, hogy a Fourier- és a DFT komponensek azonosak legyenek.

Ennek ellenére, minden matematikai levezetés nélkül is belátható, hogy ha  $N$  számát növeljük, szükségszerűen kisebb lesz az eltérés a Fourier és a DFT komponensek között, és csak a magasabb harmonikusoknál várható nagyobb eltérés. Ez összhangban van a 2.2 pontban a Fourier-sorok felbontóképességével kapcsolatban mondottakkal. (Javasoljuk az olvasónak, hogy az előző számításokat végezze el nagyobb  $N$  értékre is, például 16 vagy 32-re.)

A fentiek alapján világos, hogy ha egy folytonos periodikus függvényt egyenletes közönléként mintavételezünk, a mintákból képzett DFT komponensek jó közelítéssel egyeznek a Fourier-komponensekkel. Minél nagyobb  $N$ , annál jobb a közelítés. A DFT alkalmazásának éppen ez a legfontosabb területe, periodikus vagy bizonyos fenntartással folytonos jelek spektrumának a jó közelítéssel való meghatározása. Itt alapvető kérdés a pontosság, valamint a felbonthatóképesség határa.

## 8. Folytonos időfüggvény spektrumának a meghatározása DFT-vel

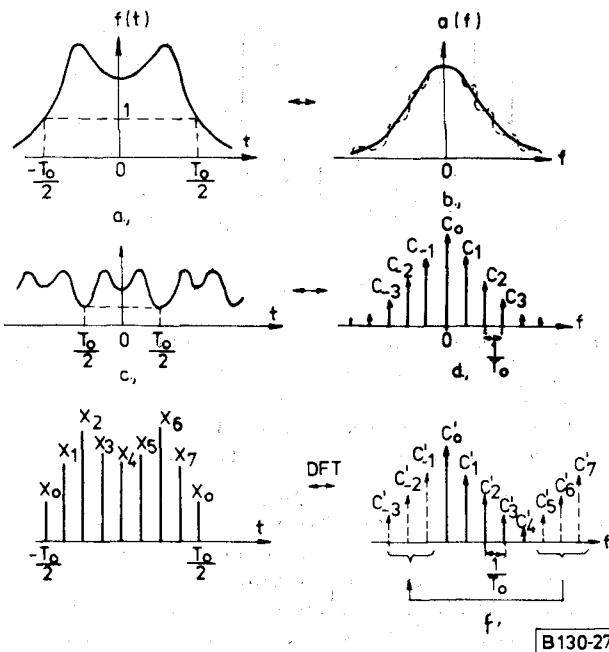
A folytonos időfüggvényeket a következő főbb csoportokra oszthatjuk:

- Periodikus, sávkorlátozott;
- Periodikus, sávban nem korlátozott;
- Nem periodikus, sávkorlátozott;
- Nem periodikus, sávban nem korlátozott.

A fenti függvények a „d” esettől eltekintve a teljes  $-\infty < t < +\infty$  időtartományban véges értéket vesznek fel. A DFT képzés viszont csak véges  $N$  mintára lehetséges, tehát csak a folytonos időfüggvényből kivágott véges hosszúságú szakaszra, az ún. „ablakra” alkalmazható.

Ez szükségszerűen a spektrum kisebb-nagyobb meghamisításával jár együtt. A viszonyokat a 27. ábrán szemléltetjük. Az „a” ábra szerinti folytonos függvény (egyszerűség kedvéért páros függvényt veszünk) spektrumába legyen a „b” ábra szerinti  $a(f)$ .

A Fourier integrál elméletéből ismeretes, hogy egy függvényben az éles levágások a transzformált függvényben hullámosságot okoznak. Így a négyszög



27. ábra. Mintavételezett folytonos függvény DFT-je

ablak alkalmazása a „b” ábrán a pontozottan jelölt spektrumot hozza létre. Minél nagyobb  $T_0$ , annál kisebbek a hullámok.

Hogy a számításmenetet digitalizálni tudjuk, következő lépésként vegyük az ablak által kivágott függvényrészt periodikusan ismétlődőnek („c” ábra). Ekkor a spektrum a „d” ábra szerinti lesz, a C-Fourier-együtthatók a „b” ábra pontozott görbéjének a metszetei.

A „d” ábrán egy  $T_0$  időközot mintavételeztünk és  $N=8$  minta alapján meghatároztuk a DFT-t („e” ábra).  $C_5, C_6, C_7$ -t (és  $C_4$  felét) negatív frekvenciáknak vehetjük. Így a DFT komponensek jó közelítéssel megegyeznek a Fourier-komponensekkel. Minél nagyobb  $N$ , annál jobb az egyezés. Végeredményben a DFT burkológörbéje jó közelítéssel megegyezik az  $a(f)$  görbével, tehát a DFT alkalmas  $a(f)$  számítására.

Pontos egyezést csak akkor kapunk, ha:

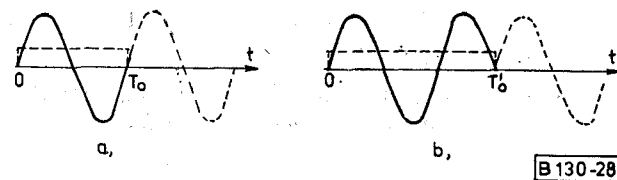
$\alpha$ ,  $f(t)$  periodikus és sávkorlátozott.

$\beta$  a mintavételezés frekvenciája legalább a kétszerese a legnagyobb jelfrekvenciának.

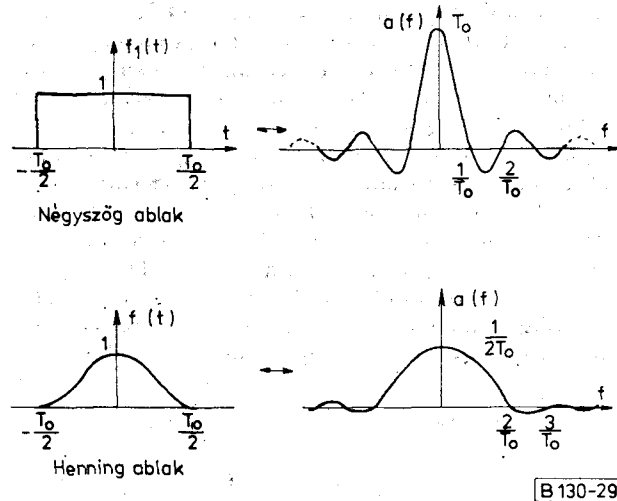
$\gamma$  az ablak hossza, „ $T_0$ ” pontosan megegyezik egy periódusidővel.

Minden más esetben az „aliasing” jelenség és az ablak miatt pontatlanság fog fellépni.

Az ablak zavaró hatásáról és a hosszának a szerepéről egy egyszerű példa alapján is meggyőződhetünk. Vegyük a 28a ábra szerinti szinusz függvényt. Ha az ablak hossza  $T_0$  azonos a periódusidővel, akkor a Fourier-sor és a DFT is csak egyetlen harmonikust tartalmaz, tehát helyesen írja le az eredeti függvényt. Ha az ablak nem a periódusidő egész számú többszöröse, például a „b” ábra szerint  $T'_0 = 1,5 T_0$ , akkor az ismétlődő jel a szaggatott görbével folytatódik. A Fourier-sor és így a DFT képzés



28. ábra. Szinusz függvényre alkalmazott  $T_0$  és  $T'_0 = 1,5 T_0$  ablak



29. ábra. A négyszög és a Hanning ablak és a Fourier-transzformáltjuk

is durva hibát hoz be, hiszen az eredetitől eltérő függvényt utánoz le.

### 9. A „súlyozott ablak”

Az ablak zavaró hatását csökkenthetjük, ha a négyzetes ablak helyett valamilyen az időben súlyozó  $f_A(t)$  ablakot használunk. Sok típusú ablak létezik. Mindegyik közös vonása, hogy a  $T_0$  hosszúságú időközön kívül zérus értékű. A leggyakrabban használt a Hanning ablak:

$$f_A(t) = \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi t}{T} \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \quad (43)$$

Az  $\alpha=0,5$ -höz tartozó ablakot megkülönböztetésül Hanning ablaknak nevezzük:

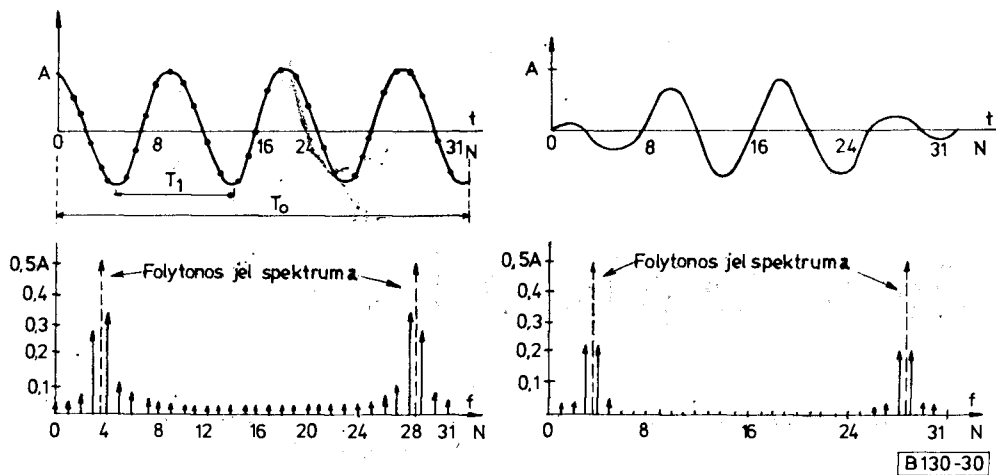
$$f_A(t) = 0,5 + 0,5 \cos \frac{2\pi t}{T_0} \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \quad (44)$$

A négyszög és a Hanning ablakot, valamint a Fourier-transzformáltjukat a 29. ábra tünteti fel. Csak röviden utalunk arra, hogy hogyan befolyásolja az ablak a spektrumot.

Ha  $f(t)$  és  $f_A(t)$  Fourier-transzformáltja  $F(f)$  és  $F_A(f)$ , akkor az ablak által kivágott rész transzformáltja:

$$f(t) \cdot f_A(t) \leftrightarrow F(f) * F_A(f) \quad (45)$$

Mivel a Hanning ablak hullámossága sokkal kisebb, mint a négyszögablaké, a DFT-ben az ablakhatás miatt fellépő termékek amplitúdója is sokkal



B130-30

30. ábra. Szinus hullám DFT-je négyszög és Hanning ablak esetén

kisebb lesz. Hátrányos viszont, hogy a Hanning ablak transzformáltja kiszélesedik, így a 45. formula szerinti konvolúciónak megfelelően a felbontóképeség csökken, a tényleges amplitúdók mintegy „elkenődnek”, bizonytalanabbá válik a felismerésük. Matematikailag be lehet bizonyítani, hogy minél kisebb a hullámosság, annál szélesebbé válik az ablak transzformáltja. A Hanning ablak körülbelül az optimálisnak tekinthető. Egy példát a 30. ábra tüntet fel.

Az „A” amplitúdójú folytonos koszinusz hullám spektruma azonos a Fourier-komponensek együtthatójával, esetünkben  $\pm\omega$ -nál  $\frac{A}{2}$ -vei. Ha az ablak például 3,5 periódusidőnek felel meg,  $N=32$  esetén a DFT-t az „a” ábra tünteti fel. A Hanning ablak alkalmazásánál az eredeti függvény a „b” ábra szerint erősen eltorzul, de a spektrum mégis jobban közelíti az eredetit.

Példaképpen a 30. ábrán feltüntetjük egy szinuszhullám DFT-jét. Az ablak hossza:  $T_0=3,5 T_1$ , ahol  $T_1$  a periódusidő. Legyen  $N=32$ . Ekkor az „a” ábra tünteti fel a DFT-t négyszögletes ablak esetén, a „b” ábra pedig Hanning ablak esetén. Összehasonlításképpen a folytonos szinuszel spektrumát is feltüntetjük. Látszik, hogy a Hanning ablak lényegesen lecsökkenti a parazita termékek amplitúdóját. Megjegyezzük, hogy a DFT nem tartalmazza a szinusz jel alaphérfrekvenciáját, ahogy az ablak által kivágott jel ismétléséből álló periodikus jel Fourier-sora sem tartalmazza az  $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{3,5}{T_0}$  hérfrekvenciájú komponensét. Ehelyett a DFT-ben az  $f = \frac{3}{T_0}$  és  $\frac{4}{T_0}$  hérfrekvenciájú komponensek eredője állítja elő közelítőleg az eredeti 0,5 A értéket.

## 10. Befejezés

Cikkünknek a célja az volt, hogy a DFT és az FFT eljárások megértését elősegítse. Lényegében a Fourier-sorból indultunk ki és a mintavételezett függvény egyszerű geometriai felbontásából szinte köz-

vetlenül és szemléletesen megkaptuk a végeredményt. Röviden a fellépő pontatlanságokra és azok okaira is rámutattunk. A DFT és FFT híradástechnikai alkalmazásával egy későbbi cikk keretében kívánunk foglalkozni.

## I R O D A L O M

- [1] Pálmai L-né: Integráltranszformációk gyors végrehajtása számológépen. Híradástechnika 1972. 5.
- [2] Dr. Kerpán István: A Fourier-transzformáció és a híradástechnika. Híradástechnika 1977. 9.
- [3] Cebe László: A Fourier integrál. BHG—ORION—TERTA Műszaki közlemények 1975. 1.
- [4] Kása I.: Fourier Transzformációt tartalmazó tervezési problémák megoldása lineáris programozással. TAKI-közlemények 1972. 2.
- [5] A. D. Fagan: An Introduction To The Fast Fourier Transform. The Marconi Review 1979. 1.
- [6] D. R. Brillinger: Fourier Analysis of Stationary Processes. Proc. IEEE 1974. 12.
- [7] W. T. Cochran: What is the Fast Fourier Transform? Proc. IEEE 1967. 10.
- [8] G. Bonnerot: Odd Time Odd Frequency DFT. Proc. IEEE 1976. 3.
- [9] P. S. Fuss: Making the FFT really fast. Bell Laboratories Record 1978. 2.
- [10] D. Achilles: Pipehne Fourier Transform. AEU 1975. 2.
- [11] D. Achilles: Der Überlagerungssatz der DFT. AEU 1971. 5.
- [12] B. Gaissmaier: Schnelle und genaue Berechnung von Fourier Integralen. NTZ 1971. H. 12.
- [13] H. Harmuth: Verallgemeinerung des Fourier Integrals und des Begriffes „Frequenz”. AEU 1964. 7.
- [14] K. B. Weber: Numerische Analyse mit der Schnellen Fourier Transform. Nachrichtentechnik. 1971. 2.
- [15] P. Delepine: Description et Applications de L'Analyseur FFT—TSM 4040. Revue Technique Thomson CSF 1973. 3.
- [16] E. O. Brigham: The Fast Fourier Transform. 1974.
- [17] DFT and FFT Analysers. Brül-Kjaer-közlemények
- [18] Digital Filters and FFT Technique. Brül-Kjaer-közlemények.
- [19] Fourier Analyzer Training Manual. Hewlett-Packard-közlemények.
- [20] Spectrum Analysis. Hewlett-Packard-közlemények.