

Koncentrált-elosztott paraméterű hálózatok időtartománybeli analízise: elosztott paraméterű modellek — leíróegyenletek — algoritmusok, programok

ADORJÁN PÉTER
Távközlési Kutató Intézet

Elektronikus és mikrohullámú áramkörök tervezésének, gyártásának és ellenőrzésének folyamatában — (TGE-folyamat, Csurgay, 1975), [1] egyes fázisok jól algoritmizálhatók, számítógépprogramra vihetők. A mai korszerű elektronikai iparban a TGE-folyamat egyes lépései el sem képzelhetők számítógépprogramok felhasználása nélkül (pl. az LSI bonyolultságú integrált áramkörök tervezése). Az elektronika iparának valamennyi jelentős gyártó cége, kutató-fejlesztő laboratóriuma rendelkezik olyan gépi tervezési rendszerrel, amely lefedi a tervezés—gyártás—ellenőrzés folyamat egyes fázisait. E programrendszerek nagy része belső használatra készült, azonban vannak kereskedelmi forgalom révén hozzáférhető, publikált algoritmusokkal rendelkező programok is (pl. ECAP, ECAP—II, ASTAP, SCEPTRE stb.).

Hazai viszonylatban is kidolgozásra kerültek ilyen programok 1965-től kezdődően. A Távközlési Kutató Intézetben kidolgozott gépi tervezési rendszer hozzáférhető szolgáltatásszerűen a hazai vállalatok számára is.

Jelen dolgozatban a koncentrált-elosztott paraméterű hálózatok időtartománybeli (tranzien) analízisének néhány kérdésével foglalkozunk. Az itt tárgyalt problémák egy része szorosan kapcsolódik a TKI-ban kidolgozott, ANAL—18 program algoritmusához. Az ANAL—18 program nemlineáris, koncentrált paraméterű elemekből és diszperziómentes távvezeték szakaszokból felépülő hálózatokkal modellezett áramkörök tranzien- és DC-analízisére szolgál [2].

Felsorolunk néhány példát, amikor nem elegendő, hogy a vizsgált áramkört csupán koncentrált paraméterű hálózattal közelítsük, hanem elosztott paraméterű modellek alkalmazása is szükséges:

- Nagy sebességű digitális áramkörök (ns-os kapcsolási idők): a nyomtatott lapon elhelyezett IC tokokat összekötő néhány cm hosszú huzalok jól modellezhetők diszperziómentes távvezeték szakaszokkal;
- Nagy sebességű számítógépek különböző kártyákon elhelyezett áramköreinek vagy különböző egységeinek az összekötő huzalrendszere (ez esetleg több m is lehet) ugyancsak diszperziómentes távvezeték szakaszokkal modellezhető;
- A mikrohullámú technikában használt hullámvezetők esetében tipikusan diszperziós, csatolt vagy csatolatlan távvezeték szakaszokból álló modellekre van szükség. A mikrohullámú integrált áramkörökben használt microstrip tápvonalak modellezése során viszont sokszor elhanyagolják a diszperziót és diszperziómentes távvezeték szakaszokkal közelítik azok viselkedését;
- A vékonyréteg technológiákkal kapcsolatosan szükség lehet az RC-távvezeték szakaszokkal történő modellezésre;
- A vezetékes átviteltechnikában alkalmazott összekötő vezetékek, kábelek (ezek általában több km hosszúságúak) rendszerint diszperziós elosztott paraméterű modellekkel írhatók le. A nagy összeköttetési távolságok miatt az alacsonyabb átviteli frekvenciásávok ellenére is a hullámhosszhoz képest nem elhanyagolhatóan rövid vezeték hosszok következményeként az elosztott paraméterű modellek alkalmazása szükséges. Igen sokszor az RLCG-, RLC- vagy RC-távvezeték szakaszokkal közelíthetők az összekötő vezetékek;
- Az optikai üvegszálak jelátvitel területe;
- Elosztott paraméterű aktív modellek alkalmazása válik szükségessé a mikrohullámú félvezető eszközök területén.

Beérkezett: 1980. IV. 8.

E felsorolás is alátámasztja, hogy sok, gyakorlatilag fontos probléma kezeléséhez nemlineáris koncentrált paraméterű és lineáris elosztott paraméterű elemekből felépülő hálózatok vizsgálata szükséges. Az ilyen, koncentrált — elosztott paraméterű hálózatok egy széles osztályának időtartománybeli (tranzien) analízisének kérdéseivel fogunk foglalkozni ebben a dolgozatban.

Vizsgálatunk menete a modellek — modellekből összekapcsolt hálózatok leíróegyenletei — a leíróegyenletek kvalitatív vizsgálata (megoldás létezése, egyértelműsége, stabilitás) — a leíróegyenletek automatikus előállítására és numerikus megoldására algoritmusai — analízisprogramok sémát követi. Nem foglalkozunk a leíróegyenletek kvalitatív vizsgálatának (egzisztencia, unicitás) kérdéseivel. Alapvető elosztott paraméterű modellünk a d hosszúságú, reciprok, lineáris passzív, csatolatlan távvezeték szakasz lesz. Az 1. pontban röviden összefoglaljuk e távvezeték szakasz különféle, ekvivalens időtartománybeli modelljeit, majd néhány gyakorlatilag fontos távvezeték szakasz időtartománybeli kétkapú-modelljét ismertetjük. A 2. pontban összefoglaljuk a nemlineáris koncentrált paraméterű és a lineáris, elosztott paraméterű, passzív, reciprok kétkapúból felépülő hálózatok időtartománybeli leíróegyenleteit. E leíróegyenletek — szemben a koncentrált paraméterű hálózatokat leíró közönséges differenciálegyenlet-rendszerekkel — ún. retardált típusú funkcionál-differenciálegyenletek lesznek a legáltalánosabb esetekben. Speciális esetben e funkcionál-differenciálegyenlet egyszerűbb formákat ölt. A 3. pontban diszperziómentes, ill. diszperziós távvezeték szakaszokat tartalmazó nemlineáris, koncentrált paraméterű hálózatok időtartománybeli analízisének elvégzésére szolgáló programok algoritmusairól lesz szó, valamint az előbbi algoritmusok alapján realizált, a TKI-ban kidolgozott ANAL—18 programot ismertetjük.

1. Elosztott paraméterű elemek időtartománybeli modelljei

Először összefoglaljuk az irodalomból ismert eredményeket. Branin 1967-ben [3] diszperziómentes távvezeték szakasz vezérelt generátoros időtartománybeli modelljét adta meg. A vezérelt generátorok tartalmazzák a $\tau = d/v$ jelkésleltetést (d = távvezeték hossza, v = terjedési sebesség). Csurgay 1971-ben [4] diszperziómentes távvezeték szakaszok időtartománybeli analízisre alkalmas, S -formalizmusú (reflexiós leírás) modelljét publikálta. Garrett 1974-ben [5] Branin modelljét koncentrált paraméterű RLC-kapcsolással egészítette ki, feltételezve, hogy néhány diszperziós viselkedésű elosztott paraméterű elem modellezhető egy konstans τ jelkésleltetéssel és emellett a koncentrált paraméterű elemekkel modellezett diszperzióval. E modell mérési eredményekből indul ki, alkalmazási köre korlátozott, néhány tipikus esetre (koaxiális kábelek, nagy sebességű digitális áramkörökben alkalmazott összekötő huzalozás, microstrip tápvonalak) adja meg a diszperzió egy közelítését. A módszer a SCEPTRE [6] jelű analízisprogramban nyert realizálást Microstrip tápvonalak (ezek a mikrohullámú integrált áramkörök alapvető passzív át-

viteli elemei) diszperziójának időtartománybeli modellezésével kiterjedt irodalom foglalkozik. Bálint 1975-ben [7] diszperziómentes, csatolt, extrém lezárású távvezeték szakaszokkal, ill. egy másik megközelítésben csatolt TEM—TE módusú távvezeték szakaszokkal (extrém lezárások és kiegészítő ideális transzformátorhálózat mellett) időtartománybeli analízisprogramokban alkalmazható modelleket ismertet és a témakör átfogó kritikái elemzését adja meg 1978-ban [8]. A vékonyréteg technológiákra építve fontos kérdéssé válhat, hogy elosztott paraméterű passzív RC-modelleket is lehessen alkalmazni a tranzien analízis során. E témában óriási irodalom látott napvilágot, kritikájukként felhozhatjuk, hogy az RC-tápvonal szakaszok speciális hullámformájú gerjesztései és speciális lezárásaira dolgozták ki a tranzien válaszok formuláit. Nincs azonban olyan eredmény, amely általában, tetszőleges koncentrált paraméterű beágyazás és gerjesztés mellett is alkalmazható, általános időtartománybeli modellt adna RC-vonalakra. Az irodalom eddigi eredményeinek kitérő összefoglalását adja Ghaussi és Kelly [9].

RLCG-távvezeték szakaszokra időtartománybeli analízisre alkalmas konvolúciós modellt adott 1978-ban Valtonen [10]. Valtonen a távvezetékben terjedő feszültség- és áramhullámok $+Z$ és $-Z$ irányban haladó (másképp beeső- és reflektált) feszültség- és áramhullámokra való felbontásának elvén redundáns (2 helyett 4 változóval leírható) távvezeték szakasz-modellt ad meg, sőt kihasználva e modell speciális voltát, a modellben fellépő módosított Bessel-függvények közelítő véges tagú hatványsorainak felhasználásával diszkrétizált modelleket („discrete circuit modell”, „companion modell”, lásd pl. Chua és Lin, (1975), [11]) származtat, amelyek a közönséges differenciálegyenletekkel leírható koncentrált paraméterű hálózatok időtartománybeli analízisében alkalmazott diszkrét modellek alkalmazásán alapuló, időlépésenként megismétlődő egyenáramú analízisre redukálják a problémát. E speciális modell kritikája: nem általános érvényű, csak RLCG-távvezeték esetén alkalmazható és egy általános rendeltetésű analízis eljárás igényeivel ellentétben, kihasználja a modell speciális tulajdonságait.

Összefoglalásképp elmondhatjuk, hogy az irodalom mindeddig lényegében olyan modelleket ismertetett, amelyek e modellek speciális tulajdonságaira építő analízis módszerek esetében alkalmazhatók. (Branin, Garrett, Valtonen, Ghaussi és Kelly). Ezekhez képest hatalmas előrelépést jelentett Csurgay (1971), [4] munkája, amelyben mind diszperziómentes, mind diszperziós elosztott paraméterű (akár passzív akár aktív, akár reciprok, akár nonreciprok) n -kapuk esetére alkalmazható konvolúciós modelleket javasolt, de a diszperziós elosztott paraméterű modellekkel leírható n -kapuk konkrét esetekre vonatkozó időtartománybeli modelljeivel nem foglalkozott. Bálint e munkára építve adott olyan modelleket inhomogén keresztmetszeti kitöltésű tápvonal szakaszokra, melyek a Csurgay által adott elvek alapján általános rendeltetésű időtartománybeli analízisprogramokba beépíthetők.

Jelen fejezetpontban olyan konkrét diszperziós elosztott paraméterű kétkapú-modelleket ismertetünk

majd, amelyek gyakorlatilag is fontosak és emellett eleget tesznek a Csurgay által [4] adott az időtartománybeli analízisben való alkalmazhatóság követelményeinek. Ezt megelőzően azonban összefoglaljuk azt, hogy a lineáris, passzív, reciprok kétkapukra milyen ekvivalens időtartománybeli modellek adhatók.

1.1. Lineáris, passzív, reciprok elosztott paraméterű kétkapuk időtartománybeli analízisre alkalmas ekvivalens modelljei

Elosztott paraméterű modellekkel leírható fizikai eszközök modelljeiként egy széles alkalmazási körre érvényes, passzív, reciprok, lineáris elosztott paraméterű kétkapu modelleket tekintünk, amely a d hosszúságú távvezeték szakaszok elemi, egységnyi hosszúságú szakaszára vonatkozó, $Z(p)$ hosszági impedanciával és $Y(p)$ söntölő admittanciával [azaz, $Z_0(p) = \sqrt{Z(p)/Y(p)}$ hullámimpedanciával és $\gamma(p) = \sqrt{Z(p)Y(p)}$ komplex terjedési tényezővel] rendelkező helyettesítőképével írhatók le.

E távvezeték szakaszokat parciális differenciálegyenlet-rendszerek (az ún. táviróegyenletek) írják le, melyek a távvezetékek állapotváltozóinak hely- és időfüggését jellemzik. A cél azonban az, hogy a helykoordinátáktól való függést a leíróegyenletekből kiköszöböljük, ellenkező esetben ugyanis parciális differenciálegyenlet-rendszerek numerikus megoldásával vizsgálhatnánk a hálózat viselkedését, ami viszont irracionálisan nagy gépidőkre vezethetne és emellett sokszor valóban érdektelen a helytől való függés kiszámítása.

Csurgay [4] megmutatta, hogy ha a távvezetékek állapotváltozóit (ezek nem szükségszerűen a távvezetéken terjedő áram és feszültség) úgy választjuk meg, hogy a táviróegyenletek a $\frac{\partial}{\partial t}$ idő szerinti parciális differenciálás polinom operátorát tartalmazzák, akkor Friedman [12] matematikai munkájára építve, egyszerű elégséges feltételek mellett kimondható, hogy e parciális differenciálegyenletek megoldása létezik és egyértelmű. Ezért javasolta a $\frac{\partial}{\partial t}$ -ben polinomra vezető állapotváltozó-választást az elosztott paraméterű elemekre. Ezeket a parciális differenciálegyenleteket a t időre alkalmazott Laplace-transzformációval megoldhatjuk a „ p ” komplex frekvenciatartományban, majd a $Z=0$ és $Z=d$ helykoordináták mellett fellépő állapotváltozók kapcsolatát keresve, az

$$e_2(p) = \mathbf{A}(p)e_1(p),$$

általános n -kapu leírásra juthatunk. Ennek az összefüggésnek az időtartományban az

$$e_2(t) = \mathbf{A}(t) * e_1(t), \quad (1)$$

konvolúciós összefüggés felel meg, ahol

$$e_1(t) = \mathcal{L}^{-1}e_1(p),$$

$$e_2(t) = \mathcal{L}^{-1}e_2(p)$$

és

$$\mathbf{A}(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathbf{A}(p).$$

Csurgay megmutatta azt is, hogy a \mathcal{L}^{-1} inverz Laplace-transzformációt disztribúció értelemben kell elvégezni (lásd pl. Zemanian, (1968), [13]) és $e_1(t)$, $e_2(t)$ valamint $\mathbf{A}(t)$ alulról korlátos szupportú disztribúciókat (lásd pl. Csurgay (1971), [4]) jelentenek (az alulról korlátosság ténye a kauzális n -kapuk követelményével van összhangban).

E munkára és az irodalom ismert eredményeire építve három alapvető leírásmód kínálkozik az időtartománybeli analízisre alkalmas távvezeték szakaszmodellek előállítására:

a) $\mathbf{Y}(t)$ v. $\mathbf{Z}(t)$ kapuimmittancia-formalizmus

Pl. Ghaussi és Kelly könyvében [9] található, hogy

$$\mathbf{Y}(p) = \begin{bmatrix} Y_0(p) \operatorname{cth}(d\gamma(p)) & -Y_0(p) \frac{1}{\operatorname{sh}(d\gamma(p))} \\ -Y_0(p) \frac{1}{\operatorname{sh}(d\gamma(p))} & Y_0(p) \operatorname{cth}(d\gamma(p)) \end{bmatrix}, \quad (2a)$$

és

$$\mathbf{Z}(p) = \begin{bmatrix} Z_0(p) \operatorname{cth}(d\gamma(p)) & Z_0(p) \frac{1}{\operatorname{sh}(d\gamma(p))} \\ Z_0(p) \frac{1}{\operatorname{sh}(d\gamma(p))} & Z_0(p) \operatorname{cth}(d\gamma(p)) \end{bmatrix}, \quad (2b)$$

kapuimmittancia-mátrixokkal jellemezhetők az elosztott paraméterű kétkapuk, azaz a (2) képleteknek megfelelő időtartománybeli konvolúciós modell magfüggvénye (disztribúció értelemben) az

$$\mathbf{Y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathbf{Y}(p) \quad \text{és} \quad \mathbf{Z}(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathbf{Z}(p),$$

előállítását igényli, ahol $Z_0(p)$ -vel, ill. $Y_0(p)$ -vel a komplex frekvenciatartománybeli hullámimpedanciát, ill. admittanciát jelöltük.

Mivel Csurgay [4] munkája alapján tudjuk, hogy a távvezeték leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldásának létezése és egyértelműsége csak a $\frac{\partial}{\partial t}$ -ben (azaz a „ p ” komplex frekvenciában)

polinomoperátort eredményező állapotváltozó-választás mellett biztosítható (és ezek az állapotváltozók általában nem a távvezetéken terjedő feszültségek és áramok), ezért a (2) képleteket olyan modellek esetén, ahol a távvezetéken terjedő feszültségek és áramok nem eredményeznek $\frac{\partial}{\partial t}$ -ben polinomoperátort, csak úgy alkalmazhatjuk, ha előzőleg kimutatjuk, hogy a $\frac{\partial}{\partial t}$ -ben polinomtípusú leírást adó állapotváltozókból $u(z, t)$ -t és $i(z, t)$ -t kiszámítva a (2) leírás valóban előáll. (A szerző sejtése ezzel kapcsolatban: lineáris, passzív, elosztott paraméterű hálózatoknál ez mindig teljesül).

b) Valtonen-féle modell (1978), [10]

Valtonen felbontotta a távvezetéken terjedő feszültség- és áramhullámokat a $+Z$ -irányú beeső és a $-Z$ -irányú reflektált komponensekre és ezek figyelembevételével a következő, redundáns, a távvezeték szakaszt 2 változó helyett 4 változóval leíró modellt javasolta:

Legyen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}Y_0(p) &\triangleq Y_0(t), \\ \mathcal{L}^{-1}Z_0(p) &\triangleq Z_0(t), \\ \mathcal{L}^{-1}e^{-d\gamma(p)} &\triangleq g(t), \end{aligned} \quad (3)$$

ezzel az Y-típusú leírásban

$$\begin{aligned} i_1(p) &= Y_0(p)u_1(p) - 2t_b(p)e^{-d\gamma(p)}, \\ i_2(p) &= Y_0(p)u_2(p) - 2i_a(p)e^{-d\gamma(p)}, \\ i_a(p) &= Y_0(p)u_1(p) - i_b(p)e^{-d\gamma(p)}, \\ i_b(p) &= Y_0(p)u_2(p) - i_a(p)e^{-d\gamma(p)}, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol

$$t_a(p)/u_a(p) = Y_0(p),$$

míg a Z-típusú leírásban

$$\begin{aligned} u_1(p) &= Z_0(p)i_1(p) + 2u_b(p)e^{-d\gamma(p)}, \\ u_2(p) &= Z_0(p)i_2(p) + 2u_a(p)e^{-d\gamma(p)}, \\ u_a(p) &= Z_0(p)i_1(p) + u_b(p)e^{-d\gamma(p)}, \\ u_b(p) &= Z_0(p)i_2(p) + u_a(p)e^{-d\gamma(p)}, \end{aligned} \quad (5)$$

adják a modellt. Itt ha

$$u(z, p) \triangleq u_h(z, p) + u_r(z, p), \quad (6a)$$

$$i(z, p) \triangleq t_h(z, p) + i_r(z, p) = \frac{u_h(z, p)}{Z_0(p)} - \frac{u_r(z, p)}{Z_0(p)}, \quad (6b)$$

akkor

$$\begin{aligned} u_a(p) &= u_h(0, p), \\ u_b(p) &= u_r(d, p), \\ i_a(p) &= i_h(0, p), \\ \tilde{i}_b(p) &= -i_r(d, p), \end{aligned} \quad (7)$$

(itt t_a és t_b áramokat a kétkapú-elembe befolyó irányban tekintettük).

E modell az időtartományban olyan konvolúciókra vezet, ahol a (3) szerinti inverz Laplace-transzformáltak előállítását a feladat.

c) Reflexiós formalizmusú modell (S-leírás)

Ekkor a

$$b(p) = S(p)a(p), \quad (8)$$

leírásnak megfelelő modell időtartománybeli konvolúciós

$$b(t) = S(t) * a(t) \quad (9)$$

összefüggésének előállítása a feladat, ahol $a(p)$ a beeső-, $b(p)$ a reflektált hullámokat jelentik a távvezeték szakaszra [$Z_0(p)$ hullámimpedanciára normalizálva], míg $S(p)$ az elosztott paraméterű kétkapú reflexiós (scattering) mátrixa.

A fenti modellek a távvezeték szakasz ekvivalens időtartománybeli konvolúciós leírásait eredményezik. Összehasonlításuk végett előrebocsátjuk, hogy a frekvenciafüggő $Z_0(p)$ -re való normalizálás miatt az S-leírás diszperzív elemeknél rendkívül bonyolult p tartománybeli függvények inverz Laplace-transzformációjára vezet (ami általában zárt alakban és egyszerű módon el sem végezhető). Diszperziómentes esetben viszont a konstans Z_0 miatt kifejezetten

ez a leírás mód előnyös (Csurgay, (1971), [4], ill. (1973), [19]). Diszperziómentes elemek esetén az $Y(t)$ vagy $Z(t)$ kapuimmittancia leírások viszonylag bonyolult konvolúciómagokra vezetnek, de előállításuk és alkalmazásuk lényegesen könnyebb, mint az S-formalizmusú leírásban.

Megjegyezzük, hogy a tiszta reaktáns (vesztésmentes) elosztott paraméterű modellek esetében a korlátos gerjesztés—korlátos felelet értelmű stabilitás nem feltétlenül teljesül (gondoljunk pl. az egysegugrásfeszültséggel gerjesztett, a végén rövidzárt ideális, vesztésmentes távvezeték szakaszra, ahol a válaszként adódó bemeneti áram lépcsős-függvény szerint tart az idő előrehaladtával a végtelenhez). E modelleket reprezentáló magfüggvények fenti tulajdonsága numerikus pontatlanságokra, instabilitásokra is vezethet. Ezeket természetesen kiküszöbölhetik a beágyazó nemlineáris koncentrált paraméterű hálózat veszteségei által okozott csillapítások, de az ilyen koncentrált-elosztott paraméterű hálózatok stabilitáskérdései manapság még nem tisztázottak, így feladatonkénti külön vizsgálatot igényelnek. Erre való tekintettel veszteséges elosztott paraméterű modellek alkalmazását javasoljuk a tranzienst analízis programokba való beépítésre.

Utalnunk kell arra, is, hogy bizonyos elosztott paraméterű modellek $Y(t)$ v. $Z(t)$ leírása nem a fizikai teret leíró Maxwell-egyenletek megoldásaiként kapott vonalintegrállal értelmezett feszültségek és áramok kapcsolatát írják le, hanem pl. a csőtápvonalak módusfeszültségének és áramainak összefüggéseire vezetnek. Az ilyen modelleknek a koncentrált paraméterű (vonallintegrállal jellemezhető) hálózatrészhez való csatlakozása kielégítően modellezhető az átmenetet megvalósító és általában rövid csőtápvonal szakaszok miatt koncentrált paraméterű kapcsolásokkal (lásd: Csurgay, (1971), [4]).

1.2. Néhány elosztott paraméterű időtartománybeli modell

1.2.1. Diszperziómentes távvezeték szakaszok

a) Reflexiós modell (Csurgay, (1971) [4])

A modellegyenlet:

$$b(t) = S(t) * a(t), \quad (10)$$

ahol

$$\begin{aligned} b(t) &= [b_1(t), b_2(t)]^T, \\ a(t) &= [a_1(t), a_2(t)]^T, \end{aligned}$$

a reflektált és beeső hullámok z_0 -ra normáiba,

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\alpha} \delta(t-\tau) \\ e^{-\alpha} \delta(t-\tau) & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$\delta(t-\tau)$ a $t-\tau$ időpillanathoz rendelt Dirac- δ disztribúció, $\tau = a$ távvezeték késleltetési ideje, $\alpha = a$ veszteségi tényező (a hossz helyett a t időre normalizálva), $tr =$ transzponált. (11) alapján

$$b_1(t) = e^{-\alpha} a_2(t-\tau), \quad (12a)$$

$$b_2(t) = e^{-\alpha} a_1(t-\tau), \quad (12b)$$

adódik.

b) Kapuimmittancia modell

Noha az időtartománybeli analízis céljára egyértelműen az S-leírás javasolható, mivel minden egyéb leírásmód bonyolultabb és nagyobb tágírényt jelent a számítógépes realizáció szempontjából, a teljesség kedvéért megadjuk a kapuimmittancia modellt is. Ennek használhatósága elsősorban elméleti vizsgálatok esetén látszik előnyösnek.

Mivel a kapuadmittancia-leírásban

$$Y_{11}(p) = Y_{22}(p) = Y_0 \operatorname{cth} [\tau(p + \alpha)], \quad (13a)$$

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = -Y_0 \frac{1}{\operatorname{sh} [\tau(p + \alpha)]}, \quad (13b)$$

III. a kapuimpedancia-leírásban

$$Z_{11}(p) = Z_{22}(p) = Z_0 \operatorname{cth} [\tau(p + \alpha)], \quad (13c)$$

$$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = Z_0 \frac{1}{\operatorname{sh} [\tau(p + \alpha)]}, \quad (13d)$$

a keresett modell

$$\begin{aligned} y_{11}(t) = y_{22}(t) &= \mathcal{L}^{-1} Y_{11}(p) = \\ &= Y_0 [\delta(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\tau} \delta(t - 2n\tau)], \end{aligned} \quad (14a)$$

és

$$\begin{aligned} y_{12}(t) = y_{21}(t) &= \mathcal{L}^{-1} Y_{12}(p) = \\ &= -2Y_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha(2n-1)\tau} \delta[t - (2n-1)\tau], \end{aligned} \quad (14b)$$

(hasonlóan adódik a $Z(t)$ modell is). Itt δ a Dirac- δ disztribúció.

c) Valtonen-féle modell

Ugyancsak a teljesség kedvéért megadjuk a beeső- és reflektált feszültség- és áramhullámokra felbontás elvén alapuló Valtonen-féle távvezetékmodellt.

Itt

$$\mathcal{L}^{-1} Y_0(p) = \mathcal{L}^{-1} Y_0 = Y_0 \delta(t), \quad (15a)$$

és

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} e^{-d\gamma(p)} = \mathcal{L}^{-1} e^{-\tau(p+\alpha)} = e^{-\alpha\tau} \delta(t - \tau). \quad (15b)$$

d) Branin-féle vezéreltgenerátoros modell (Branin, (1967), [3])

Y-leírásban a modellegyenletek az

$$i_1(t) = Y_0 u_1(t) - Y_0 e^{-\alpha\tau} u_2(t - \tau) - e^{-\alpha\tau} i_2(t - \tau), \quad (16a)$$

$$i_2(t) = Y_0 u_2(t) - Y_0 e^{-\alpha\tau} u_1(t - \tau) - e^{-\alpha\tau} i_1(t - \tau), \quad (16b)$$

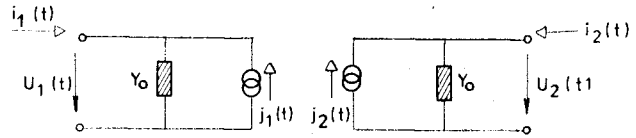
alakot öltik, amelyet az 1. ábra szemléltet.

1.2.2. Néhány diszperziós távvezeték szakasszal modellezhető eszköz időtartománybeli konvolúciós leírása

1.2.2/a Kis veszteségű dielektrikummal kitöltött, homogén, egyszeresen összefüggő keresztmetszetű ideális fémfalal határolt csőtápvonal szakasz TM és TE módusai

A módusokat reprezentáló távvezeték szakasz elemi szakaszának helyettesítőképét lásd pl.: Csurgay, Markó, (1965), [15] (2. ábra)

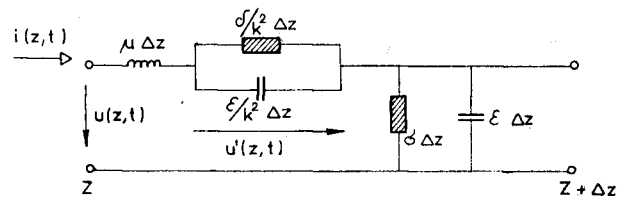
Az $u(z, t)$ és $i(z, t)$ -re vonatkozó távíróegyenletek



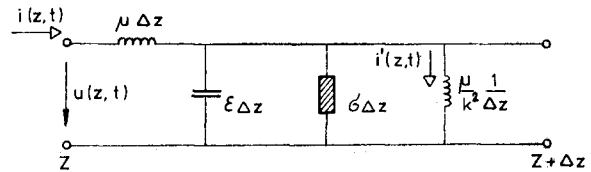
$$\begin{aligned} j_1(t) &= Y_0 e^{-\alpha\tau} U_2(t - \tau) + e^{-\alpha\tau} i_2(t - \tau) \\ j_2(t) &= Y_0 e^{-\alpha\tau} U_1(t - \tau) + e^{-\alpha\tau} i_1(t - \tau) \end{aligned}$$

H740-1

1. ábra



a, Veszteséges TM-módus



b, Veszteséges TE-módus

H740-2

2. ábra. μ a kitöltő közeg permeabilitása, ϵ a dielektrikus állandója, k az adott módushoz tartozó sajátérték, δ a dielektrikum hosszegységre eső vezetőképessége

nem adnak $\frac{\partial}{\partial t}$ -ben polinom típusú operátort, azonban (lásd: Csurgay, (1971), [4]) TM-módusnál $u(z, t)$ és $u'(z, t)$, TE-módusnál $i(z, t)$ és $i'(z, t)$ állapotváltozók választása $\frac{\partial}{\partial t}$ -ben polinom operátorra vezet. Mivel TM-módusra $i(z, p)$ és $u'(z, p)$ összefüggése:

$$i(z, p) = \frac{a + p\epsilon}{k^2} u'(z, p), \quad (17)$$

és az $u(z, p)$, $u'(z, p)$ p -ben polinom típusú állapotegyenletre vezető állapotváltozókra nyert megoldások

$$\begin{pmatrix} u(d, p) \\ u'(d, p) \end{pmatrix} = \exp(-d\mathbf{P}(p)) \begin{pmatrix} u(0, p) \\ u'(0, p) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

alakúak, ahol

$$\begin{aligned} \exp\{-d\mathbf{P}(p)\} &= \exp \left\{ -d \begin{bmatrix} 0 & p^2 \frac{\epsilon\mu}{k^2} + p \frac{\mu\sigma}{k^2} + 1 \\ k^2 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(d\gamma(p)) & \frac{\epsilon\mu}{k^2} p^2 + p \frac{\mu\sigma}{k^2} + 1 \\ \frac{k^2 \operatorname{sh}(d\gamma(p))}{\gamma(p)} & \operatorname{ch}(d\gamma(p)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (19a)$$

és

$$\gamma(p) = \sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{p^2 + p \frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{k^2}{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{v} \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2}, \quad (19b)$$

továbbá

$$\alpha \triangleq \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \omega_c^2 \triangleq \frac{k^2}{\varepsilon\mu}, \quad \Omega_c^2 \triangleq \omega_c^2 - \frac{\alpha^2}{4}, \quad (19c)$$

a (17)–(19) összefüggésekből egyszerűen levezethető az $i(0, p)$, $i(d, p)$ valamint $u(0, p)$, $u(d, p)$ összefüggését megadó $\mathbf{Y}(p)$ kapuadmittancia mátrix a TM-módusra, illetve $\mathbf{Z}(p)$ kapuimpedancia mátrix a TE-módusra:

Itt bevezettük a

$$\tau \triangleq d\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{d}{v}, \quad Y_0 \triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad Z_0 \triangleq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (20)$$

jelöléseket, v a hullámterjedés sebességét jelenti a tápvonalon.

A (20) formulákra alkalmazott inverz Laplace-transzformációval adódik az $\mathbf{Y}(t)$, ill. $\mathbf{Z}(t)$ leírás. Itt csak a TM-módusra vonatkozó $\mathbf{Y}(t)$ leírást ismertetjük:

$$Y_{11}(t) = Y_{22}(t) = \mathcal{L}^{-1}Y_{11}(p) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} Y_{11}^{VM}(t) \Big|_{\omega_c \rightarrow \Omega_c}^{\text{helyettesítéssel}} + e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left\{ 1(t) Y_0 \frac{\alpha}{2} J_0(\Omega_c t) + Y_0 \alpha \sum_{n=1}^{N(t)} 1(t - 2n\tau) J_0(\Omega_c \sqrt{t^2 - (2n\tau)^2}) \right\}, \quad (21a)$$

$$Y_{12}(t) = Y_{21}(t) = \mathcal{L}^{-1}Y_{12}(p) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} Y_{12}^{VM}(t) \Big|_{\omega_c \rightarrow \Omega_c}^{\text{helyettesítéssel}} + e^{-\frac{\alpha}{2}t} Y_0 \alpha \sum_{n=1}^{M(t)+1} 1[t - (2n-1)\tau] J_0[\Omega_c \sqrt{t^2 - (2n-1)^2\tau^2}], \quad (21b)$$

ahol $Y_{11}^{VM}(t)$ és $Y_{12}^{VM}(t)$ a veszteségmentes TM-módus-hoz tartozó időtartománybeli modelleket jelentik, $1(t)$ az egységugrásfüggvény, $J_0(\cdot)$ a nulla indexű Bessel-függvény. $Y_{11}^{VM}(t)$ és $Y_{12}^{VM}(t)$ az alábbi:

$$Y_{11}^{VM}(t) = Y_0 \delta(t) + 2Y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - 2n\tau) - 1(t) Y_0 \omega_c J_1(\omega_c t) - Y_0 \omega_c^2 t \sum_{n=1}^{N(t)} 1(t - 2n\tau) [J_0(\omega_c \sqrt{t^2 - (2n\tau)^2}) + J_2(\omega_c \sqrt{t^2 - (2n\tau)^2})], \quad (22a)$$

$$Y_{12}^{VM}(t) = -2Y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \delta[t - (2n-1)\tau] + Y_0 \omega_c^2 t \sum_{n=1}^{M(t)+1} 1[t - (2n-1)\tau] \times \{y_0(\omega_c \sqrt{t^2 - (2n-1)^2\tau^2}) + y_2(\omega_c \sqrt{t^2 - (2n-1)^2\tau^2})\}. \quad (22b)$$

Itt δ a Dirac-delta disztribúció, $J_0(\cdot)$ és $J_2(\cdot)$ a megfelelő indexű Bessel-függvények. (21) és (22) formulákban az $N(t)$ és $M(t)$ indexhatárok jelentése:

$2(n-1)\tau \leq t < 2n\tau$ ($n=1, 2, \dots$) esetén $N(t) = n-1$, míg

$(2n-1)\tau \leq t < (2n+1)\tau$ esetén $M(t) = n$ ($n=1, 2, \dots$).

Lényegesen egyszerűbb összefüggésekre vezet a Valtonen-féle modell. A TM-módus $Y_0(p)$ hullám-admittanciája, ill. a TE-módus $Z_0(p)$ hullámimpedanciája:

$$Y_0(p) = Y_0 \frac{p + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2}}, \quad (23a)$$

$$Z_0(p) = Z_0 \frac{p + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2}}. \quad (23b)$$

Ezek alapján

$$Y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}Y_0(p) = Y_0 \delta(t) - 1(t) Y_0 \Omega_c e^{-\frac{\alpha}{2}t} J_1(\Omega_c t) + 1(t) Y_0 \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}t} J_0(\Omega_c t), \quad (24a)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}e^{-d\gamma(p)} = e^{-\frac{\alpha}{2}t} \delta(t - \tau) - 1(t - \tau) e^{-\frac{\alpha}{2}t} \frac{\Omega_c \tau}{2} \times \{J_0(\Omega_c \sqrt{t^2 - \tau^2}) + J_2(\Omega_c \sqrt{t^2 - \tau^2})\}, \quad (24b)$$

$Z_0(t)$ úgy adódik, hogy a (24a) képletben a J_0 -t tartalmazó tag előjelét negatívra változtatjuk, és Y_0 helyett a Z_0 konstans használjuk.

1.2.2/b RLGC távvezeték szakaszok időtartománybeli modellje

A terjedési tényező és a hullámadmittancia:

$$\gamma(p) = \sqrt{(R+pL)(G+pC)} = \frac{1}{V} \sqrt{(p+a)^2 - b^2}, \quad (25a)$$

$$Y_0(p) = \sqrt{\frac{G+pC}{R+pL}} = \frac{Y_0(p+a-b)}{\sqrt{(p+a)^2 - b^2}}, \quad (25b)$$

ahol bevezettük az

$$a \triangleq \frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}, \quad b \triangleq \frac{R}{2L} - \frac{G}{2C}, \quad V \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$Y_0 \triangleq \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \tau \triangleq \frac{d}{V},$$

jelöléseket. (25) és (2a) alapján a távvezeték szakasz kapuadmittancia-mátrixa:

$$Y_{11}(p) = Y_{22}(p) = \frac{Y_0 \tau (p+a-b)}{\tau \sqrt{(p+a)^2 - b^2}} \operatorname{cth} [\tau \sqrt{(p+a)^2 - b^2}], \quad (26a)$$

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = -\frac{Y_0 \tau (p+a-b)}{\tau \sqrt{(p+a)^2 - b^2}} \frac{1}{\operatorname{sh} [\tau \sqrt{(p+a)^2 - b^2}]}. \quad (26b)$$

Ebből az $\mathbf{Y}(t)$ időtartománybeli modell:

$$\begin{aligned}
Y_{11}(t) &= Y_{22}(t) = \mathcal{L}^{-1} Y_{11}(p) = Y_0 \delta(t) + \\
&+ 2Y_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2na\tau} \delta(t - 2n\tau) + \\
&+ Y_0 e^{-at} b^2 t \sum_{n=1}^{N(t)} 1(t - 2n\tau) \{ I_0(b\sqrt{t^2 - (2n\tau)^2}) - \\
&- I_2(b\sqrt{t^2 - (2n\tau)^2}) \} + 1(t) Y_0 b e^{-at} I_1(bt) - \\
&- 2Y_0 b e^{-at} \sum_{n=1}^{N(t)} i(t - 2n\tau) I_0(b\sqrt{t^2 - (2n\tau)^2}) - \\
&- Y_0 b 1(t) e^{-at} I_0(bt), \quad (27a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{12}(t) &= Y_{21}(t) = \mathcal{L}^{-1} Y_{12}(p) = \\
&= -2Y_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a(2n-1)\tau} \delta[t - (2n-1)\tau] - \\
&- Y_0 e^{-at} b^2 t \sum_{n=1}^{M(t)+1} 1[t - (2n-1)\tau] \times \\
&\times \{ I_0(b\sqrt{t^2 - (2n-1)^2\tau^2}) - I_2(b\sqrt{t^2 - (2n-1)^2\tau^2}) \} - \\
&- 2Y_0 b e^{-at} \sum_{n=1}^{M(t)+1} i(t - (2n-1)\tau) I_0 \times \\
&\times (b\sqrt{t^2 - (2n-1)^2\tau^2}), \quad (27b)
\end{aligned}$$

ahol I_0 , I_1 és I_2 a megfelelő indexű módosított Bessel-függvények.

A Valtonen-féle modell formulái (részletesebben lásd: [10]):

$$Y_0(t) = \mathcal{L}^{-1} Y_0(p) = Y_0 \delta(t) + Y_0 b 1(t) e^{-at} [I_1(bt) - I_0(bt)], \quad (28a)$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathcal{L}^{-1} e^{-d\gamma(p)} = e^{-ar} \delta(t - \tau) + \\
&+ 1(t - \tau) e^{-at} \frac{b^2 \tau}{2} [I_0(b\sqrt{t^2 - \tau^2}) - I_2(b\sqrt{t^2 - \tau^2})]. \quad (28b)
\end{aligned}$$

Az eredeti Valtonen-féle formulákat itt annyi változtatással közöltük, hogy alkalmaztuk az

$$I_1(z)/z = \frac{1}{2} (I_0(z) - I_2(z))$$

összefüggést, így számítógépprogramban alkalmazható formulát kaptunk.

1.2.2/c RC-távvezeték szakaszok időtartománybeli modellje

A $Z(p) = R$ és $Y(p) = pC$ immittanciákkal jellemzett RC-távvezeték szakasz jellemzői:

$$\gamma(p) = \sqrt{pRC}, \quad (29a)$$

$$Z_0(p) = \sqrt{\frac{R}{pC}}. \quad (29b)$$

Vezessük be a $\tau \triangleq d^2 RC$ mennyiséget. Ezzel a távvezeték szakasz $\mathbf{Z}(p)$ impedanciámátrixa:

$$Z_{11}(p) = Z_{22}(p) = \frac{Rd}{\sqrt{p\tau}} \operatorname{cth}(\sqrt{p\tau}), \quad (30a)$$

$$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = \frac{Rd}{\sqrt{p\tau}} \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{p\tau})}. \quad (30b)$$

A $\mathbf{Z}(t)$ kapuimpedancia leírás:

$$\begin{aligned}
Z_{11}(t) &= Z_{22}(t) = \mathcal{L}^{-1} Z_{11}(p) = \frac{Rd}{\tau} \vartheta_3 \left(\vartheta = 1, j\pi \frac{t}{\tau} \right) = \\
&= \frac{Rd}{\tau} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{t}{\tau}} \right] = \\
&= \frac{Rd}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \tau}{t}} \right] \quad t > 0, \quad (31a)
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
Z_{12}(t) &= Z_{21}(t) = \mathcal{L}^{-1} Z_{12}(p) = \frac{Rd}{\tau} \vartheta_3 \left(\vartheta = \frac{1}{2}, j\pi \frac{t}{\tau} \right) = \\
&= \frac{Rd}{\tau} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 \frac{t}{\tau}} \right] = \\
&= 2 \frac{Rd}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \tau}{4t}} \quad t > 0, \quad (31b)
\end{aligned}$$

ahol $\vartheta_3 \left(\vartheta, j\pi \frac{t}{\tau} \right)$ az ún. teta-függvény (a definíciót és tulajdonságokat tárgyalja Magnus és Oberhettinger könyve [16]). A teta-függvényeket két különböző végtelen sorral is fel lehet írni. E sorokat azonban bizonyos t tartományokban jól lehet közelíteni véges számú tag összegével. $Z_{11}(t)$ fontos tulajdonsága, hogy kis t értékekre

$$Z_{11}(t) \cong \frac{Rd}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}}, \quad \text{míg} \quad \lim_{t \rightarrow 0} Z_{12}(t) = 0.$$

A távvezeték szakasz Valtonen-féle modellje:

$$Z_0(t) = \mathcal{L}^{-1} Z_0(p) = \frac{Rd}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad (32a)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} e^{-d\gamma(p)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t^3}} e^{-\frac{\tau}{4t}}. \quad (32b)$$

$g(t)$ -ről kimutatható, hogy $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$. Látható, hogy

$Z_{11}(t)$ kis t -kre, valamint $Z_0(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$. Ez a konvolúció-

ban való alkalmazás szempontjából azt jelenti, hogy improprius integrált kell kiszámítani. Ez azonban nem okoz nehézséget, mivel a konvolúcióban szereplő áram időfüggvényét a numerikus eljárás alacsony fokszámú polinommal (sokszor pl. elsőfokúval) közelíti, és az így kapott

$$\int_0^t Z(t-x) i(x) dx \sim \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-x}} i(x) dx,$$

integrál eredménye kézikönyvekben megtalálható.

Végezetül megjegyezzük, hogy az 1.2.2/a–1.2.2/c pontokban közölt modellképletek bizonyítása [17]-ben megtalálható.

A közölt modellekkel kapcsolatban még egy észrevételt teszünk. Az $\mathbf{Y}(t)$ vagy $\mathbf{Z}(t)$ kapuimmittancia-modellekben felismerhetjük (az RC-vonal kivételével), hogy a Dirac- δ disztribúciókat tartalmazó tagok éppen a diszperziómentes távvezeték szakaszt jelentik. Tehát az \mathbf{Y} -leírásban párhuzamosan, a \mathbf{Z} -leírásban sorosan kiemelhető egy diszperziómentes távvezeték-

szakasz. A megmaradó kétkaput integrállal reprezentálható konvolúció jellemzi, ez „felelős” a diszperzióért.

2. Koncentrált—elosztott paraméterű hálózatok időtartománybeli leíróegyenletei

A diszperziómentes távvezetékszakaszokat tartalmazó lineáris, idővariáns hálózatokat leíró állapotegyenletet Csurgay [4] publikálta 1971-ben. Ugyancsak 1971-ben nemlineáris koncentrált paraméterű hálózatba beágyazott diszperziómentes távvezetékszakaszok esetére Ho [18] közölt időtartománybeli leíróegyenletet. 1973-ban Csurgay [19] diszperziómentes távvezetékszakaszokat és nemlineáris, koncentrált paraméterű elemeket tartalmazó hálózatok állapotegyenletét ismertette.

Diszperziós elosztott paraméterű és lineáris, koncentrált paraméterű elemeket tartalmazó hálózatok állapotegyenletét Csurgay [4] adta meg 1971-ben. Az ismertetett elv alapján minden nehézség nélkül felírhatók az állapotegyenletek nemlineáris koncentrált paraméterű beágyazó hálózatok esetére is.

A felsorolt leíróegyenletek közös vonása: az elosztott paraméterű elemek időtartománybeli konvolúciós leírása révén sikerült kiköszöbölni a helyfüggést az egyenletekből, azaz nem parciális differenciálegyenlet-rendszerekkel modellezik a koncentrált-elosztott paraméterű hálózatot. Ennek ára azonban az, hogy a koncentrált paraméterű hálózatokra jellemző közönséges differenciálegyenletek helyett bonyolultabb differenciálegyenletek adódnak, amelyekben megjelennek az elosztott paraméterű elemek konvolúciós összefüggései. Legáltalánosabb esetben az

$$f(\dot{x}(t), x(t), A(t) * x(t), t) = 0, \quad (33a)$$

ahol $*$ = konvolúció jele alakú ún. retardált típusú funkcionál-differenciálegyenlet írja le a hálózatot az időtartományban, ahol x az állapot változók (koncentrált- és elosztott paraméterű elemek állapotváltozói) vektora, $A(t)$ a konvolúciók magja. Retardált funkcionál-differenciálegyenletnek nevezi a matematika az olyan differenciálegyenleteket (lásd pl.: Hale, [20]), ahol a változók $\dot{x}(t)$ deriváltja az $x(t)$ „jelen” mellett függ azok $x(s)$ „múltjától” ($s < t$) is.

(A közönséges differenciálegyenleteknél $\dot{x}(t)$ csak az $x(t)$ „jelentől” függött). A múlttól való függés az itt tárgyalt hálózatostályok esetében mindig konvolúción keresztül jelenik meg. Diszperziómentes elosztott paraméterű elemek esetén a konvolúció magja a $t - \tau$ időpillanathoz tartozó $\delta(t - \tau)$ Dirac-delta disztribúció, és így a $\delta(t - \tau) * x(t)$ konvolúció eredménye az $x(t - \tau)$ (konstans τ idővel történő késleltetés) lesz. Az 1. pontban tárgyalt diszperziós modellek kapcsán viszont láttuk, hogy ezeknél mindig megjelenik (és ez éppen a diszperzió kifejeződése) egy integrállal reprezentálható

$$\int_0^t A(s)x(t-s)ds$$

alakú konvolúció is, ami az x állapotváltozó $[0, t]$ időintervallum feletti „múltját” használja fel.

A Ho által adott egyenletek [18] vagy az e pontban ismertetésre kerülő (47) egyenletek a (33) alakú, legáltalánosabb egyenlettípusba tartoznak. Ugyanakkor adott topológiai feltételek vagy az elosztott paraméterű elemek állapotváltozójának alkalmas megválasztása mellett ez az általános retardált differenciálegyenlet lényegesen egyszerűbb alakot is ölthet (ezek általában már nem is igazi retardált differenciálegyenletek, hanem közönséges differenciálegyenletek konvolúciós típusú korlátozó egyenletekkel vagy akár közönséges differenciálegyenletek is lehetnek). E speciális alakokra ebben a pontban részletesen kitérünk.

A teljesség kedvéért összefoglaljuk majd, a diszperziómentes elosztott paraméterű elemeket tartalmazó hálózatok állapotegyenleteit Csurgay [4], [19] és Csurgay, Kovács, Recski [21] nyomán, továbbá foglalkozunk a diszperziós elosztott paraméterű elemeket tartalmazó hálózatok leíróegyenleteivel is. Ez utóbbi esetben ismét összefoglaljuk a Csurgay által publikált egyenleteket [4], majd ezeknek egy általánosabb topológiai feltétel mellett érvényes — az ún. függő állapotváltozók esetére vonatkozó — kiterjesztését is megmutatjuk.

2.1. Diszperziómentes távvezetékszakaszokat is tartalmazó nemlineáris koncentrált paraméterű hálózatok állapotegyenletei

Az alábbiakban két esetet különböztetünk meg: az ún. független és a függő állapotváltozók esetén érvényes egyenleteket. Koncentrált paraméterű hálózatokban független állapotváltozóról beszélünk akkor, ha ezek kezdeti feltételei függetlenül előírhatók, egyébként a függő állapotváltozók esete áll fenn (lásd pl. Roska [22]). Vezérelt generátort nem tartalmazó hálózatokban pl. a feszültségtípusú (kapacitásból és feszültséggenerátorokból álló) hurkok vagy az áramtípusú (induktivitásokból és áramgenerátorokból álló) vágatok eredményezik a függő állapotváltozókat. Csurgay, Recski és Kovács [21] dolgozatukban megmutatták, hogy ha a diszperziómentes távvezetékeket a reflexiós formalizmusban írjuk le, azaz állapotváltozóiknak azok két végében jelentkező beeső hullámait tekintjük, akkor a t_0 kezdeti időpillanatban a koncentrált paraméterű elemek független állapotváltozói és az említett távvezetékváltozók lineárisan független rendszert képeznek. Ez azt jelenti, hogy a távvezetékszakaszok állapotváltozói nem befolyásolják a koncentrált paraméterű elemek körében kiválasztott független állapotváltozókat, vagyis a független ill. függő állapotváltozók esetére felírt állapotegyenletek megkülönböztetése kizárólag a koncentrált paraméterű elemek állapotváltozói felhasználásával történik. Úgy is fogalmazhatjuk, hogy Csurgay, Recski és Kovács dolgozata alapján ezeknek a hálózatoknak az állapotegyenletei tisztázottak mind a független, mind a függő állapotváltozók esetére.

2.1.1. Állapotegyenlet a független állapotváltozók esetén

Csurgay [4], [19] a következőképp származtatta az állapotegyenleteket. A reaktanciákat, nemlineáris eszközöket és a távvezetékszakaszokat emeljük ki

a lineáris memóriamentes elemeket (ellenállások, független- és vezérelt generátorok) tartalmazó hálózatrészéből.

A lineáris memóriamentes hálózat hibrid-kapuleírása:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{H}_{xx}x(t) + \mathbf{H}_{xa}a(t) + \mathbf{B}_xu(t), \\ b(t) &= \mathbf{H}_{ax}x(t) + \mathbf{H}_{aa}a(t) + \mathbf{B}_au(t). \end{aligned} \quad (33b)$$

Itt $x(t)$ -vel a koncentrált paraméterű elemekhez tartozó állapotváltozókat, $a(t)$ -vel pedig a lineáris, memóriamentes hálózatban a távvezetékek csatlakozásainál nyitott, a távvezetékek Z_{oi} hullámellenállásaira normalizált, kapukon beeső hullámokat jelöltük, $u(t)$ pedig a gerjesztések vektora. y és b az x , ill. a kapuváltozókhoz tartozó konjugált kapuváltozók.

A kiemelt eszközök egyenletei:

$$-y = \mathbf{C}(x)\dot{x} + \mathbf{F}(x), \quad (34a)$$

$$\beta(t) = \mathbf{A}\alpha(t - \tau), \quad (34b)$$

ahol $\mathbf{C}(x)$ a kiemelt koncentrált paraméterű elemek reaktanciámátrixa, $\mathbf{F}(x)$ a nemlineáris feszültség-áram-karakterisztikákat jelenti, míg α a távvezetékek beeső-, β pedig a reflektált hullámait jelenti az időtartományban. Az $a(t)$ vektorban az

$$a = \underbrace{[a_{11}, a_{21}]}_{1. \text{ távvez.}} \underbrace{[a_{12}, a_{22}]}_{2. \text{ távvez.}} \dots \underbrace{[a_{1m}, a_{2m}]}_{m. \text{ távvez.}}^tr,$$

(tr = transzponált) sorrendezést alkalmazva \mathbf{A}

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma_i \tau_i} \\ e^{-\gamma_i \tau_i} & 0 \end{bmatrix},$$

alakú blokkokat tartalmazó blokkdiagonálmátrix. (Itt τ_i az egyes távvezetékek késleltetési időit, γ_i pedig azok veszteségi tényezőit jelenti).

Figyelembe véve, hogy $a_i(t) = \beta_i(t)$ és $b_i(t) = \alpha_i(t)$ a távvezeték szakaszok és a lineáris, memóriamentes hálózatrész csatlakozásainál, adódik az alábbi állapotegyenlet:

$$x(t) = -\mathbf{C}^{-1}(x)[\mathbf{H}_{xx}x(t) + \mathbf{F}(x) + \mathbf{H}_{xa}\mathbf{A}\alpha(t - \tau) + \mathbf{B}_xu(t)], \quad (35a)$$

$$\alpha(t) = \mathbf{H}_{ax}x(t) + \mathbf{H}_{aa}\mathbf{A}\alpha(t - \tau) + \mathbf{B}_au(t). \quad (35b)$$

2.1.2. *Állapotegyenlet a függő állapotváltozók esetén*
A koncentrált paraméterű elemek állapotváltozói között most az alábbi lineáris összefüggés áll fenn:

$$x_2 = \mathbf{L}_1x_1 + \mathbf{L}_u u(t),$$

ahol x_1 a független választható, x_2 pedig a kifejezett állapotváltozók vektora, $u(t)$ pedig a gerjesztések vektora. Ha a vezérelt generátorok nem okoznak függőségeket az állapotváltozók között, akkor tisztán topológiai feltételek (feszültségkapu-hurok, áramkapu-vágat) okozzák ezen függéseket és így \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_u együtthatómátrixok 0 és ± 1 elemekből épülnek fel.

A memóriamentes lineáris hálózat hibridkapuleírása most az alábbi (y particionálása x -nek felel meg):

$$y_1 + \mathbf{P}y_2 = \mathbf{B}_{xx}x_1 + \mathbf{R}_{xa}a + \mathbf{B}_xu(t), \quad (36a)$$

$$b = \mathbf{R}_{ax}x_1 + \mathbf{R}_{aa}a + \mathbf{B}_au(t), \quad (36b)$$

legyen

$$\mathbf{C}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(x_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2(x_2) \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{F}(x) = [\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)]^tr,$$

alakú, a távvezeték szakaszok leírása pedig a (34b) szerinti. Ekkor az állapotegyenlet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mathbf{P}_e^{-1}(x_1)[\mathbf{F}_1(x_1) + \mathbf{B}_{xx}x_1 + \mathbf{R}_{xa}\mathbf{A}\alpha(t - \tau) + \mathbf{B}_xu(t) + \\ &+ \mathbf{P}\mathbf{F}_2(x_2)|_{x_2=\mathbf{L}_1x_1+\mathbf{L}_u u} + \mathbf{P}\mathbf{C}_2(x_2)|_{x_2=\mathbf{L}_1x_1+\mathbf{L}_u u} \cdot \mathbf{L}_u \dot{u}(t)], \end{aligned} \quad (37a)$$

$$\alpha(t) = \mathbf{R}_{ax}x_1 + \mathbf{R}_{aa}\mathbf{A}\alpha(t - \tau) + \mathbf{B}_au(t), \quad (37b)$$

ahol \mathbf{A} ugyanaz, mint 2.1.1.-ben, és

$$\mathbf{P}_e(x_1) = \mathbf{C}_1(x_1) + \mathbf{P}\mathbf{C}_2(x_2)|_{x_2=\mathbf{L}_1x_1+\mathbf{L}_u u} \cdot \mathbf{L}_1.$$

A (35), ill. (37) állapotegyenletek közös tulajdonsága, hogy azok általános alakja:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \alpha(t - \tau)), \quad (38a)$$

$$\alpha(t) = L(x(t), u(t), \alpha(t - \tau)), \quad (38b)$$

az

$$x_0 = x(t_0), \quad (38c)$$

$$\alpha(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (38d)$$

általánosított kezdeti feltételekkel. Itt (38b)-ben L az $x(t)$, $u(t)$ és $\alpha(t - \tau)$ változók lineáris kombinációját jelöli.

Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy a (38d)-ben szereplő $\varphi(t)$ kezdeti feltételként adott függvénynek is ki kell elégítenie a (38b) korlátozó feltételt, azaz, $\varphi(t)$ választása ennyiben nem lehet önkényes. Energia-mentes vagy DC-analízissel meghatározott kezdeti feltételek esetén e követelmény automatikusan teljesül.

Azt is meg kell állapítanunk, hogy a diszperziómentes távvezeték szakaszokat tartalmazó hálózatok (38) szerinti állapotegyenlete lényegében egy közös differenciálegyenlet (38a), melyet $u(t)$ és az $\alpha(t - \tau)$ „múlt” ismeretében meg lehet oldani. Az $x(t)$ megoldást kiszámítva, ezt (38b)-be kell behelyettesíteni és $\alpha(t)$ -t tárolni kell $(t - \tau)$ -ig visszamenőleg.

2.2. *Diszperziós elosztott paraméterű kétkapukat is tartalmazó nemlineáris, koncentrált paraméterű hálózatok időtartománybeli letrógyenletei*

Ismét különválasztjuk a független- és függő állapotváltozók esetét. Mivel a diszperziós távvezeték szakaszok leírására az 1. pontban elmondottak alapján a kapuimmittancia leírást vagy a Valtonen-féle, lényegében a kapuimmittancia leírással rokon modellt választjuk, így most mind a koncentrált-, mind az elosztott paraméterű elemek állapotváltozói vagy feszültségek vagy áramok. Ezért a függő- vagy független állapotváltozók esetének megkülönböztetéséhez most a távvezeték végződés feszültség- vagy áram állapotváltozóit is fel kell használni. A független állapotváltozók kiválasztásához a hálózat gráfjában a következő fát vesszük fel:

Fa élei

- \forall feszültséggenerátor;
- lehetséges max. sok kapacitás;
- lehetséges max. sok távvezeték vég feszültségkapu ($\mathbf{Y}(t)$ -leírásban);
- maradék induktivitás, távvezeték végződés ($\mathbf{Z}(t)$) és ellenállás.

Kötőélek

- \forall áramgenerátor;
- lehetséges max. sok induktivitás;
- lehetséges max. sok távvezeték vég áramkapu ($\mathbf{Z}(t)$ -leírásban);
- maradék kapacitás, távvezeték végződés ($\mathbf{Y}(t)$) és ellenállás.

Az adott felsorolás a fa- és kötőélek megállapításához egyben prioritásszabályt is jelent.

2.2.1. Független állapotváltozók esete

A hálózat nem tartalmaz kapacitás–feszültséggenerátor–távvezeték (feszültségtípusú) hurkot és induktivitás–áramgenerátor–távvezeték (áramtípusú) vágatot. Feltesszük, hogy a vezérelt generátorok nem okoznak ellentmondásokat, ill. a vezérlési paraméter értékétől függő állapotváltozós szám-változásokat. x -szel jelöljük a koncentrált paraméterű, ϑ -vel pedig a feszültségekből, ill. áramokból álló, a távvezetékekhez tartozó állapotváltozókat. x -hez y , ϑ -hoz η vektor jelentse a konjugált kapuváltozókat (a lineáris memóriamentes hálózat szempontjából, melynek az x és ϑ változókkal rendelkező kapukat nyitottuk).

A lineáris, memóriamentes hálózat hibridkapuleírása:

$$-y = \mathbf{H}_{11}x + \mathbf{H}_{12}\vartheta + \mathbf{B}_1u, \quad (39a)$$

$$-\eta = \mathbf{H}_{21}x + \mathbf{H}_{22}\vartheta + \mathbf{B}_2u, \quad (39b)$$

(u a gerjesztések vektora).

Az eszközegegyenletek most az

$$y = \mathbf{C}(x)\dot{x} + \mathbf{F}(x) \quad (40a)$$

és

$$\eta(t) = \mathbf{A}(t) * \vartheta(t), \quad (40b)$$

alakot öltik.

(39) és (40) összevetésével a Csurgay [4] által adott állapotegyenlet:

$$\dot{x}(t) = -\mathbf{C}^{-1}(x)[\mathbf{H}_{11}x(t) + \mathbf{F}(x) + \mathbf{H}_{12}\vartheta(t) + \mathbf{B}_1u(t)], \quad (41a)$$

$$-\mathbf{A}(t) * \vartheta(t) = \mathbf{H}_{21}x(t) + \mathbf{H}_{22}\vartheta(t) + \mathbf{B}_2u(t), \quad (41b)$$

kezdeti feltétel: $t \leq t_0$ -ra a hálózat energiamentes.

A (41) állapotegyenlet most egy közönséges differenciálegyenletből, valamint egy konvolúciós egyenletből tevődik össze, tehát egyszerűbb alakú, mint az általános retardált funkcionál differenciálegyenlet.

A Valtonen-féle modelleket alkalmazva a (40b) eszközegegyenlet helyett (mely az elosztott paraméterű elemeket írja le), a következő, redundáns (nem állapotegyenlet) leíróegyenletet kapjuk:

$$\dot{x}(t) = -\mathbf{C}^{-1}(x)[\mathbf{H}_{11}x + \mathbf{F}(x) + \mathbf{H}_{12}\vartheta + \mathbf{B}_1u(t)], \quad (42a)$$

$$-\mathbf{H}_0(t) * \vartheta(t) - 2\mathbf{G}(t) * \mathbf{T}z(t) = \mathbf{H}_{21}x + \mathbf{H}_{22}\vartheta + \mathbf{B}_2u(t), \quad (42b)$$

$$z(t) = \mathbf{H}_0(t) * \vartheta(t) + \mathbf{G}(t) * \mathbf{T}z(t). \quad (42c)$$

Itt a \mathbf{H}_0 , \mathbf{G} \mathbf{T} és z jelentése a következő:

Az Y -típusú Valtonen-féle modellben

$$i(t) = \begin{bmatrix} \overbrace{Y_0(t)}^{y_0(t)} & 0 \\ 0 & \overbrace{Y_0(t)}^{y_0(t)} \end{bmatrix} * u(t) + 2 \begin{bmatrix} \overbrace{-g(t)}^{g(t)} & 0 \\ 0 & \overbrace{-g(t)}^{g(t)} \end{bmatrix} * \mathbf{T}j(t),$$

$$j(t) = \mathbf{Y}_0(t) * u(t) + \mathbf{G}(t) * \mathbf{T}j(t),$$

írható, ahol

$$u = (u_1, u_2)^T, \quad i(t) = (i_1, i_2)^T, \\ g(t) = \mathcal{L}^{-1}e^{-d\gamma(x)}, \quad j(t) = (j_a, j_b)^T, \quad (43a)$$

\mathbf{T} pedig a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alakú permutáló mátrix. A Z -típusú Valtonen-féle modellben

$$u(t) = \begin{bmatrix} \overbrace{Z_0(t)}^{z_0(t)} & 0 \\ 0 & \overbrace{Z_0(t)}^{z_0(t)} \end{bmatrix} * i(t) + 2 \begin{bmatrix} \overbrace{g(t)}^{g(t)} & 0 \\ 0 & \overbrace{g(t)}^{g(t)} \end{bmatrix} * \mathbf{T}e(t),$$

$$e(t) = \mathbf{Z}_0(t) * i(t) + \mathbf{G}(t) * \mathbf{T}e(t),$$

írható, ahol

$$u(t) = (u_1, u_2)^T, \quad i(t) = (i_1, i_2)^T, \quad (43b)$$

és $g(t) = \mathcal{L}^{-1}e^{-d\gamma(x)}$, \mathbf{T} pedig az előbbi permutálómátrix, $e(t) = (e_a, e_b)^T$. $\vartheta(t)$ -be foglaltuk össze az \mathbf{Y} -leírás u_i -kapufeszültségeit, ill. a \mathbf{Z} -leírás i_j kapuáramait, míg $z(t)$ -ben az i_a, i_b , ill. u_a, u_b változókat helyeztük el, még hozzá úgy, hogy i_1 -gyel azonos indexű helyen i_a, i_2 -vel azonos helyen pedig i_b szerepelt stb. $\mathbf{H}_0(t)$ a $Z_0(t)$, ill. $Y_0(t)$ mennyiségekből álló diagonálmátrix, $\mathbf{G}(t)$ pedig a $\pm g(t)$ mennyiségekből álló diagonálmátrix ((-) előjel az Y -leírású modelleknél).

A (42) leíróegyenlet ismét a (41) állapotegyenlettel rokon, közönséges differenciálegyenletből és konvolúciós egyenletből áll.

2.2.2. Független állapotváltozók esete

A már ismertett fa-konstrukció prioritásszabályainak figyelembevételével particionáljuk a koncentrált paraméterű x állapotváltozókat a független x_1 , és a kifejezett x_2 állapotváltozókra, hasonlóan az elosztott paraméterű elemek ϑ állapotváltozóit ϑ_1 független, és ϑ_2 függő változókra.

Az állapotváltozók közti topológiai összefüggések:

$$x_2 = \mathbf{L}_{xx}x_1 + \mathbf{L}_{xu}u, \quad (44a)$$

$$\vartheta_2 = \mathbf{L}_{\vartheta x}x_1 + \mathbf{L}_{\vartheta 1}\vartheta_1 + \mathbf{L}_{\vartheta u}u, \quad (44b)$$

(ahol $\mathbf{L}_{x1} = \mathbf{0}$ a fa konstrukciója miatt).

Az eszközegegyenletek legyenek az alábbiak:

$$y_1 = \mathbf{C}_1(x_1)\dot{x}_1 + \mathbf{F}_1(x_1), \quad (45a)$$

$$y_2 = \mathbf{C}_2(x_2)\dot{x}_2 + \mathbf{F}_2(x_2), \quad (45b)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(t) & \mathbf{A}_{12}(t) \\ \mathbf{A}_{21}(t) & \mathbf{A}_{22}(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \vartheta_1(t) \\ \vartheta_2(t) \end{pmatrix}, \quad (45c)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(t) & \mathbf{A}_{12}(t) \\ \mathbf{A}_{21}(t) & \mathbf{A}_{22}(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \vartheta_1(t) \\ \vartheta_2(t) \end{pmatrix}, \quad (45d)$$

ahol

$$y_1, y_2, \eta_1, \eta_2 \text{ az } x_1, x_2, \vartheta_1, \vartheta_2,$$

kapuváltozókhöz tartozó konjugált kapuváltozók.

A lineáris rezisztív hálózat — melyből a nemlineáris eszközöket és a távvezetéseket kiemeltük — hibrid-kapuleírása:

$$-y_1 - P_{11}y_2 - P_{12}\eta_2 = R_{11}x_1 + R_{12}\vartheta_1 + B_1u, \quad (46a)$$

$$-\eta_1 - P_{21}y_2 - P_{22}\eta_2 = R_{21}x_1 + R_{22}\vartheta_1 + B_2u. \quad (46b)$$

Belátható, hogy $P_{21} = 0$.

(44), (45) és (46) figyelembevételével az állapotegyenlet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -[C_{11}(x_1) + P_{11}C_2(x_2)]_{x_2=L_{xx}x_1 + L_{xu}u} \cdot L_{xx}^{-1} \times \\ & \times \{P_{12}A_{21}(t) * \vartheta_1(t) + P_{12}A_{22}(t) * [L_{ix}x_1(t) + L_{iu}\vartheta_1(t) + \\ & + L_{iu}u(t)] + R_{11}x_1 + B_{12}\vartheta_1 + F_1(x_1) + \\ & + P_{11}F_2(x_2)|_{x_2=L_{xx}x_1 + L_{xu}u} + B_1u(t) + \\ & + P_{11}C_2(x_2)|_{x_2=L_{xx}x_1 + L_{xu}u} \cdot L_{xu}\dot{u}(t)\}, \end{aligned} \quad (47a)$$

$$\begin{aligned} -A_{11}(t) * \vartheta_1(t) - A_{12}(t) * [L_{ix}x_1(t) + L_{iu}\vartheta_1(t) + \\ + L_{iu}u(t)] - P_{22}A_{21}(t) * x_1(t) - P_{22}A_{22}(t) * [L_{ix}x_1(t) + \\ + L_{iu}\vartheta_1(t) + L_{iu}u(t)] = R_{21}x_1(t) + R_{22}\vartheta_1(t) + B_2u(t). \end{aligned} \quad (47b)$$

A 2.2.1.-ben követett módon vezethető le a kicsit bonyolultabb leíróegyenlet is, melyben a Valtonen-féle modellt alkalmazzuk.

Erre a leíróegyenletre, ill. a (47) állapotegyenletre a következő jellemző tulajdonság érvényes.

A leíróegyenlet általános alakja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & f_1(x_1(t), \vartheta_1(t), u(t), \dot{u}(t), Q_1(t) * x_1(t), \\ & Q_2(t) * \vartheta_1(t), Q_3(t) * u(t)), \end{aligned} \quad (48a)$$

$$\begin{aligned} L(x_1(t), \vartheta_1(t), u(t), Q_4(t) * x_1(t), \\ Q_5(t) * \vartheta_1(t), Q_6(t) * u(t)) = 0, \end{aligned} \quad (48b)$$

ahol L a felsorolt mennyiségek lineáris kombinációját jelenti.

A (48) egyenlet érdekes tulajdonsága, hogy a koncentrált paraméterű elemek $x_1(t)$ állapotváltozói és az $u(t)$ gerjesztés is megjelenik a konvolúcióban, nemcsak az elosztott paraméterű elemek $\vartheta_1(t)$ változói. A (48) egyenlet egy retardált típusú funkcionál-differenciálegyenlet, melyben a retardálás a konvolúción keresztül érvényesül az x_1 állapotváltozókra.

3. Koncentrált—elosztott paraméterű hálózatok tranziens analizisére szolgáló program algoritmusa — realizált programok

3.1. Az algoritmus ismertetése

Az alábbiakban röviden vázoljuk a diszperziómentes, illetve a diszperziós távvezeték szakaszokat tartalmazó, nemlineáris, koncentrált paraméterű hálózatok tranziens analizisére szolgáló program algoritmusát.

A tranziens analizisprogram főbb lépései az alábbiak:

- Adatbevitel, ellenőrzés;
- A kezdeti és határfeltétel típusú ellentmondá-

sok felderítésére szolgáló topológiai vizsgálatok;

- Állapotegyenlet automatikus előállítás;
- Kezdeti feltételek meghatározása DC-analízissel (opcionális: energiamentes kezdeti feltétel esetén elmarad);
- Állapotegyenlet numerikus megoldása;
- Outputok kiszámítása az állapotváltozók időfüggvényeiből.

A felsorolt lépések közül itt csak az állapotegyenlet automatikus előállítására koncentrálunk, ez ugyanis az egyik legalapvetőbb algoritmikus kérdés. A másik igen fontos lépéssel, a numerikus megoldással itt nem foglalkozunk, csupán az irodalomra utalunk.

Az állapotegyenletben vannak az állapottól függő, valamint azoktól független mennyiségek. Az állapottól függő tagokat minden egyes időlépésben újra kell értékelni. Az állapottól független mennyiségek előállítását csak egyszer kell elvégezni. Ezek a mennyiségek a nemlineáris elemek, távvezeték szakaszok és a reaktanciák kiemelése után visszamaradó lineáris, memóriamentes (rezisztív) hálózat hibrid n -kapu mátrixa (H és B , ill. a függő állapotváltozók esetén \tilde{B} és \tilde{B}). Diszperziós esetben a távvezeték szakaszok állapotváltozói a kapuimmittancialeírás miatt feszültségek vagy áramok, azaz u és i változókhöz tartozó hibrid n -kapu mátrixok automatikus előállítása a feladat. Kicsit bonyolultabb a helyzet diszperziómentes távvezeték szakaszok esetén. Ekkor olyan H és B , ill. \tilde{R} és \tilde{B} hibridkapu-mátrixokat kell előállítani, ahol a koncentrált paraméterű kiemelt elemek csatlakoztatásánál feszültség — vagy áramkapuk szereplnek, viszont a távvezeték leírása azok reflexiós mátrixával történik, így ezeknél a csatlakozó kapuknál a távvezeték Z_{oi} hullámellenállásaira normalizált beeső hullámok (a lineáris memóriamentes hálózat szempontjából) jelentik a primer kapuváltozókat. Ennek érdekében első lépésben minden helyen (a távvezeték végződéseknél is) feszültség- vagy áramkapukat nyitunk, majd az így kapott \tilde{H} és \tilde{B} hibridmátrixokról lineáris transzformációval áttérünk a végső, H és B hibridmátrixokra (ugyanígy \tilde{R} és \tilde{B} esetén is).

A távvezeték végeknél átmenetileg nyitott feszültség- v. áramkapukkal kapcsolatosan a következő megjegyzést kell tennünk. Mivel e kapuk végső változói az a_i beeső és b_i reflektált hullámok, teljesen érdektelen, hogy e kapuknak a \tilde{H} , \tilde{B} leírásban átmenetileg feszültség- vagy áramkapukat nyitunk-e. Ezért a távvezeték végeket egy-egy ellenállással helyettesítjük a hálózat gráfjának felvételekor. A gráfnak egy olyan fáját konstruáljuk meg, ahol minden feszültséggenerátor a fában van, lehető max. sok kapacitás ugyancsak a fában, ezzel szimultán minden áramgenerátor a kötőelem közé kerül és lehetséges max. sok induktivitás is. A maradék ellenállásokat az ilyen kombinatorikai algoritmus vagy a fába, vagy a kötőelem közé helyezi el. Ezzel a fába került — ellenállással helyettesített — távvezeték végeket feszültségkapuval, a kötőelem közt szereplőket pedig áramkapukkal vesszük figyelembe.

Végül ismertetjük azokat a transzformációs formulákat, melyekkel az átmeneti feszültség-, ill. áram-

kapukról (\check{H} , \check{B} -leírás) áttérünk a távvezetéseknél az a , b változókra (\check{H} , \check{B} -leírás).

Az alkalmazott transzformáció:

$$a = \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}} u + \frac{1}{2} Z_0^{\frac{1}{2}} i, \quad (49a)$$

$$b = \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}} u - \frac{1}{2} Z_0^{\frac{1}{2}} i. \quad (49b)$$

Az összefüggéseket az egyszerűség kedvéért csak a független állapotváltozók esetére írjuk fel, azonban minden további nélkül átvihetők a függő állapotváltozók esetére is:

$$y = \left\{ \check{H}_{xx} - \check{H}_{xa} Z_0^{\frac{1}{2}} \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} + Z_0^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \check{H}_{ax} \right\} x + \left\{ \check{H}_{xa} Z_0^{\frac{1}{2}} \left[1_{aa} - \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} + Z_0^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \times \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} - Z_0^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \right\} a + \left\{ \check{B}_x - \check{H}_{xa} Z_0^{\frac{1}{2}} \times \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} + Z_0^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \check{B}_a \right\} u(t), \quad (50a)$$

$$b = - \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} + Z_0^{-\frac{1}{2}} \right) \check{H}_{ax} x - \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} + Z_0^{-\frac{1}{2}} \right) \times \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} - Z_0^{-\frac{1}{2}} \right) a - \left(\check{H}_{aa} Z_0^{\frac{1}{2}} + Z_0^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \check{B}_a u(t). \quad (50b)$$

(Itt 1_{aa} az (axa) -mértetű egységmátrix, $a = a$ távvezeték végződésének száma).

Foglalkoznunk kell még az eszközeqyenletek figyelembevételével, melynek eredményeképp az állapotegyenlet előáll.

Itt utalunk egy fontos technikára, mellyel a „kényelmetlen” áramkapuk átalakíthatók feszültségkapukká. A kiemelt eszköz és a lineáris memóriamentes hálózat közé 1:1-es ideális transzformátort iktatunk be, mely két kaszkádba kapcsolt girátorral helyettesíthető. A girátorok csatlakozásánál fellépő feszültséget vezetjük be az eredeti áramváltozó helyett. Az elvet a 3. ábra szemlélteti.

A távvezetékszakaszok áramkapuhoz való csatlakozása esetén az elmondottak szerint a lineáris, memóriamentes hálózat $i_{\text{kapu}} - u$ kapu jellemzőit és a távvezeték végződés $u_t - i_t$ jellemzőit, melyek kapcsolata $i_{\text{kapu}} = -i_t$, $u_{\text{kapu}} = u_t$, most két kaszkádba kapcsolt, G konstansú girátor választja el (4. ábra). A girátorok közti u_k kapufeszültség lesz az új kapuváltozó, melyre $u_k = \frac{1}{G} i_{\text{kapu}}$. Amikor áttérünk a távvezeték kapuknál az a , b változókra, akkor különbséget kell tennünk aszerint, hogy a távvezeték eredetileg áram- vagy feszültségkapuhoz csatlakozott-e.

Feszültségkapuhoz való csatlakozás esetén nem kell beiktatni a girátorokat, így a távvezeték α , β , ill. a rezisztív hálózatban nyitott kapu a , b beeső- és reflektált hullámainak kapcsolata:

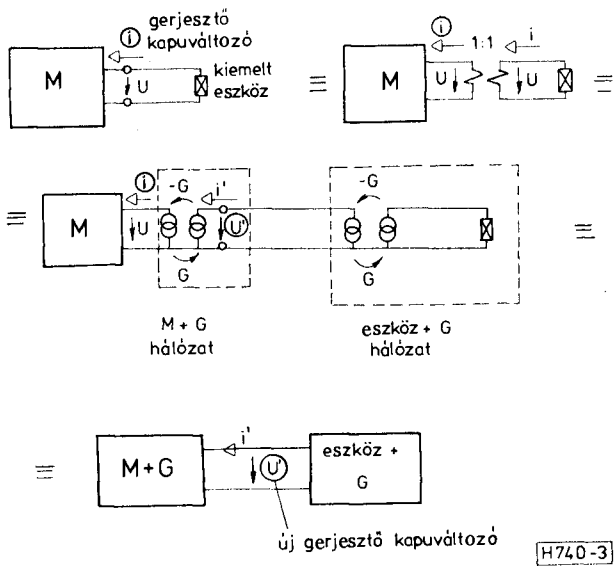
$$\begin{aligned} a &= \beta, \\ b &= \alpha. \end{aligned} \quad (51)$$

Áramkapu esetén a girátorok közbeiktatásával áttérünk feszültségkapura (u_k). Itt az a , b , ill. a távvezeték vég α , β változóinak kapcsolata bonyolultabb (lásd a 4. ábrát).

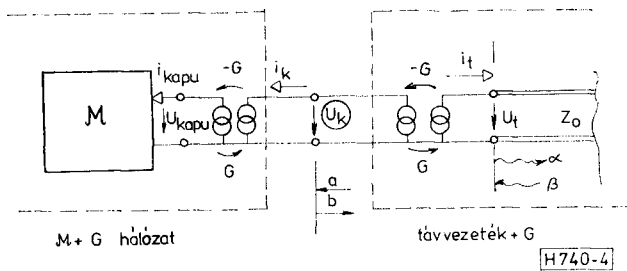
$$\left. \begin{aligned} Y_{11}(p) = Y_{22}(p) &= Y_0 \tau \frac{p + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}}{\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2}} \operatorname{cth} \left[\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2} \right], \\ Y_{12}(p) = Y_{21}(p) &= -Y_0 \tau \frac{p + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}}{\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2}} \frac{1}{\operatorname{sh} \left[\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2} \right]}. \end{aligned} \right\} \text{TM-módus}$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}(p) = Z_{22}(p) &= Z_0 \tau \frac{p + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}}{\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2}} \operatorname{cth} \left[\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2} \right], \\ Z_{12}(p) = Z_{21}(p) &= Z_0 \tau \frac{p + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}}{\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2}} \frac{1}{\operatorname{sh} \left[\tau \sqrt{\left(p + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \Omega_c^2} \right]}. \end{aligned} \right\} \text{TE-módus}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{GZ_0} + GZ_0 & \frac{1}{GZ_0} + GZ_0 \\ -\left(\frac{1}{GZ_0} + GZ_0\right) & -\left(-\frac{1}{GZ_0} + GZ_0\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (52)$$



3. ábra



4. ábra

alakú lesz. $G = \frac{1}{Z_0}$ választással

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (53)$$

adódik. Algoritmikus szempontból az azt jelenti, hogy a távvezeték egyenleteket összevetve a lineáris, rezisztív hálózat leírásával, (51) és (53) relációkat kell figyelembe venni.

Végezetül röviden foglalkoznunk kell a diszperziós távvezeték szakaszokat tartalmazó hálózatok esetével. Ekkor a változók feszültségek, ill. áramok így a \bar{H} , \bar{B} , ill. \bar{R} , \bar{G} hibridmátrixokon nem kell további transzformációt végezni. Az áramkapukat azonban itt is átalakítjuk a 3. ábrán bemutatott elv alapján feszültségkapukká. A $Z(t)$ leírású diszperziós távvezeték szakasz két végéhez egy-egy girátort téve, olyan feszültségváltozós leírás adódik, melyben

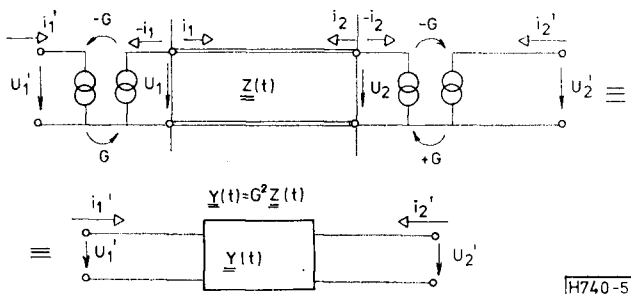
$$Y(t) = G^2 Z(t), \quad (54)$$

(lásd: 5. ábra).

A numerikus eljárásokról szólva annyit állapíthatunk meg, hogy eltekintve a diszperziómentes elemeket tartalmazó hálózatok esetétől, mindig valamilyen implicit integráló eljárás (a differenciálegyenlet megoldására) és egy numerikus integrálszámoló eljárás (a konvolúciós integrál kiértékelésére) ötvözetete jelenti az alkalmazott numerikus módszert. Re-

tarált differenciálegyenletek numerikus megoldására találhatunk ismertetőt a Schmitt által kiadott cikkgyűjteményben [23].

A 2. pontban ismertettük a diszperziómentes távvezeték szakaszokat tartalmazó hálózatok állapot egyenleteit, melyek lényegében közönséges differenciálegyenletek megoldására vezetnek, melyekhez már ismert az $\alpha(t-\tau)$ távvezeték-változó. Numerikus szempontból $\alpha(t-\tau)$ -t a tárolt, diszkrét t_i múltbeli időpillanatokból lineáris interpolációval célszerű meghatározni, míg a differenciálegyenletet implicit integráló eljárással oldjuk meg. A TKI-ban kidolgozott, numerikus implicit integráló programcsomagot ismerteti Kovács Zs. és Kovács Zs.-né [24].



5. ábra

3.2. Kidolgozott programok

Hazai viszonylatban koncentrált-elosztott paraméterű hálózatok időtartománybeli analizésére a TKI-ban kerültek kidolgozásra programok.

Ilyen programok az ANAL-19 [25] és az ANAL-18 [2] jelűek, melyek diszperziómentes távvezeték szakaszokat kezelnek, a 2. pontban ismertetett állapot egyenlet és a 3. pontban leírt algoritmus realizálásaképp. Az ANAL-18 program továbbfejlesztett változata az ANAL-19-nek, építőelemkészletében bővebb. Az ANAL-19 csak bipoláris tranzisztorokat és diódákat enged meg nemlineáris elemként, míg az ANAL-18 programba MOS-modellt is beépítettünk, ezenkívül a felhasználó által FORTRAN-IV nyelven megírt szubrutinok formájában 1-, 2- és 3-kapu modellek is beépíthetők a programba.

Az említett ANAL-18 és ANAL-19 programokat a svéd LM Ericsson cég is megvásárolta és alkalmazza.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Dr. Csurgay Árpádnak, dr. Roska Tamásnak és Uzsoky Miklósnak, akik segítségével lehetővé tette e dolgozat elkészülését.

I R O D A L O M

- [1] Csurgay Á.: Számítógépek az elektronika alkatrészeinek és áramköröknek kutatásában, TKI Évkönyv, 1975., II. köt., 47-78.
- [2] Adorján P., Orosz J.: Az ANAL-18 program felhasználói dokumentációja: Bipoláris és MOS diszkrét tranzisztorokat tartalmazó áramkörök tranziens analizise, TKI-1-78-942-5, Bp. 1978.

- [3] *Branin, F. H. Jr.*: Transient Analysis of Lossless Transmission Lines, Proc. IEEE, Vol. 55, Nov. 1967, p. 2012.
- [4] *Csurgay Á.*: A lineáris elosztott paraméterű hálózatok elméletének néhány problémája, Doktori értekezés, MTA, Bp. 1971.
- [5] *Garrett, S. J.*: Transmission Line Models for Transient Analysis, ACM—IEEE Conf. of the 11th Design Automation Workshop, June, 1974, Proc., pp. 209—215.
- [6] *Bowers, H. C., Sedore, S. R.*: SCEPTRE: A Computer Programme for Circuit and System Analysis, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1968.
- [7] *Bálint L.*: Inhomogén keresztmetszeti dielektromos kitöltésű többvezetős tápvonalak hálózati modellezése, Kandidátusi értekezés, MTA, Bp. 1975.
- [8] *Bálint L.*: On the Circuit Modelling of Single and Multi-conductor Microstrip Lines, Proc. of the VI-th Colloquium on Microwave Communication, MICROCOLL, Bp. 1978.
- [9] *Ghaussi, M.—Kelly, J.*: Introduction to Distributed-Parameter Networks with Application to Integrated Circuits, Holt, Reinhart and Winston Inc., N. Y., 1968.
- [10] *Valtonen, M.*: Computer-Aided Analysis of Mixed Lumped and Distributed Circuits in Time Domain, Proc. of the Conf. IEEE—CAS, New York, 1978, pp. 762—766.
- [11] *Chua, L. O.—Lin, P. M.*: Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques, Prentice-Hall, Inc., N. J. 1975.
- [12] *Friedman, A.*: Generalized Functions and Partial Differential Equations, Prentice-Hall Inc., N. J., 1963.
- [13] *Zemanian, A. H.*: Generalized Integral Transformations, Interscience Publ., N. Y., 1968.
- [14] *Chua, L. O.—Lam, Y.—Stroscoe, K.*: Qualitative Properties of Resistive Networks Containing Multiterminal Nonlinear Elements, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, Memo. ERL—M575, 1975.
- [15] *Csurgay Á.—Markó Sz.*: Mikrohullámú passzív hálózatok, Tankönyvkiadó, Bp. 1965.
- [16] *Magnus, W.—Oberhettinger, F.*: Formeln und Sätze für die Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin, 1943.
- [17] *Adorján P.*: Lineáris elosztott paraméterű és nemlineáris koncentrált paraméterű elemeket tartalmazó hálózatok időtartománybeli és egyenáramú analízise. Kandidátusi értekezés, Bp. 1980.
- [18] *Ho, C. W.*: Time-Domain Sensitivity Computation for Networks Containing Transmission Lines, IEEE Trans. on CT, CT—18/1, 1971.
- [19] *Csurgay Á.*: Transient Analysis of Lumped-Distributed Networks: The State-Space approach, Annual of the Research Institute for Telecommunication, 1973., Bp., pp. 161—167.
- [20] *Hale, J.*: Functional Differential Equations, Berlin, Springer Verlag, 1971.
- [21] *Csurgay Á.—Recski A.—Kovács Zs.*: On the Transient Analysis of Lumped-Distributed Nonlinear Networks, Az V. MICROCOLL Konferencián elhangzott előadás anyaga, Bp. 1974.
- [22] *Roska T.*: Koncentrált paraméterű hálózatok néhány problémájáról, Kandidátusi értekezés, MTA, Bp. 1973.
- [23] *Cryer, C. W.*: Numerical Methods for Functional Differential Equations; K. Schmitt (editor): Delay and Functional Differential Equations and Their Applications című könyvében; pp. 17—103., Acad. Press, Inc. 1972.
- [24] *Kovács Zs.—Kovács Zs.-né*: Stiff differenciálegyenletrendszer és differenciálalgebrai egyenletrendszer megoldása, TKI—1—72—341—1, 1972. TKI Tanulmány.
- [25] *Adorján P.—Nagygyörgy I.-né—Kovács Zs.*: Koncentrált és elosztott paraméterű áramkörök tranziens analízise; Az ANAL—19 jelű programcsomag felhasználói dokumentációja, TKI—1—77—942—3, TKI Tanulmány, 1977.