Boole-függvények optimalizálása véges antivalencia gyűrűben

NEMESSZEGHY GYÖRGY
Bánki Donát
Műszaki Főiskola

A digitális technikában fontos az, hogy Boole-függvényeket irredundáns alakra hozzunk. E dolgozat szerzőjének sikerült új, elegáns, jól programozható algoritmust kidolgoznia a sokismeretlenes Boole-függvények optimalizálására.

Véges antivalencia gyűrű

Gyűrűnek nevezzük az $R=(R, +, .)$ algebrai struktúrát, amelyben a „+" és „·" műveletek kétváltozósak, és amely „+"-ra Abel csoport és a „·"-ra pedig monoid, és érvényesek az $a(b+c)=ab+ac$, illetve $(a+b)c=ac+bc$ disztributív azonosságok minden $a, b, c \in R$-re.

Abel csoport (kommutatív csoport), olyan A halmaz, melynek „+" műveletére érvényes a kommutativitás és asszociativitás:

$$x+y=y+x, \quad x+(y+z)=(x+y)+z$$

Ezenkívül van olyan $0 \in A$ zéruselem, amelyre érvényesek az alábbi egyenlőségek:

$$x+0=0+x=x, \quad x+(-x)=(-x)+x=0$$

ahol $(-x)$ az x elem inverze.

Monoidnak nevezzük a $B(xy)=x \cdot y$ kétváltozós művelettel ellátott M halmazt, amelyben érvényes az asszociativitás:

$$x(y \cdot z)=(x \cdot y)z \quad \text{minden } x, y, z\ M\text{-re.}$$

Ezenkívül van olyan $1 \in M$ egységelem, amelyre az alábbi egyenlőség érvényes:

$$1 \cdot x=x \cdot 1=x \quad \text{minden } x \in M\text{-re.}$$

A fentiek és az [1]-es irodalom alapján a következőképpen definiáljuk a kétértékű, véges antivalencia gyűrűt:

Tegyük fel, hogy van $a, b, c, \ldots$ jel együttesünk, melynek elemei 0, illetve 1 értéket vehetnek fel. Ezenkívül létezik két binér művelet „0" és „.", valamint egy binér reláció: „=".

Akkor nevezhetjük a H halmazt antivalencia gyűrűnek, ha a következő axiómák teljesülnek:

AX1: Ha $a \in H$ és $b \in H$, akkor $a \oplus b \in H$
AX2: Ha $a \in H$ és $b \in H$, akkor $a \cdot b \in H$

A két művelet asszociatív:

AX3: $(a \oplus b) \oplus c=a \oplus (b+c)$
AX4: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$

Érvényes a kommutativitás

AX5: $a \oplus b=b \oplus a$
AX6: $a \cdot b=b \cdot a$

Létezik zérus elem és egység elem:

AX7: $a \oplus 0=a$; $a \cdot 1=a$

Disztributivitás:

AX8: $a \cdot (b \oplus c)=(a \cdot b) \oplus a \cdot c$

Végül:

AX9: $a \cdot a=a$
AX10: $a \oplus a=0$

Az **AX10** axiómából következik: $a=-a$, vagyis az „a" inverze önmagának.

A fenti tíz axióma egyértelműen definiálja az antivalencia $(\oplus)$ és konjukció (.) műveleteket. Ennek szemléltetésére az axiómák alapján felírjuk a két művelet táblát 2×2-es mátrix alakjában!

Antivalencia: Az **AX10** miatt a mátrix főátlójában csak „0" van. Az **AX5** miatt a mellékátló két eleme egyforma, és ez az **AX7** miatt csak „1" lehet.

$a \oplus b$	1	0
1	0	1
0	1	0

Konjunkció: **AX9** miatt a főátló: 1,0. Az **AX6** miatt a mellékátló két eleme egyforma, ami **AX8** miatt csak zérus lehet:

$a \cdot b$	1	0
1	1	0
0	0	0

Vezessük be a diszjunkciót $(+)$ és a negációt $(\bar{a})$ a következő definíciókkal:

$$\textbf{Df1} \quad a+b=a \oplus b \oplus (a \cdot b)$$

$$\textbf{Df2} \quad \bar{a}=1 \oplus a$$

Az így definiált diszjunkció és konjunkció azonos azzal amely a maximum, minimum elvből származtatható:

$$a+b=\max(a,b)$$

$$a \cdot b=\min(a,b)$$

Boole algebra és az antivalencia gyűrű

Boole algebrának nevezzük az egyértelműen komplementumos disztributív hálót. A hálónak két

Beérkezett: 1980. III. 5.

műveletét „+”-al és „·”-al jelöljük. Ha a H hálónak „0” a legkisebb és „1” a legnagyobb eleme akkor az $\bar{x}\in H$ komplementumának nevezzük az $\bar{x}\in H$ elemet, amelyre $x\cdot\bar{x}=0$ és $x+\bar{x}=1$. Egyértelműen komplementumos háló ha, minden elemének egyetlen komplementnma van. Könnyű belátni, hogy az egyértelmű komplementum a gyűrűben definiált negált változónak felel meg.

A disztributív hálók axiómái a következők:

Asszociativitás:

HAX1: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

HAX2: $(a+b)+c=a+(b+c)$

Kommutativitás:

HAX3: $a\cdot b=b\cdot a$

HAX4: $a+b=b+a$

Disztributivitás:

HAX5: $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$

HAX6: $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$

Végül a hálókra talán a legjellegzetesebb abszorpciós axiómák:

HAX7: $a\cdot(a+b)=a$

HAX8: $a+(a\cdot b)=a$

A fenti axiómákból következik: $a\cdot a=a$, $a+a=a$. Könnyű belátni azt is, hogy „·” a konjunkciót, a „+” pedig a diszjunkciót jelöli.

Vizsgáljuk meg, hogy az antivalencia gyűrű Boole algebra-e? Ezért próbáljuk felírni a **HAX7** és **HAX8** abszorpciós axiómákat az antivalencia gyűrűben:

$$a\cdot(a\oplus b)=a\cdot\bar{b}, \quad \text{illetve} \quad a\oplus(a\cdot b)=a\cdot\bar{b}.$$

Látjuk az antivalencia gyűrű *nem* Boole algebra. Részletesebb vizsgálat szerint az antivalencia gyűrű félháló.

A kétértékű Boole algebra és a kétértékű véges antivalencia gyűrű bijekció. Antivalencia gyűrűből Boole algebrába illetve vissza az alábbi egyenlőségek alapján térhetünk át:

$$a+b=a\oplus b\oplus a\cdot b$$

$$\bar{a}=1\oplus a$$

$$a\oplus b=\bar{a}\cdot b+\bar{b}\cdot a$$

Különböző kétértékű rendszerek transzformációja

Ismeretes, hogy 2^n db egymástól különböző n változós kétértékű algebrai kifejezés létezik. Két algebrai kifejezést akkor mondunk ekvivalensnek ha azok a változók bármilyen értékkombinációja mellett mindig egyforma értéket vesznek fel. Lehet tehát két alakra egészen eltérő kifejezés ekvivalens.

A műszaki alkalmazás azt kívánja, hogy adott függvényhez tartozó kifejezéseket úgy írjuk fel, hogy a műveletek száma a legkisebb legyen. A műveleteket az elektronikában kapuáramkörökkel relizáljuk, kevesebb kapuáramkör gazdaságosabb megvalósítást jelent.

Az említett antivalencia gyűrű illetve Boole algebra egy-egy rendszert (struktúrát) alkot. A rendszert az axiómákkal illetve alapműveletekkel definiáljuk.

Funkcionálisan teljes az a rendszer amelyben az összes 2^n db egymással nem ekvivalens n változós kifejezés az alapműveletekkel felírható.

Az eddig ismertetett funkcionálisan teljes rendszerek alapműveletei:

— kétfajta kétváltozós művelet: antivalencia, konjunkció;
— kétváltozós műveletek: konjunkció, diszjunkció, és egyváltozós művelet: negáció.

Sokszor előnyös bővített funkcionálisan teljes rendszert használni. Például az antivalencia gyűrű alapműveleteit bővíthetjük az egyváltozós negációval:

— antivalencia, konjunkció, negáció.

Mint ismeretes vannak egyműveletes funkcionálisan teljes rendszerek:

— NEM/VAGY, műveleti jele: $\not+$
— NEM/ÉS, műveleti jele: $\not\cdot$

Bővítsük ezeket a rendszereket a negációval, így a következő azonosságokat írhatjuk fel:

$$\bar{a}\not+\bar{b}=a\cdot b \qquad (\bar{a}\not+\bar{b})\not+(a\not+b)=a\oplus b$$

illetve

$$\overline{a\not\cdot b}=a\cdot b \qquad (a\not\cdot\bar{b})\not\cdot(\bar{a}\not\cdot b)=a\oplus b$$

és

$$\bar{a}\not\cdot\bar{b}=a+b \qquad \overline{a\not+b}=a+b$$

Egyszerűsítés antivalencia gyűrűben

Az egyszerűsítést a diszjunktív normál alak felírásával kezdjük. A normál alak diszjunkciói helyett azonnal antivalenciát írhatunk, mert a normál alak bármelyik két termjének a konjunkciója zérus. Ezután az $\bar{a}=1\oplus a$ azonosság (definíció) alkalmazásával áttérünk a nem bővített antivalencia gyűrűre amelyben nincs negáció.

Az egyszerűsítés azon alapszik, hogy az $a\oplus a=0$ axióma értelmében a redundáns termeket azonnal kiejthetjük.

Például $ab+abc=ab\oplus abc\oplus abc=ab$, illetve $abc+ab\bar{c}=acb\oplus ab\bar{c}=abc\oplus ab(1\oplus c)=ab$.

Egyszerűsítés után visszatérünk Boole algebrába, vagy áttérünk a NEM/ÉS illetve NEM/VAGY rendszerre.

A számítógép program készítésére alkalmas algoritmusunkban numerikus értékeket használunk. A termekben a változókat „1”-gyel a negált változókat „0”-val jelöljük. Amennyiben valamelyik változó eltűnt a termből, a helyére „-1” kerül.

Algoritmusunkat úgy készítettük, hogy a memória igény és a futási idő lehetőleg kicsi legyen. Adott n változó esetében a lehetséges termek száma 2^n, ami elég tekintélyes. Ezen úgy segíthetünk, hogy először azokat a termeket olvastatjuk be amelyekben a zérusok száma a legkisebb. Egyetlen term beolvasása után a zérusok helyébe azonnal „1”-et, illetve „–1”-íratunk, így képezzük az új termeket. Ezután beolvastatva a következő termet, mindjárt most is végre hajtva az „1”, illetve „–1” helyettesítést, a kapott termeket azonnal összehasonlíthatjuk memóriában már bentlevő termekkel. Így az egyforma termeket rögtön törölhetjük.

A futási idő és a memória igény együtt csökkenthető, ha előzetes összevonást végzünk. Az előzetes összevonás attól függ, hogy hány Häming távolság van a két term között. A programunk három Häming távolságot vesz figyelembe maximálisan.

Algoritmusunk lépései tehát a következők:

1. Felírjuk a Boole függvény diszjunktív normál alakját.

2. A logikai változók helyébe „1”-et a negált változók helyébe „0”-át, a diszjunkció műveleti jel helyébe antivalencia műveleti jelet írunk.

3. A termeket növekvő zérus-szám szerint rendezzük.

4. Háming távolság szerint párosítunk, minél kisebb Häming távolságot keresve, a legtöbb zérust tartalmazó termekkel elkezdve páros összevonást végzünk.

5. A legkevesebb zérust tartalmazó termekkel elkezdve a termekben zérus helyébe „1”-et, majd „–1”-et írunk.

6. Az $a \oplus a - 0$ axióma alkalmazásával az egyforma termeket páronként kiejtjük.

7. Visszatérünk Boole algebrára, miután negációval bővítést végeztünk. Algoritmusunk alapján FORTRAN nyelvű programot írtunk.

Példák

a) Minimalizáljuk az alábbi négyváltozós függvényt:

$$F = abc + bcd + ab\bar{c}d + ab\bar{c} + a\bar{b}cd + a\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} +$$
$$+ \bar{a}b\bar{c}d$$

A hiányzó változók helyébe „1”-et és „0”-t is írva tíz termet kapunk: $1111 \oplus 1110 \oplus 0111 \oplus 1101 \oplus 1100 \oplus \oplus 1011 \oplus 1001 \oplus 0010 \oplus 0110 \oplus 0101$

Végezzük el a páros összevonásokat: $0-110 \oplus \oplus 01-11 \oplus 10-11 \oplus 110-1 \oplus 111-1$

Ahol a Häming távolság kicsi írjunk a „0” helyébe „1”-et és „–1”-et: $0-110 \oplus 11-11 \oplus -11-11 \oplus \oplus 11-11 \oplus 1-1-11 \oplus 111-1 \oplus 111-1 \oplus 11-1-1$

A kiejtések után kapjuk a végeredményt:

$$\bar{a}c\bar{d} \oplus bd \oplus ad \oplus ab = \bar{a}cd + bd + ad + ab$$

A visszatérésre kell kissé ügyelnünk egyébként igen elegáns ez a jól programozható módszerünk.

b) Minimalizáljuk az alábbi függvényt:

$$f = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bd + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}d + \bar{a}bc$$

Az ismertetett módon normál formulára áttérve hét termet kapunk:

$$f = 0111 \oplus 1011 \oplus 0101 \oplus 0110 \oplus 1001 \oplus 0100 \oplus 1000$$

Az egy Häming távolságra levőket tetszés szerinti párosításban összevonva a következő termeket kapjuk: $100-1$ $01-10$
$01-11$ 1011

Látjuk két term újra egy Haming távolságra került egymástól, ezért folytatva az összevonást, az eredmény:

$$f = 100-1 \oplus 01-1-1 \oplus 1011$$

Tehát:

$$f = a\bar{b}\bar{c} \oplus ab \oplus a\bar{b}cd$$

A részeredményünket úgy ellenőrizhetjük, hogy a „–1” helyébe „0”-át és „1”-et visszaírva, az **AX**10 axiómát figyelembe véve, vissza kell kapnunk a normál formula termeit.

Befejezésül vissza kell térnünk a Boole algebrába. A Boole algebra $a+a=a$ axiómája miatt adott esetben egyszerre több term értéke is „1” lehet, ezért az $a\bar{b}cd$ termben a „c” elhagyható visszatéréskor:

$$f = a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b + a\bar{b}d$$

A visszatérés ezen részletproblémái is algoritmizálhatók és programozhatók.

c) Minimalizáljuk az alábbi függvényt:

$$f = a\bar{b}\bar{c} + abc + ab\bar{c}$$

$$f = 100 \oplus 111 \oplus 110$$

Helyettesítsünk a „0”-ok helyébe „1”-et és „–1”-et: 111, 1–11, 11–1, 1–1–1, 111, 111, 11–1

Az A**X**10 axiómát alkalmazva: $111 \oplus 1-11 \oplus 1-1-1$
Most kétféleképpen is visszatérhetünk a Boole algebrába:

$$f = abc + a\bar{c} = ab + a\bar{c}$$

A két Boole algebrai kifejezés természetesen ekvivalens, de a második előnyösebb. A visszatranszformálást végző programnak ilyenkor a második kifejezést kell adnia.

A fenti példákon kívül figyelmet érdemel még az az eset, amikor a termek között szerepel a csupa zérust tartalmazó term is.

A programunk a közbenső antivalencia gyűrűs egyszerűsített kifejezést is kinyomtatja mielőtt áttér Boole algebrára, és az említett ellenőrzést is elvégzi.

IRODALOM

[1] *Dr. Nemesszeghy Elemér:* El Uso de Algebra de Boole en el Análisis de razonamiento Cayea. 1973 Universidad de Puerto Rico.

[2] *G. Birkhoff T.C. Bartee:* A modern algebra a számítógéptudományban. Műszaki Könyvkiadó 1974.