

A nulladrendű tartóáramkör átviteli függvényének alakulása, ha a tartási időszakban a lezárás nem veszteségmentes

VÖRÖS ANDRÁS
Műszeripari Kutatóintézet

Az alábbiakban vizsgálat tárgyává tesszük azt az esetet, amikor a nulladrendű tartóáramkör lezárása eltér az ideális viszonyoktól, és nem végtelen nagy. Sok alkalmazásnál a tartóáramkör mintavételező áramkörrel együtt nyer alkalmazást.

A mintavételezés során az időben folyamatos jelből időben diszkrét jelsorozatot állítunk elő. Az esetek nagy számában a mintavételezés azonos időközönként történik. Ez az úgynevezett koherens mintavételezés. A jelfeldolgozási módok egy része megkívánja a mintavételezett jeltől a jel visszaállítását.

A mintavételező áramkör lényegében ideális kapcsoló áramkörnek tekinthető, amely T időközönként a T időtartamhoz képest elenyészően rövid időre (Δt) zár (a kapcsoló áramkör az 1. ábrán látható).

A mintavételezés ilyen módon egy olyan impulzusmoduláció, ahol a kimeneten kapott $X^*(t)$ jelsorozatot az $X(t)$ bemeneti jel és az $s(t)$ kapcsolójel szorzata:

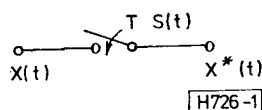
$$X^*(t) = X(t) \cdot s(t).$$

A kimenetben kapott $X^*(t)$ jelsorozat amplitúdója a $T, 2T, \dots, nT$ időpontokban megegyezik a bemeneti $X(t)$ jel amplitúdójával, és Δt időtartamig követi a bemenőjel változását, egyébként értéke zérus. Ezt a 2. ábra mutatja.

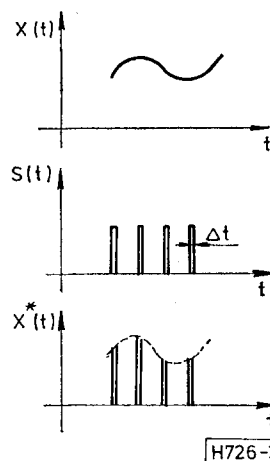
Az impulzussorozatból a jel helyreállítása alapvetően extrapolációval történik. Az extrapolált jel nT és $(n+1)T$ időpontok közötti értéke függ az előző mintavételi időpontokban felvett értékétől $[nT, (n-1)T, (n-2)T, (n-3)T, \dots]$. Az $X(t)$ jel nT és $(n+1)T$ közötti értékét $[X_n(t)]$ az előző mintavételi időpontokbeli értékének ismeretében hatványsorral közelíthetjük:

$$X_n(t) = X(nT) + X'(nT)(t-nT) + \frac{X''(nT)}{2!}(t-nT)^2 + \dots + \frac{X^{(m)}(nT)}{m!}(t-nT)^m + \dots$$

A közelítés mértéke elvileg annál jobb, minél több tagot figyelembe tudunk venni a sorból. Mivel azonban a numerikus számítás során a deriváltakat a korábbi mintavételi értékek első, második, n -edik kü-



1. ábra Ideális mintavételező



2. ábra. Ideális mintavételezés során keletkező impulzussorozat

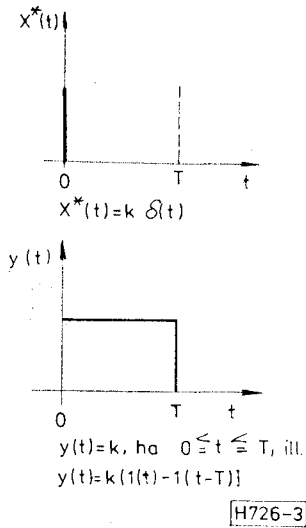
lönbségéből lehet számítani, ezért a magasabb rendű deriváltak korábbi időpontokra vonatkoznak, így a közelítés egy bizonyos fokszám felett már kifejezetten romlik.

Az áramköri megvalósítás különböző eseteiben műszaki okokból csak néhány tag figyelembevétele lehetséges.

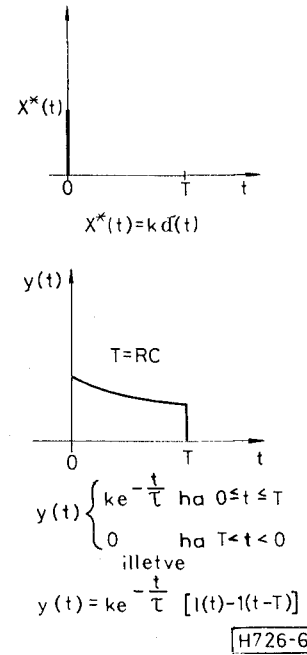
A tagszám szerint e deriváltakra figyelemmel nulladrendű tartóáramkör az, amely az $X_n(t) = X(nT)$ esetet valósítja meg, elsőrendű az, amelyik az $X_n(t) = X(nT) + X'(nT)(t-nT)$ esetet stb.

A felmerülő áramkör-megvalósítási nehézségek miatt a gyakorlati esetek nagy számában a nulladrendű tartó nyer alkalmazást. A sorból a magasabbrendű tagok elmaradásának az a következménye, hogy a helyreállított jel amplitúdója és fázisa az eredeti értéktől el fog térni. Ez az eltérési hiba részben az extrapoláció fokától (rendűségétől), részben a mintavételezett jel adott időtartamára (pl. periódusidejére) eső minták számától függ.

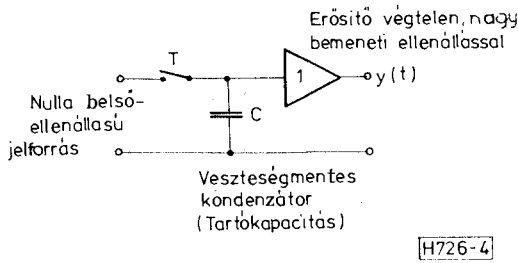
Beérkezett: 1980. III. 5.



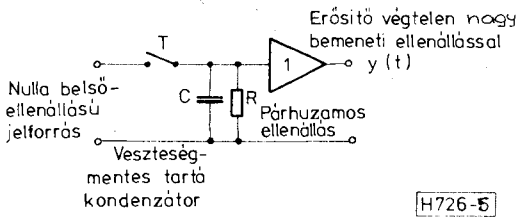
3. ábra. A nulladrendű tartó időtartománybeli viszonyai. Bemeneti impulzus $[X^*(t)]$ és a tartó kimeneti jele a $0 \leq t \leq T$ időintervallumban



6. ábra. Párhuzamos ellenállást is tartalmazó nulladrendű tartóáramkör időtartománybeli viselkedése (T a mintavételi periódus)



4. ábra. Ideális nulladrendű tartóáramkör



5. ábra. Nulladrendű tartó kapcsolása, ha a tartókapacitással párhuzamosan véges nagyságú ellenállás helyezkedik el

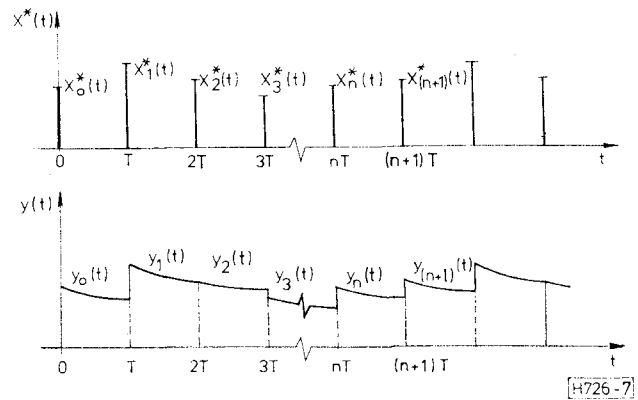
Nulladrendű tartó időbeli viszonyai a 3. ábra szerinti. Az ábrán $1(t)$ -vel a t időpontban bekövetkező egységugrás függvényét jelöltük.

A számításnál Dirac-impulzust alkalmazunk, amely a számítási eredményt könnyebben teszi elérhetővé és alkalmazása $T \gg \Delta t$ esetén megengedhető.

A tartó tehát a mintavétel időpillanatában fellépő jelértéket megtartja a következő mintavétel idejéig. Ez a 4. ábra szerint áramköri felépítéssel valósítható meg.

A gyakorlati esetekben nem érhető el sem a forrás nulla belső ellenállása, sem a tartókapacitást követő fokozat végtelen bemeneti ellenállása, illetve a tartókapacitás veszteségmentessége.

Jelen vizsgálat a tartókondenzátorral párhuzamosan elhelyezkedő esetleges véges nagyságú ellenállás



7. ábra. A nulladrendű tartóáramkör bemeneti és kimeneti jelsorozatai, ha a tartókapacitással párhuzamosan véges értékű ellenállás helyezkedik el

hatására terjed ki. A vizsgált áramkör felépítését az 5. ábra szemlélteti. Az időtartománybeli kép ez esetben a 6. ábrán látható módon alakul.

A tartóáramkör átviteli függvénye a tartóáramkör bemeneti és kimeneti időfüggvénye Laplace-transzformáltjának hányadosával képezhető.

A bemeneti és kimeneti jelsorozatot a 7. ábra mutatja. A tartóáramkör bemeneti időfüggvénye, és azok Laplace-transzformáltja:

$$\begin{aligned} X_0^*(t) &= K_0 \delta(t), & X_0^*(s) &= K_0, \\ X_1^*(t) &= K_1 \delta(t-T), & X_1^*(s) &= K_1 e^{-Ts}, \\ X_2^*(t) &= K_2 \delta(t-2T), & X_2^*(s) &= K_2 e^{-2Ts}, \\ &\dots & &\dots \\ X_n^*(t) &= K_n \delta(t-nT), & X_n^*(s) &= K_n e^{-nTs}. \end{aligned}$$

A bemeneti jel a T szakaszokra eső függvények összege:

$$X^*(t) = X_0^*(t) + X_1^*(t) + X_2^*(t) + \dots + X_n^*(t) + \dots = \sum_{n=0}^N K_n \delta(t - nT),$$

és e sor Laplace-transzformáltja:

$$X^*(s) = X_0^*(s) + X_1^*(s) + X_2^*(s) + \dots + X_n^*(s) + \dots = \sum_{n=0}^N K_n e^{-nTs}.$$

A tartóáramkör T szakaszokra eső kimeneti időfüggvényei és azok Laplace-transzformáltjai:

$$y_0(t) = K_0 e^{-\frac{t}{\tau}} [1(t) - 1(t-T)],$$

$$Y_0(s) = \frac{K_0 \tau}{1 + \tau s} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} e^{-Ts}\right)$$

$$y_1(t) = K_1 e^{-\frac{t-T}{\tau}} [1(t-T) - 1(t-2T)],$$

$$Y_1(s) = \frac{K_1 \tau}{1 + \tau s} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} e^{-Ts}\right) e^{-Ts}$$

$$y_2(t) = K_2 e^{-\frac{t-2T}{\tau}} [1(t-2T) - 1(t-3T)],$$

$$Y_2(s) = \frac{K_2 \tau}{1 + \tau s} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} e^{-Ts}\right) e^{-2Ts}$$

$$y_n(t) = K_n e^{-\frac{t-nT}{\tau}} [1(t-nT) - 1(t-(n+1)T)],$$

$$Y_n(s) = \frac{K_n \tau}{1 + \tau s} \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} e^{-Ts}\right] e^{-nTs},$$

ahol $\tau = RC$.

A kimeneti jel a T szakaszokra eső időfüggvények összege:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t) + \dots = \sum_{n=1}^N K_n e^{-\frac{t-nT}{\tau}} \{1[t-nT] - 1[t-(n+1)T]\},$$

és a sor Laplace-transzformáltja:

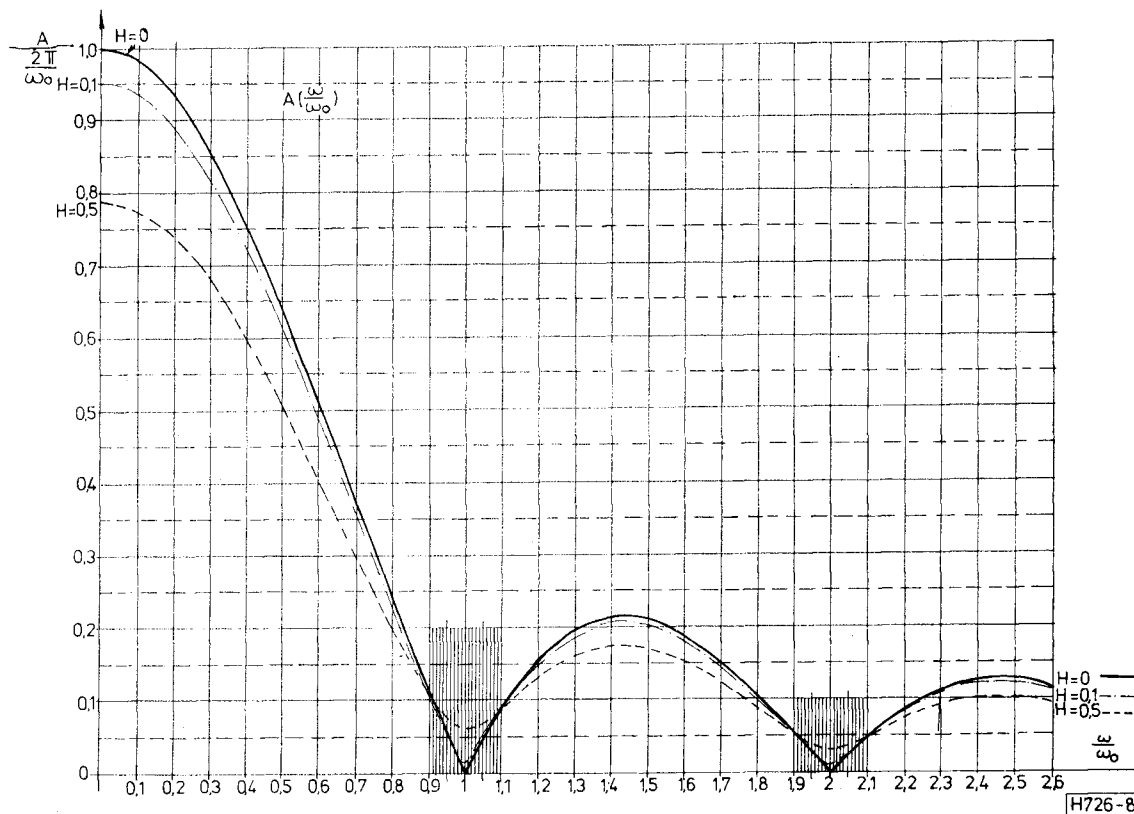
$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s) + \dots = \frac{\tau}{1 + \tau s} \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} e^{-Ts}\right] \sum_{n=1}^N K_n e^{-nTs}.$$

Az átviteli függvény a kimeneti jel és bemeneti jel Laplace-transzformáltjainak hányadosa:

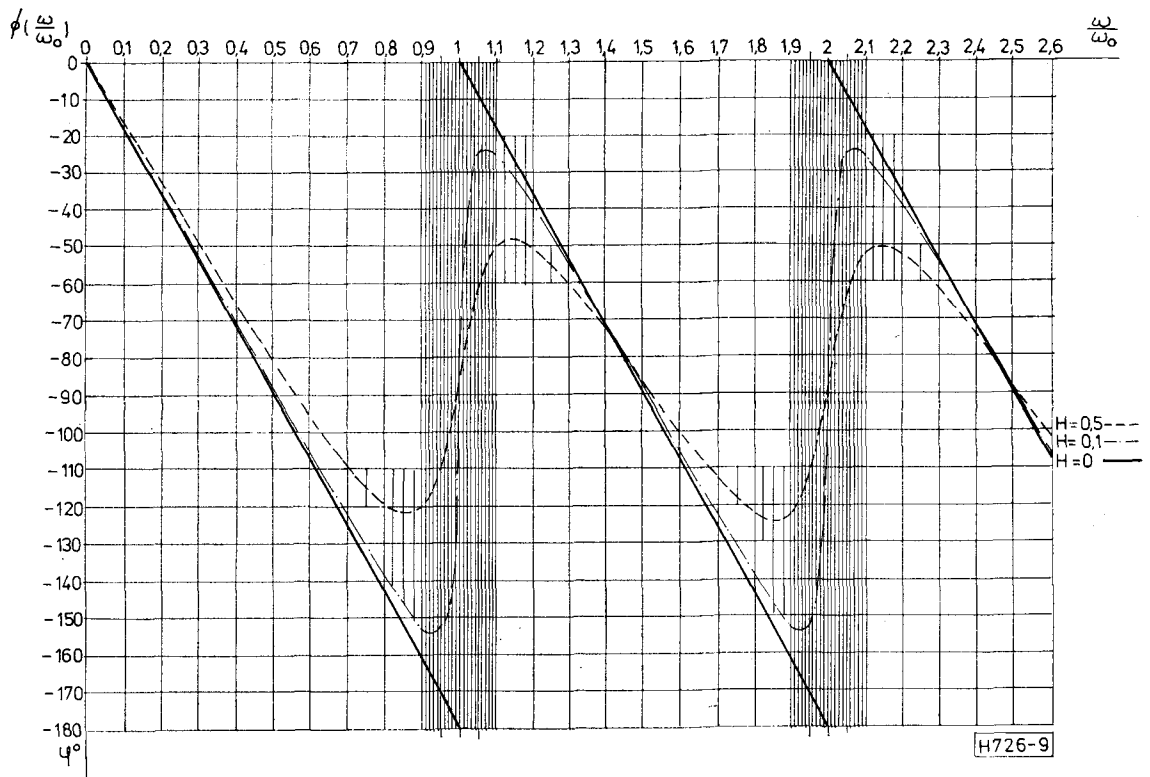
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\tau}{1 + \tau s} \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} e^{-nTs}\right].$$

Az $s = j\omega$ helyettesítéssel és T -re normálva az alábbi összefüggéseket kapjuk:

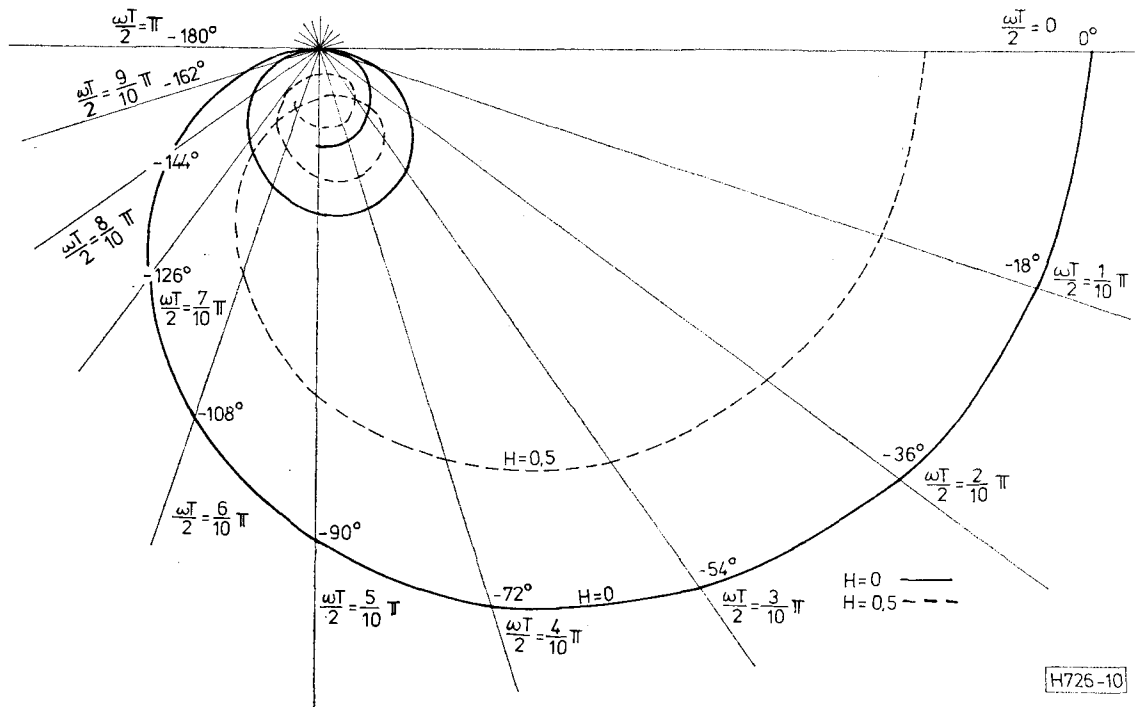
$$\frac{G(j\omega)}{T} = \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \left\{ \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \cos \omega T + \omega\tau e^{-\frac{T}{\tau}} \sin \omega T\right) \right\} + j \left[-\omega\tau + \omega\tau e^{-\frac{T}{\tau}} \cos \omega T + e^{-\frac{T}{\tau}} \sin \omega T \right].$$



8. ábra. Végtelen és véges ellenállással lezárt, nulladrendű tartóáramkör amplitúdómenete



9. ábra. Végtelen és véges ellenállással lezárt nulladrendű tartóáramkör fázismenete



10. ábra. Végtelen és véges ellenállással lezárt nulladrendű tartóáramkör átviteli függvényének polárdiagramja

A mintavételi periódusidőhöz (T) mintegy hiba (H) jelleggel a kisülési időállandót (τ) hasonlítva ($H = \frac{T}{\tau}$), valamint bevezetve a $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ kapcsolatot, az előző összefüggés az alábbi alakban írható:

$$G(j\omega) = \frac{1}{H} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi}{H} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \left[1 - e^{-H} \cos 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{2\pi}{H} \frac{\omega}{\omega_0} e^{-H} \sin 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right] + \right. \\ & \left. + j \left[-\frac{2\pi}{H} \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{2\pi}{H} \frac{\omega}{\omega_0} e^{-H} \cos 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} + e^{-H} \sin 2\pi \frac{\omega}{\omega_0} \right] \right\} = \\ & = A \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) e^{j\Phi \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}. \end{aligned}$$

E képletből H különböző értékeinél az amplitúdó- és fázismenetet számítógéppel kiszámolva a 8. és 9. ábrán levő karakterisztikák adódnak. A 10. ábra ugyanezeket polár-diagramban ábrázolja.

A karakterisztikákat tanulmányozva megállapítható, hogy végtelen lezáróellenállás esetében az amplitúdómenet az irodalomból ismert ($\sin x/x$) függvényt követi. A hozzá tartozó fázismenet azonban az irodalomban fellelhető megadási módoktól eltérően $\frac{\omega}{\omega_0}$ egészszámú értékeinél visszatér 0° -ra és onnan forogtat újra -180° -ig. A fázis ilyen menetét a polárdiagram is alátámasztja.

Véges lezáró ellenállás esetén a ($\sin x/x$) függvény amplitúdómenetének nullhelyei környezetében is van

átvitel, a jel amplitúdója nem válik nullává. A fázismenet szintén eltér, nem ugrik vissza 0° -ra, hanem az $\frac{\omega}{\omega_0}$ egész számú értékeinek a környezetében gyors változással ugyan, de csak közelíti az ideális menetet, majd ismét visszafelé kezd forogtatni. A polárdiagram az előzőekből adódóan e szakaszokon érdekes egymásba hurkolódó menetet mutat.

A gyakorlati esetek jelentős hányadában a szakadással történő lezárás nem valósítható meg, így az átviteli tulajdonságok alakulása ilyenkor a fenti menetet mutatja, eltérve az ideális viszonyoktól.

I R O D A L O M

- [1] *Haizman J.—Horváth G.—Szegei A.*: Fejezetek a digitális elektronikából. BME Villamosmérnöki kar Szakmérnöki Tagozat. A BME Továbbképző Intézetének kiadványa, V. 139. Tankönyvkiadó, Bp. 1975. 23—24. old.
- [2] *Benjamin C. Kuo*: Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs. N. J. 1963. 42—46. és 51—53. old.
- [3] *Julius T. Tou*: Digital and Sampled-data Control Systems. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. New York, Toronto, London, 1959. 127—136. old.