Főszerkesztő: HORVÁTH IMRE
Szerkesztő: ANGYAL LÁSZLÓ



BHG ORION TERTA

MŰSZAKI KÖZLEMÉNYEK

XXVI. évfolyam 1980 8. szám

# Az MKSA mértékegység-rendszer

CEBE LÁSZLÓ
TERTA-KKVMF

A régebbi időkben a fizika fejlődését erősen akadályozta az egységes mértékrendszer hiánya. De nehézségeket okozott ez a mindennapi életben is, amikor földrajzi távolságokat, méreteket, súlyokat kellett megadni. Az egységes mértékrendszer kialakítását abban az időben a különböző nemzeti érdekek, kereskedelmi társulások is akadályozták.

Az első kezdeményező lépést ezen a téren a francia forradalomban az 1790-es nemzetgyűlés tette, amely megbízta a párizsi akadémiát, hogy tudományos alapon dolgozzon ki egy egységes mértékrendszert. A munkában többek között olyan nagy nevű tudósok, mint D'Alembert, Laplace, Lagrange, Lavoisier vettek részt.

## 1. Követelmények az egységes mértékrendszerrel kapcsolatban

Minden mértékrendszerrel kapcsolatban alapvető követelmény, hogy minden lehetséges szereplő mennyiséget azon a területen, amelyen a rendszert használni akarjuk, lehetőleg minimális számú alapmennyiségre vezessünk vissza.

Teljesen általánosan mondhatjuk, hogy mivel minden fizikai jelenség térben és időben zajlik le, minden fizikai mértékrendszernek tartalmaznia kell a távolságot és időt mint alapegységet. Ezenkívül, mivel érzékelhető jelenségről van szó, valamilyen anyagi jellemzőt, ami a tömeg, illetve a vele egyenrangú energia lehet.

1790-ben, amikor gyakorlatilag még csak a mechanika képviselte a fizikát, elegendőnek bizonyult a három alapmennyiség, a távolság, a tömeg és az idő bevezetése. Így született meg a CGS-rendszer, a centiméter, a gramm és a secundum alapegységekkel, amelyekből minden más mechanikai egység származtatható.

Ennek a rendszernek a mai megfelelője az MKS-rendszer, amely csupán annyiban különbözik, hogy a távolság alapegysége a méter és a tömegé a kilogramm lett, a secundum változatlan maradt.

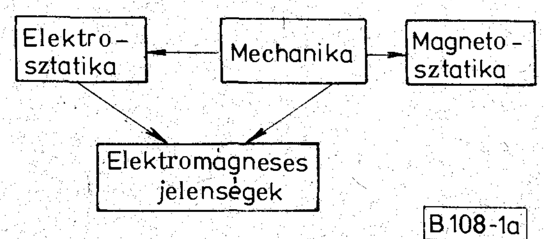
A CGS-rendszer alkalmazásával kapcsolatban a múlt században két nehézség merült fel:

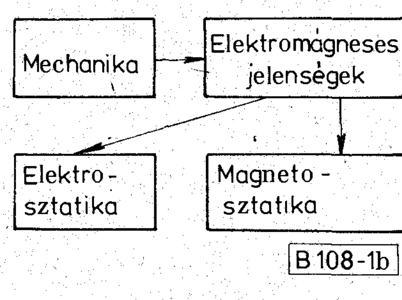
*a)* Az egyre jobban tért hódító elektrotechnika jelenségeit a mechanikai jelenségeket leíró távolság—tömeg—idő mennyiségekkel kellett leírni. Ez csak mesterkélten sikerült, mert egyre inkább nyilvánvalóvá vált, hogy az elektromosság az anyag másra vissza nem vezethető, mechanikai tulajdonságokból nem származtatható alapjellemzője.

*b)* A másik nehézséget az okozta, hogy egyidőben indult fejlődésnek az elektrosztatika és a magnetosztatika, amit két különálló területnek tekintettek.

A viszonyokat az *1a ábrán* tüntetjük fel. A fizika fejlődésével úgy az elektrosztatika mint a magnetosztatika az elektromágneses jelenségekre vezetett, amiből nyilvánvalóvá vált a két terület közös eredete. A mechanika és az elektrotechnika közötti kapcsolatot az akkoriban legjobban ismert Coulomb-törvényből vezették le. Eszerint az erő két elektromos, ill. mágneses töltés között:

$$F_e = k_e \frac{Q_{e1}Q_{e2}}{r^2} \quad \text{és:} \quad F_m = k'_m \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{r^2}. \quad (1)$$




*1. ábra.* A CGS és az MKSA mértékegység ismertetése

A fenti két törvény alapján Gauss terjesztette ki a CGS-renszert az elektromos és a mágneses jelenségekre. Önkényesen a $k_e = k'_m = 1$ választásával definiálta a $Q_e$, ill. $Q_m$ mágneses töltés egységét. Mindkét töltés dimenziójának így, mivel az $F = ma$ összefüggésből az erő dimenziója $[F] = [\text{cmgs}^{-2}]$:

$$[Q_e] = [Q_m] = \left[\text{cm}^{\frac{3}{2}}\text{g}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-1}\right], \tag{2}$$

adódott. A nehézségek akkor merültek fel, amikor az elektromágneses jelenségekkel kapcsolatban az áram, feszültség, térerő stb. egységeit kellett megállapítani, mert ezekre két különböző egység adódott, attól függően, hogy az elektrosztatikus vagy a magnetosztatikus töltés egységéből indultak ki. Az így keletkezett Gauss-féle elektrosztatikus és elektromágneses mértékrendszert a továbbiakban nem tárgyaljuk. Ma már csak történelmi jelentőségük van és csak az okoz némi zavart, hogy a még forgalomban levő régebbi könyvek ezeket a mértékrendszereket használják.

Át lehet hidalni a CGS-rendszer nehézségeit, ha a három mechanikai alapegység mellé egy negyedik elektromos alapegységet választunk. Önként kínálkozik az elektromos töltés negyedik egységnek. Azonban töltésekkel aránylag ritkán számolunk, ezért célszerűbb a töltéssel közvetlen kapcsolatban levő áramot választani egységnek. Így született meg az MKSA-rendszer, ahol az „A" az „amperre" utal. Így a fizikai törvényszerűségek tárgyalásánál is célszerű az *1b ábra* szerinti felépítést követni. Eszerint a mechanikai ismeretek birtokában az áram definiálásával az elektromágneses jelenségek tárgyalhatók, majd ezek után az elektrosztatikus, illetve magnetosztatikus jelenségek. Ilyen módon lépésről lépésre az összes elektromos mennyiség egységét is meghatározhatjuk.

A négy alapegységből minden mechanikai és elektromos egységet származtathatunk.

Mivel ma az elektrotechnikai számítások éppoly közismertek, mint a mechanikai számítások, nem okoz nehézséget, hogy egyes esetekben nem erőltetjük az egyes egységek kifejezését a négy alapegységgel, hanem a

$$\begin{aligned} Q &= I \cdot t \ [\text{C}], \\ W &= U \cdot I \ [\text{W}], [\text{VA}], \\ Z &= \frac{U}{I} \ [\text{Ohm}] \end{aligned} \tag{3}$$

összefüggések alapján a [C] Coulomb, a [V] volt, a [W] watt és az [Ω] ohm egységeket is alapegységeknek tekintjük. Hasonlóképpen az

$$F = ma \ [\text{N}]$$

összefüggésből az [N] newton egységet is sokszor alapegységnek vehetjük, amellyel egyéb mennyiségeket kifejezhetünk.

A fenti egységeket tartalmazó mértékegység-rendszert MKSC, MKSA, MKSVA stb. néven vagy közösen SI (Systéme International), nemzetközi mértékegység-rendszernek nevezzük.

Ha egy mértékrendszerben az alapegységeket helyesen választjuk meg, akkor nagy előny, hogy a származtatott mértékegységekből következtetni lehet az illető mennyiség fizikai jellegére és ezen túlmenően utalást is tartalmaz annak mérésére. Ezáltal hozzásegít az illető fizikai mennyiség jobb megértéséhez. A mértékrendszer megválasztása döntő módon befolyásolja szemléletünket is, aminek alapvető ismeretelméleti jelentősége is van.

Egy egyszerű példát említünk: a régi időkben nagyobb távolságok jellemzésére nem álltak rendelkezésre térképek. Ezért távolság- és időegységek helyett automatikusan szemléletesebb sebesség—idő egységeket választottak. Például a Budapest—Szeged távolságot 5 napi járással, 2 nap lóháton stb. módon írták le. Így az $s = v \cdot t$ összefüggésben a távolság lett a származtatott egység. Ez egyúttal lényeges szemléleti változást is jelent, bár ugyanarról a dologról van szó. A modern ember gondolatában nagy távolságok esetén egy térkép jelenik meg és így elvont fogalmú távolságokban gondolkodik, a régiekében ellenben egy gyalogló ember, vágtató ló jelent meg.

Hasonló a helyzet a csillagászatban a fényévvel, ahol elképzelhetetlen nagy távolságok helyett fénysebesség × idővel számolunk vagy röviden csak az idővel, a fényévvel.

Az elektrotechnikában a CGS-rendszer semmilyen szemléletet nem adott (például a töltés 2. szerinti mértékegysége). Gyökeresen megváltozott a helyzet az MKSA mértékrendszer bevezetésével. Egy elektromos alapmennyiség, az áram vagy töltés felvétele azonnal szemléletessé tette az összes elektromos mértékegységet és egyben utalást adott a mérés módjára is.

A legnagyobb változást, mint később látni fogjuk, az jelentette, hogy a vákuum $\mu_0$ és $\varepsilon_0$ permeabilitása és dielektromos állandója is megszűnt puszta szám lenni.

## 2. Az MKSA alapegységek

Az alapegységeknek jól definiáltaknak, változatlannak és hagy pontossággal reprodukálhatóknak kell lenniök. Ezt valamikor úgy próbálták elérni, hogy etalonokat készítettek valamilyen változatlannak tekintett fizikai mérés eredménye alapján. Az idők folyamán a mérések pontossága mindig fokozódott, ezért az etalon értékét folyton változtatni kellett volna. Ezért ma fordítva járunk el, az etalonokat fogadjuk el a mértékegységek alapjául és ezek alapján pontosíthatjuk a fizikai méréseket.

A távolság, tömeg és idő egysége változatlanul a CGS-rendszer alapegysége maradt, az áram egysége pedig kis mértékben megváltozott.

*a) A távolság vagy hosszúság egysége* az [m] méter. Eredetileg a Föld kerületének 1/40 000 000-od része. Az erről készült, Párizsban őrzött platina-iridium-etalon tekinthető a hosszúság alapegységének, függetlenül a Föld kerületének újabb és pontosabb méréseitől.

Ma már lehetőség van a hosszúságegység abszolút változatlan, atomi állandókkal való kifejezésére. Erre legalkalmasabbak az atomi színképek hullámhosszai, amelyek nagy pontossággal mérhetők. Így:

A Cd vörös vonalából: lm = 1 553 164,13 $\lambda$,
A Kr vörös vonalából: lm = 1 650 763,73 $\lambda$.

*b) A tömeg egysége* a [kg] kilogramm. Eredetileg a legsűrűbb víz, a +4 °C-os, 1 $dm^3$-es víz tömege volt. Az erről készült, Párizsban őrzött platina-irídium henger etalon tekinthető a tömeg alapegységének, függetlenül attól, hogy pontosabb mérések más értéket adnak az eredeti méréseknél és a víz nem pontosan +4 °C-on a legsűrűbb.

Ma már lehetőség van a tömegegység atomi állandókkal való kifejezésére:

$$1\ \text{kg} = 5{,}979\,466 \cdot 10^{26}\ \text{proton tömege.}$$

Megjegyezzük, hogy zavart okoz, hogy a tömeg egységét kg-mal jelöljük. Ugyanis a „k" betű az ezres mérőszámra utal. Előbb-utóbb szükség lesz a kg helyett más jelölést használni.

*c) Az idő egysége* az [s] secundum, másodperc. Eredetileg a közepes naphossz 1/86 400-ad része volt. Ma az időegység az atomi színképekből a legkönyebben s a legynagyobb pontosságai definiálható.

A Cs atom színképéből:

$$1\text{s} = 9\,192\,631\,770\ \text{periódus ideje.}$$

*d) Az áramegység definícióját* a 4. pontban tárgyaljuk.

*e) A hőmérséklet egysége.* Nem tartozik az alapegységek közé, mert végeredményben a molekulák hőrezgéséből származó kinetikus energiáját fejezi ki. Ettől függetlenül, szükség van a hőmérséklet egységének a definiálására. A hőmérséklet egysége a °K Kelvin-fok.

A víz fagyáspontja: 273,16 °K.

A fagyáspont hőmérsékletét 0°-nak választva, kapjuk, a °C Celsius-skálát.

Hőmérséklet-különbségekre a °K és °C-ban kapott érték azonos.

## 3. A mechanikai mértékegységek

Minden mechanikai mennyiség kifejezhető az MKS távolság, tömeg, idő alapegységekkel. A fontosabbakat és a definiáló fizikai egyenleteket az *1. táblázatban* tüntetjük fel.

Egyes származtatott egységeknél sokszor célszerű, ha azokat N, W, J-lal fejezzük ki. Különösen olyan fizikai egyenletekben, amelyek vegyesen tartalmaznak mechanikai és elektromos egységeket, célszerű a tömeg mértékegységének a kiküszöbölése.

Az erőt és a munkát megadó fizikai képletekből:

$F = ma$-ból: $[\text{N}] = [\text{kgms}^{-2}]$ és innen: $[\text{kg}] = [\text{Nm}^{-1}\text{s}^2]$, (4)

$W = F \cdot s$-ből: $[\text{Ws}] = [\text{Nm}]$ és innen: $[\text{N}] = [\text{Wsm}^{-1}] = [\text{Jm}^{-1}]$. (5*a*)

Behelyettesítve 4-be:

$$[\text{kg}] = [\text{Wm}^{-2}\text{s}^3] = [\text{Jm}^{-2}\text{s}^2]. \quad (5b)$$

Különösen előnyösek az 5*a* és *b* kifejezések, mert az erőt és a tömeget W, ill. Ws = J-lal fejezi ki.

A fizika számos területén, mint például az akusztikában, optikában, a tömeg és erő nem közvetlenül szerepelnek, használatuk nehézkes, de a teljesítmény és energia mindig szerepelnek.

*1. táblázat*

| Mennyiség | Definiáló egyenlet | MKS | m, s, N, W, J |
|---|---|---|---|
| Hosszúság | s | m | |
| Tömeg | m | kg | $\text{Wm}^{-2}\text{s}^3$, $\text{Nm}^{-1}\text{s}^2$ |
| Idő | $t$ | s | |
| Sebesség | $v = \frac{s}{t}$ | $\text{ms}^{-1}$ | |
| Gyorsulás | $a = \frac{v}{t}$ | $\text{ms}^{-2}$ | |
| Frekvencia | $f$ | $\text{s}^{-1}$, Hz | |
| Körferekvencia | $\omega$ | $\text{s}^{-1}$ | |
| Erő | $F = ma$ | $\text{mkgs}^{-2}$ | N, $\text{Wsm}^{-1}$ |
| Impulzus | $I = mv$ | $\text{mkgs}^{-1}$ | Ns, $\text{Ws}^2\text{m}^{-1}$ |
| Teljesítmény | $P = Fv$ | $\text{m}^2\text{kgs}^{-3}$ | W, $\text{Nms}^{-1}$ |
| Munka | $W = Fs$ | $\text{mkgs}^{-2}$ | Ws, Nm, J |
| Nyomaték | $M = Fs$ | $\text{m}^2\text{kgs}^{-2}$ | Ws, Nm, J |
| Nyomás | $p = \frac{F}{A}$ | $\text{m}^{-1}\text{kgs}^{-2}$ | $\text{Nm}^{-2}$, $\text{Wsm}^{-3}$, Pa |

(Megjegyezzük, hogy némi zavart okoz, hogy sokszor ugyanazt a betűt használjuk valamilyen fizikai mennyiség és egy másik fizikai mértékegység jelölésére. Például: W = munka, [W] = watt, m = tömeg, [m] = méter. A zavart elkerülhetjük, ha a mértékegység jelénél mindig a [ ] jelet használjuk).

Az *1. táblázat* utolsó oszlopában néhány mértékegység [N] és [W]-tal való kifejezését adjuk meg. Ezekből a kifejezésekből a [Ws] = [J] és [W] = [VA] helyettesítéssel számtalan újabb, sokszor előnyösen használható kifejezéseket kaphatunk.

A teljesség kedvéért megemlítünk néhány régebben használatos, az irodalomban gyakran szereplő mértékegységet és megadjuk azok átszámítását.

1. Az erő. 1 dyn = $10^{-5}$ N
2. A teljesítmény. 1 LE = 0,7355 kW
   1 kW = 1,3596 LE
3. A munka. 1 erg = $10^{-7}$ J
   1 eV = $1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ J

A munka további egységei, a Wh, cal és J közötti átszámítást a *2. táblázatban* adjuk meg.

*2. táblázat* [1 cal = $10^{-3}$ kcal]

| | Wh | cal | J |
|---|---|---|---|
| Wh | 1 | 859,845 | 3600 |
| cal | $1{,}163 \cdot 10^{-3}$ | 1 | 4,1868 |
| J | $2{,}778 \cdot 10^{-4}$ | 0,2388 | 1 |

4 • A nyomás új egysége: $1\ \text{Pa (Pascal)} = 1\ \text{N/m}^2$

$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa} \approx 1\ \text{atmoszféra}$

$1\ \text{at} = 98\,066{,}5\ \text{Pa}$

## 4. Az elektromos mértékegységek

A negyedik alapmennyiség, az áram definiálására több módszer kínálkozik. Régebben az áram vegyi hatását használták erre: 1 A erősségű az áram, ha 1 s alatt 1,18 mg ezüstöt választ ki. Ez a mérés azonban nem reprodukálható megfelelő pontossággal. Ezért célszerűbbnek bizonyult az áram egységét az áram mágneses hatása alapján definiálni. Ugyanakkor a

$$Q = \int_0^t I dt$$

összefüggés alapján a töltés egységét is definiálni tudjuk.

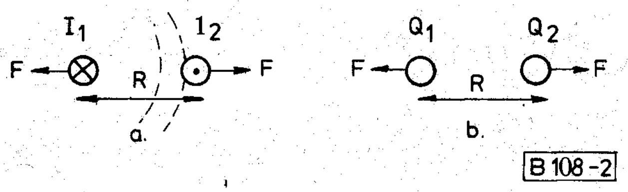
Induljunk ki a két paralel futó vezeték közötti erőhatásból.

A *2a ábra* szerint a 2. vezető helyén a térerő:

$$H = \frac{I_1}{2R\pi},$$

és így:

$$F = k_m H I_2 l = k_m \frac{I_1 I_2 l}{2\pi R} \xrightarrow[I_1 = I_2 = I]{\text{ha}} k_m \frac{I^2 \cdot l}{2\pi R}. \qquad (6a)$$




*2. ábra.* Az elektromágneses és az elektrosztatikus erőhatás

Írjuk fel a Coulomb-törvényt is. A *2b ábra* alapján:

$$F = k_e \frac{Q_1 Q_2}{4\pi R^2} \xrightarrow[Q_1 = Q_2 = Q]{\text{ha}} k_e \frac{Q^2}{4\pi R^2}. \qquad (6b)$$

A (6*a*) és (*b*) két egyenlet négy ismeretlent, $k_e$ és $k_m$ konstanst és $I$ és $Q$-t tartalmazza. A túlhatározottságot megszüntethetjük a kettő értékének önkényes meghatározásával (mindkét egyenletből egy-egynek a meghatározásával).

Az MKSA-rendszerben önkényesen:

$$k_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \qquad (6c)$$

értéket választunk. Ilyen módon a (6*a*) egyenletből $I$ egysége már meghatározható. A (6*b*) egyenletben $k_e$ vagy $Q$ önkényes megválasztása helyett célszerűbb a:

$$Q = I \cdot t, \quad \text{illetve} \quad Q = \int_0^t I dt\ [\text{As}] \qquad (6d)$$

összefüggés alapján definiálni $Q$ egységét, amiből $k_e$ értéke meghatározható.

Figyelemre méltó, hogy $k_m$ és $k_e$ nem puszta számok, hanem dimenzionált mennyiségek.

$$\left.\begin{array}{l} \text{A (6a) egyenletből: } [k_m] = [\text{NA}^{-2}], \\ \text{A (6b) egyenletből: } [k_e] = [\text{NA}^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-2}]. \end{array}\right\} \qquad (6e)$$

Rövid meggondolás után belátható, hogy bárhogyan választjuk is meg az áram vagy a töltés egységét, mindig fenn kell állnia:

$$\sqrt{\frac{k_e}{k_m}} = c = \text{konstans}\ [\text{ms}^{-1}], \qquad (6f)$$

sebesség dimenziójú.

A mérések és elméleti számítások azt mutatják, hogy

$$c = 2{,}997\,925 \cdot 10^8\ [\text{ms}^{-1}], \qquad (6g)$$

azonos a fénysebességgel, ami arra utal, hogy a mágneses tér, amely az elektromos töltés mozgása révén jön létre, relativisztikus hatásnak tekinthető.

### *4.1. Az áramegység definiálása. $\mu_0$ és $e_0$ értéke*

Az MKSA-renszerben az áramegységet a (6*a*) formula alapján definiáljuk. Innen, ha $I = 1\text{A}$ és $R = l = 1\text{m}$, akkor:

$$F = \frac{k_m}{2\pi}. \qquad (7a)$$

Egységnyinek nevezzük az áramerősséget, ha az két párhuzamos, 1 m hosszú, egymástól 1 m távolságra levő vezetőben folyik és ekkor köztük az erőhatás $2 \cdot 10^{-7}$ [N]. Ez egyenértékű azzal, hogy a (7*a*) formula alapján:

$$k_m = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1{,}256\,637 \cdot 10^{-6}\ [\text{NA}^{-2}],$$

$$\left[\frac{\text{Ws}}{\text{A}^2\text{m}}\right], \left[\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\right], \left[\frac{\text{H}}{\text{m}}\right], \qquad (7b)$$

értéket választunk.

Az áramegység meghatározása után azonnal adódik a töltés egysége:

$$1\ \text{Coulomb} = 1\text{A} \times 1\text{s}\ [\text{C}] = [\text{As}]. \qquad (7c)$$

A (6*f*) és (7*b*) összefüggésből pedig:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_m c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8{,}854\,186 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{A}^2\text{s}^2}{\text{Nm}^2}\right],$$

$$\left[\frac{\text{A}^2\text{s}}{\text{Wm}}\right], \left[\frac{\text{A}_s}{\text{V}_m}\right], \left[\frac{\text{F}}{\text{m}}\right], \qquad (7d)$$

és

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}, \qquad (7e)$$

$\mu_0$ és $e_0$ a vákuum permeabilitása és dielektromos állandója.

Az MKSA-rendszerben $\mu_0$ és $e_0$ nem puszta számok, hanem dimenzionált mennyiségek. Ezáltal a vákuum a CGS-rendszertől eltérően anyagi jellemzőket kapott és így az elektromos és mágneses terek maxwell-i értelmezése is mélyebb értelmezést nyert.

Végeredményben sikerült az áramerősség egységének a meghatározását vagy ami ezzel egyenértékű, $\mu_0$ meghatározását — a (6a) formula szerint mechanikai erőmérésre visszavezetni. Ez a Thomson-féle árammérleg segítségével nagy pontossággal elvégezhető. Megemlítjük, hogy az áramerősség új egysége, az „új amper" kismértékben eltér a „régi amper"-től. Az eltérés 0,01%-on belül van, így nincs gyakorlati jelentősége. (Természetesen hasonló nagyságrendben eltér az új „volt" és „ohm" is a régitől.)

Gyakorlati számításoknál némi nehézséget okoz, hogy amíg $\mu_0$ jól megjegyezhető, $\pi$-vel kifejezhető szám, addig $\varepsilon_0$ nem az. De általában megengedhető a következő közelítés:

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

Ezt (7d)-be helyettesítve kapjuk:

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8{,}842 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\right], \tag{7f}$$

ami 5‰-en belüli hibát ad. A fenti értékkel számolva, a fizikai képletek sokszor nagymértékben egyszerűsödnek. Ugyancsak nagy egyszerűsítéseket eredményez a gyakran szereplő:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}98\,755 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{Vm}}{\text{As}}\right] \text{ helyettesítés is.}$$

Az áram egységét atomi állandókkal is definiálhatjuk. Mivel egy elektron töltése:

$$q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ [C/elektron]},$$

$$1C = \frac{1}{q_e} = 6{,}242 \cdot 10^{18} \text{ [elektron]}$$

töltés.

Tehát:

$$1A = 1C/s = 6{,}242 \cdot 10^{18} \text{ [clektron/s]}.$$

Azonban az elektronok száma pontatlanul mérhető, ezért az erőhatás alapján definiáljuk az áram egységét.

### *4.2. A származtatott elektromos mennyiségek mértékegységei*

Az áramerősség egységének pontos meghatározása után a többi elektromos egység vagy a mechanikai egységek bevonásával, vagy a már definiált elektromos egységek segítségével definiálható.

*Például*:

**1** A feszültség egységének meghatározása. 1 V feszültségdifferencia van két pont között, ha 1 A átfolyó áram 1 W teljesítményt ad le. Vagyis:

$$P = UI \text{ [W]} = \text{[V} \cdot \text{A]} \quad \text{és} \quad \text{[V]} = \left[\frac{\text{W}}{\text{A}}\right].$$

**2** Az ellenállás egységének meghatározása. Ha két pont között 1 A áram 1 V feszültséget létesít, akkor a két pont között az ellenállás 1 Ohm. Vagyis:

$$U = IR \text{ [V]} = [\text{A}\Omega] \quad \text{és} \quad [\Omega] = \left[\frac{\text{V}}{\text{A}}\right].$$

*3. táblázat*

| Mennyiség | Definjáló egyenlet | [MKSA] | [m, s, A, C, V, Ω, F, H] |
|---|---|---|---|
| Áram | $I$ | A | |
| Áramsűrűség | $j = \frac{I}{A}$ | $Am^{-2}$ | |
| Töltés | $Q = I \cdot t$ | As | C |
| Feszültség | $U = \frac{P}{I}$ | $m^2kgs^{-3}A^{-1}$ | V |
| Ellenállás | $R = \frac{U}{I} = Z$ | $m^2kgs^{-3}A^{-2}$ | Ω |
| Induktivitás | $L = \frac{Z}{\omega}$ | $m^2kgs^{-2}A^{-2}$ | H |
| Kapacitás | $C = \frac{1}{\omega Z}$ | $m^{-2}kg^{-1}s^4A^2$ | F |
| Fajlagos ellenállás | $\varrho = \frac{RA}{l}$ | $m^3kgs^{-3}A^{-2}$ | Ω·m |
| Fajlagos vezetés | $\sigma = \frac{l}{RA}$ | $m^{-3}kg^{-1}s^3A^2$ | $\Omega^{-1}m^{-1}$, $Sm^{-1}$ |
| Elektromos térerő | $E = \frac{U}{1}$ | $mkgs^{-3}A^{-1}$ | $Vm^{-1}$ |
| Mágneses térerő | $H = \frac{I}{1}$ | $Am^{-1}$ | $Am^{-1}$ |
| Elektromos indukció | $D = sE$ | $Asm^{-2}$ | $Asm^{-2}$ |
| Mágneses indukció | $B = \mu H$ | $kgs^{-2}A^{-1}$ | $Vsm^{-2}$, T |
| Elektromos fluxus | $\Phi = D \cdot A$ | As | As |
| Mágneses fluxus | $\psi = B \cdot A$ | $m^2kgs^{-2}A^{-1}$ | Vs, Wb |

A fontosabb elektromos mennyiségek meghatározó fizikai egyenleteit és mértékegységét a *3. táblázatban* tüntetjük fel.

Az MKSA mértékrendszernek külön előnye, hogy a Maxwell-egyenletek semmilyen konstanst nem tartalmaznak, a legegyszerűbb módon írhatók fel:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot } E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \text{ [Vm}^{-2}\text{]}, \\ \text{rot } H &= j + \frac{\partial D}{\partial t} \text{ [Am}^{-2}\text{]}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

A régebbi mértékegységek közül kettő, a Gauss és az Oersted, még egy hosszabb átmeneti időszakig használatos lesz.

$$1\ [\mathrm{Vsm^{-2}}] = 10^4\ [\mathrm{Gauss}]$$

és

$$100\ [\mathrm{Am^{-1}}] = 1\ [\mathrm{Acm^{-1}}] = \frac{4\pi}{10}\,\mathrm{Oersted} = 1{,}257\ \mathrm{Oersted}, \tag{9}$$

illetve:

$$1\ \mathrm{Oersted} = 0{,}7958\ [\mathrm{Acm^{-1}}] = 79{,}58\ [\mathrm{Am^{-1}}].$$

## 5. Szorzószámok alkalmazása a mértékegységeknél

A gyakorlatban sokszor nehézséget jelent, hogy a mértékegység túl nagynak vagy túl kicsinek bizonyul adott körülmények között. Hogy a túl nagy vagy a túl kis számokkal járó kényelmetlenségeket elkerüljük, szorzóként tíz hatványaival számolunk, illetve egyszerűen ezeket betűvel helyettesítjük. Hogy a túl sok betűjelölést elkerüljük, csak ezres szorzójú lépéseket vezetünk be. Jelölésüket a *4. táblázat* tünteti fel.

*4. táblázat*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{18}$ | *E* | exa | $10^{-18}$ | *a* | atto |
| $10^{15}$ | *P* | peta | $10^{-15}$ | *f* | femto |
| $10^{12}$ | *T* | tera | $10^{-12}$ | *p* | piko |
| $10^{9}$ | *G* | giga | $10^{-9}$ | n | nano |
| $10^{6}$ | *M* | mega | $10^{-6}$ | $\mu$ | mikro |
| $10^{3}$ | *K* | kilo | $10^{-3}$ | *m* | milli |

| | | |
|---|---|---|
| $10^{2}$ | *h* | hekto |
| $10^{1}$ | *da* | deka |
| $10^{-1}$ | *d* | deci |
| $10^{-2}$ | *c* | centi |

A *4. táblázatban* alul közölt szorzók nem ezer többszörösei. Használatuk megengedett, de lehetőleg kerülni kell őket.

Általában célszerű, ha a gyakrabban szereplő konstansokat vagy nagyságrendeket a betűvel jelölt szorzóval memorizáljuk.

Például:

A fény sebessége: $c = 3\cdot 10^8\ \mathrm{ms^{-1}} = 300\ \mathrm{Mms^{-1}}$.

Az atom átmérőjének nagyságrendje: $10^{-8}$ cm $= 10^{-10}$ m $= 100$ pm.

A proton átmérőjének nagyságrendje: $10^{-13}$ cm $= 10^{-15}$ m $= 1$ fm.

A kék fény hullámhossza: $\lambda = 5\cdot 10^{-7}$ m $= 500$ nm.

A kék fény frekvenciája: $f = \frac{c}{\lambda} = 0{,}6\cdot 10^{15}$ Hz $= 600$ THz.

Az atom- és elektronfizikában gyakran szerepelnek olyan kis értékű konstansok, amelyek a jelenlegi legkisebb betűjelzéssel (atto $= 10^{-18}$) sem fejezhetők ki. Amíg az ennél kisebb betűjelzések nem születnek meg, addig is célszerű úgy a memorizálás mint a számtani műveletek egyszerűsítése céljából a két betűs szorzót használni, amelyekkel mint algebrai egységekkel számolhatunk. Például:

Az elektron töltése: $q_e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ C = 16\ aC = 160\ maC$ (milli-atto).

Az elektron tömege: $m_e = 9\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 900\cdot 10^{-33}\mathrm{kg} = 900$ fakg (femto-atto).

A Planck-állandó: $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Ws^2} = 663\ \mathrm{aaWs^2}$ (atto-atto).

A Boltzmann-állandó: $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/^\circ K} = 13{,}8\ \mathrm{ppJ/^\circ K}$ (piko-piko).

A betűjelölést mindig célszerű úgy megválasztani, hogy a számérték 0 és 1000 közé essen.

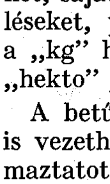
Itt szeretnénk rámutatni arra, hogy a „milli" jelölése „m"-el zavart okoz. Sajnálatos, hogy az egyik mérőszám jele megegyezik a „méter" alapegység jelével. Ugyancsak zavaró, hogy a tömegység jele „kg". Egyrészt az alapegységeket célszerűbb egy betűvel jelölni, mint a méter és secundum jele. Másrészt még zavaróbb, hogy az alapegységben a „kilo" mérőszám szerepel, ami arra utal, mintha az alapegység a „gramm" lenne.

Következetes jelölésmódunkkal:

1 gramm = 1 mkg,
1 tonna = 1 kkg = 1 Mg.

(Aki sokszor használja a „milli" és „kg" jelöléseket, saját használatra célszerűen bevezethet új jelöléseket, például a „milli" jelölésére a „$\nu$" betűt, a „kg" helyett a „t" vagy „h" jelet. A „h" mint „hekto" jelölése a gyakorlatban nem szerepel.)

A betűjelölések bevezetése súlyosabb félreértésre is vezethet. Vegyük például a hosszegységből származtatott megszokott terület és köbtartalom egységeiket: $\mathrm{mm^2}$, $\mathrm{mm^3}$, $\mathrm{km^2}$, $\mathrm{km^3}$ stb. Rövid megfontolás után belátható, hogy az új mértékrendszer szellemében ezeket másképpen kell értelmeznünk. Ugyanis az 1 mm élhosszúságú négyzet, ill. kocka területe, ill. térfogata az ábra szerinti.




$A = 1\ (\mathrm{mm})^2 = 1\ \mathrm{m^2m^2} = 1\,\mu\mathrm{m^2}$(1 mikronégyzetméter),

$V = 1\ (\mathrm{mm})^3 = 1\ \mathrm{m^3m^3} = 1\ \mathrm{nm^3}$,

$A = 1\ (\mathrm{km})^2 = 1\ \mathrm{k^2m^2} = 1\ \mathrm{Mm^2}$,

$V = 1\ (\mathrm{km})^3 = 1\ \mathrm{k^3m^3} = 1\ \mathrm{Gm^3}$.

Ugyanis, ha egy mennyiséggel egy műveletet végzünk, például négyzetre vagy köbre emeljük, akkor a mérőszámmal is automatikusan ugyanazt a műveletet kell végeznünk, hogy az új mérőszámot meg-kapjuk. Ha a mérőszámok betűk helyett 10 hatványaival vannak kifejezve, akkor ez a kérdés fel sem merül.

*Példa:* Mennyi egy $a=3$ km élhosszúságú négyzet területe?

$$a=3\cdot10^3\ \mathrm{m}=3\ \mathrm{km},$$

$$A=a^2=(3\cdot10^3\ \mathrm{m})^2=9\cdot10^6\ \mathrm{m}^2=9\ \mathrm{Mm}^2.$$

*A* betű jelöléssel:

$$A=a^2=(3\ \mathrm{km})^2=9\ \mathrm{k}^2\mathrm{m}^2=9\ \mathrm{Mm}^2.$$

Félrevezető, hogy régi jelöléseinkkel $A=3^2\ \mathrm{km}^2=9\ \mathrm{km}^2$-et kellene írnunk. Ugyanis új jelöléseinkkel:

$$9\ \mathrm{km}^2 \doteq 9\ \text{kilonégyzetméter}=9000\ \mathrm{m}^2,$$

egy 94,87 m élhosszúságú négyzet területe.

Példánkból is látszik, hogyha egy 1 mm élhosszúságú négyzet területét számoltuk volna, mennyire zavaró, hogy a „milli" és a „méter" jele egyformán „m".

A fent elmondottak elsősorban a gyakorlati számolásoknál jelentenek nehézséget. Szavakkal elmondva a „négyzetmilliméter", köbkilométer stb. elnevezések egyértelműek. Mindenesetre célszerűbb és precízebb lenne — bár kérdés, hogy el fog-e terjedni — a négyzetmilliméter helyett a $\mu\mathrm{m}^2$, a négyzetkilométer helyett a $\mathrm{Mm}^2$ stb. elnevezés.

## 6. Fizikai képletek írásmódja

Az új mértékrendszer bevezetésével együtt fizikai képletek felírásánál — különösen ha azokat gyakorlati számításokra is fel akarjuk használni — feltétlen szükséges, hogy azok a mértékegységek szempontjából is helyesek legyenek, illetve fel kell tüntetnünk, hogy a szereplő mennyiségek milyen mértékegységben értendők.

Az MKSA mértékrendszernek nagy előnye, hogy a fizikai formula, ha tudjuk, hogy az az MKSA tárgyalásmódnak megfelelő levezetés eredménye, feltétlenül helyes eredményt ad, ha minden szereplő mennyiséget MKSA-egységekben adunk meg.

A mértékegységek felírására nincs egységes jelölésmód. Az alábbi példában bemutatunk néhány lehetséges jelölésmódot. Vegyük az ellenállás számításának a képletét:

*a)*

$$R=\frac{\varrho\cdot l}{A}\begin{cases}\varrho\ [\Omega\mathrm{m}],\\ l\ [\mathrm{m}],\\ A\ [\mathrm{m}^2].\end{cases}$$

Ez a jelölésmód hosszadalmas, de egyértelmű.

*b)*

$$R=\frac{\varrho\cdot l}{A},$$

$$[\Omega]=\left[\frac{\Omega m\cdot m}{\mathrm{m}^2}\right].$$

Itt a fizikai egyenlet alá felírtuk a mértékegységegyenletet, amelynek szintén teljes egyenlőséget kell mutatnia. Ez az írásmód is hosszadalmas és nehézkes.

*c)*

$$R=\frac{\varrho\cdot i}{A}\ [\Omega,\ \Omega\mathrm{m},\ \mathrm{m},\ \mathrm{m}^2]\quad \text{vagy}\quad [\Omega],\ [\Omega\mathrm{m},\ \mathrm{m},\ \mathrm{m}^2].$$

A fenti jelölésmód a legtömörebb. Félreértést nem okozhat, mert aki ismeri a fizikai képletet, az előtt nem lehet vitás, hogy az egyes egységek mire vonatkoznak. Ezt a jelölésmódot lehet a leginkább javasolni.

A mérnöki gyakorlatban ritkán használják az eredeti fizikai formulákat, hanem inkább a belőlük származtatott, egyszerűsített tapasztalati formulákat. Ezekben a mértékegység-helyesség már nehezen ismerhető fel, ezért különösen fontos, hogy pontosan megadjuk, hogy az egyes mennyiségeknek mik a mértékegységei.

*Példa:* Egyenes réz körvezető ellenállása:

$$R=\frac{23\cdot l}{d^2}\ [\Omega]\begin{cases}l\ [\mathrm{km}],\\ d\ [\mathrm{mm}].\end{cases}$$

Rövidebben is írhatjuk:

$$R=\frac{23\cdot l}{d^2}\ [\Omega,\ \mathrm{km},\ \mathrm{mm}].$$

### 6.1. *Fizikai képletek kiszámítása,* ha *a mértékegységek szorzószámokkal vannak megadva*

Ha az egyes mértékegységek 10 hatványaival vagy azok betűjelével vannak megadva, gyakorlati számításoknál sokszor hosszadalmas és sok hibalehetőséget adó számításokat kíván az MKSA alapegységekbe való átszámítás. Ekkor nagy könnyebbséget jelent, ha felismerjük, hogy a szorzószámokat jelentő betűkkel mint algebrai tényezőkkel számolhatunk. Különösen előnyös ez olyan fizikai képleteknél, ahol az eredményt az egyes mennyiségek szorzata és hányadosa adja.

Az eljárást egy példán mutatjuk be. Számítsuk ki egy vezető ellenállását, ha: $l=1200$ km, $A=0{,}3\ (\mathrm{cm})^2$ és

$$\varrho=0{,}002\,\frac{\Omega(\mathrm{mm})^2}{\mathrm{m}}.$$

Az ismert képlet alapján:

$$R=\frac{\varrho\cdot \mathrm{l}}{A}=\underbrace{\frac{0{,}002\cdot1200}{0{,}3}}_{8}\Big(\underbrace{\mathrm{m}^2}_{\varrho}\underbrace{\mathrm{k}}_{l}\underbrace{\frac{1}{c^2}}_{A}\Big)\left[\underbrace{\frac{\Omega\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}}}_{\varrho}\cdot\underbrace{\mathrm{m}}_{l}\underbrace{\frac{1}{\mathrm{m}^2}}_{A}\right]=$$

$$=8\cdot(10)\ [\Omega]=80\ [\Omega].$$

Itt anélkül, hogy l, *A*, $\varrho$-t MKSA-egységekbe átszámítottuk volna, a következőképpen jártunk el:

*a)* A fizikai képletbe behelyettesítjük a számértékeket, anélkül, hogy a szorzószámokat figyelembe vettük volna. Esetünkben a 0,002, az 1200 és a 0,3 értékeket. Ezek a fizikai képlet szerint 8-at eredményeznek.

*b)* Ezt követően gömbölyű zárójelbe írtuk a szorzószámok betűjeleit. Illetve célszerűbb, ha a fizikai formula számértékeinek a behelyettesítésével egyidejűleg azonnal a gömbölyű zárójelen belül beírjuk a betűjeleket.

c) Szögletes zárójelbe beírjuk a megfelelő MKSA alapegységeket.

d) A zárójeleken belül elvégezzük az összevonásokat.

Kis gyakorlat után a gömbölyű zárójelen belül igen gyorsan és hibamentesen tudunk számolni, anélkül, hogy visszatérnénk 10 hatványaira. Ennek érdekében célszerű csak az ezres szorzókkal számolni és kerülni kell a c, d, h, centi, deka, hekto stb. jelöléseket. Az mk=1, μM=1, mμ=n stb. összefüggések rövid gyakorlás után könnyen memorizálhatók.

A szögletes zárójelen belüli összevonások után természetesen a helyes fizikai mértékegységeket kell kapnunk, esetünkben Ω-ot.

Befejezésül néhány példát közlünk.

*Példa:* $R=4$ Mohm ellenálláson $I=2$ mA áram folyik át. $U=$?

$$U=IR=2\cdot 4\ (\mathrm{mM})\ [\mathrm{A\Omega}]=8\ [\mathrm{kV}].$$

Itt a végeredményben a szorzóbetűt a dimenziózárójelbe írhatjuk.

*Példa:* m=5 tonna [kkg], $v=8$ [kms$^{-1}$], mennyi a mozgási energia?

$$W=\frac{\mathrm{m}v^2}{2}=\frac{5\cdot 8^2}{2}(\mathrm{kk}^2)\ [\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}]=160\ [\mathrm{GJ}].$$

*Példa:* Mennyi $C=2$ nF-os kapacitás impedanciája $\omega=5$ Ms$^{-1}$-en?

$$X=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\cdot 5}\left(\frac{1}{\mathrm{Mn}}\right)\ [\Omega]=0{,}1\ [\mathrm{k\Omega}]=100\ [\Omega].$$

*Példa.* Milyen erővel taszítja egymást két $Q_1=Q_2=1$ mC töltés egymástól 2 km távolságról? $\left(\varepsilon_0=8{,}85\ [\mathrm{pF/m}]=8{,}85\left[\mathrm{p}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\right]\right)$:

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2}=\frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85}\cdot\frac{1\cdot 1}{2^2}\left(\frac{\mathrm{m\cdot m}}{p\cdot k^2}\right)\left[\frac{\mathrm{m}}{F}\,\frac{C^2}{\mathrm{m}^2}\right]=$$
$$=0{,}0022\ (1)\ [\mathrm{N}]=2{,}2\ [\mathrm{mN}].$$

*Példa.* Milyen sebességet ér el m$=10^{-13}$ kg$=$$=0{,}1$ pkg-os tömeg, amelynek $Q=4\cdot 10^{-9}=4$ nAs töltése van, ha $U=10$ kV potenciálkülönbségen halad át?

$$v=\sqrt{\frac{2QU}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 10}{0{,}1}}\left(\sqrt{\frac{n\cdot k}{p}}\right)\left[\sqrt{\frac{\mathrm{AsV}}{\mathrm{kg}}}\right]=$$
$$=\sqrt{800}\ (\mathrm{k})\ [\mathrm{ms^{-1}}]=28{,}3\ [\mathrm{kms^{-1}}].$$

Megjegyezzük, hogy itt a gömbölyű zárójelen belül csak véletlenül kaptuk 10 egész számú hatványát. Ha példánkban m=0,1 pkg=100 fkg-ot választunk, a számításunk bonyolódik. Ekkor helyesen így járunk el:

$$v=\sqrt{\frac{2QU}{\mathrm{m}}}=\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 10}{100}}\left(\sqrt{\frac{n\cdot k}{f}}\right)\ [\mathrm{ms^{-1}}]=$$
$$=\sqrt{0{,}8}(\sqrt{\mathrm{G}})\ [\mathrm{ms^{-1}}]=\sqrt{0{,}8}(\sqrt{\mathrm{kM}})\ [\mathrm{ms^{-1}}]=$$
$$=\sqrt{0{,}8\ \mathrm{k}}\ (\mathrm{k})\ [\mathrm{ms^{-1}}]=\sqrt{800}\ [\mathrm{kms^{-1}}],$$

vagyis előbbi eredményünket kaptuk meg.

## 7. A logaritmikus mértékegységek

A fizika és a technika számos területén célszerű nem magukkal az eredeti mennyiségekkel számolni, hanem azok logaritmusával.

Helyesebben szólva nem maguknak a mennyiségeknek a logaritmusával, hanem valamilyen, az illető mennyiség alapegységére vonatkoztatott viszonyszám logaritmusával. Az új mértékegység-rendszer bevezetésével egyidőben, amely kizárólag a 10-es számrendszer használatán alapul, célszerű a logaritmikus egységeknél is áttérni a 10-es alapú logaritmusra. Ez bizonyos nehézségekkel is jár, mint erre később rámutatunk.

### *7.1. A logaritmus definíciója. Alapfogalmak*

Bármely $x$ szám egyenlő egy tetszőleges c konstans, felemelve $x$ ugyanazon c konstans alapú logaritmusára. Így például c, $d$, e, 10, 2 stb. konstansok esetén:

$$x=c^{\log_c x}=d^{\log_d x}=\mathrm{e}^{\ln x}=10^{\lg x}=2^{\log_2 x}=\ldots. \quad (10)$$

A fenti formula alapján egyszerűen adódik a különböző alapú logaritmusok egymásba való átszámítása. Ugyanis:

$c^{\log_c x}=d^{\log_d x}$ és mindkét oldal „$c$" alapú logaritmusát véve:

$$\log_c x=\log_d x\cdot\log_c d.$$

Innen:

$$\log_d x=\frac{\log_c x}{\log_c d}.$$

Mivel „c" tetszőleges lehet, teljesen általánosan:

$$\log_d x=\frac{\ln x}{\ln d}=\frac{\lg x}{\lg d}=\frac{\log_2 x}{\log_2 d}=\ldots. \quad (11)$$

A fenti formula a logaritmusokkal való számolás legfontosabb formulájának tekinthető.

*Példa:*

$$\log_2 7=\frac{\lg 7}{\lg 2}=\frac{0{,}845}{0{,}301}=2{,}807.$$

Tehát a különböző alapú logaritmusok csupán egy szorzószámban különböznek egymástól. Vagy fordítva, egy konstans számmal szorzott logaritmus mindig egy más alapú logaritmusnak tekinthető. Legyen „A" egy mennyiség, illetve viszonyszám és $k$ egy konstans, akkor az $a=k\cdot\log_c A$ összefüggés mindig így is írható

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\log_c A}{\log_c d}=\log_d A=\log_c A^k\\ \text{ahol:}\ \log_c d&=\frac{1}{k},\quad \text{illetve}\quad d=c^{\frac{1}{k}}.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Ugyanakkor a „$k$" szorzót „$A$" hatványaként is bevihetjük a logaritmus alá. Így kapjuk a logaritmikus összefüggések három lehetséges alakját:

a) $k$ számmal szorzott logaritmus,

b) szorzót a logaritmus alá visszük hatványként,

c) áttérünk más alapú logaritmusra, ahol nincs szorzó.

Teljesen általános esetben az $a$, $b$, $c$ eljárásokat kombináljuk.

*Például:*

$$a = k \cdot \log_c A = k_1 \cdot \log_c A^{k_2}, \qquad \text{ahol } k = k_1 k_2,$$

$$a = k_1 \cdot \log_d A^{k_2}. \qquad \text{ahol } k = k_1 k_2 k_3,$$

$$\text{és } d = c^{\frac{1}{k_3}}.$$

A következőkben csak a híradástechnikában alkalmazott logaritmikus egységekkel foglalkozunk. A gyakorlatban elterjedt öt logaritmikus összefüggést az *5. táblázatban* tüntetjük fel.

Mint említettük, a különböző alapú logaritmusok csak egy konstans szorzóban különböznek egymástól. A „$k$" szorzókat a *6. táblázat* tünteti fel. A táblázat egyúttal a különböző logaritmikus egységek közötti átszámítást is megadja.

Például legyen $A=5$. Ez hány dB-nek felel meg? Ötféle módon számolhatjuk ki. A táblázat vízszintes sorait használjuk. A „dB" sorából:

$$a = 20 \lg 5 = 10 \log_{\sqrt{10}} 5 = \log_{\sqrt[20]{10}} 5 = 8{,}69 \cdot \ln 5 =$$
$$= 6{,}02 \log_2 5 = 13{,}98 \text{ dB}.$$

*5. táblázat*

| Számítás | Elnevezés | Alap | Jelölés |
|---|---|---|---|
| $a = \lg A$ | dekád | 10 | D |
| $a = 2 \lg A$ | bel | $\sqrt{10}$ | B |
| $a = 20 \lg A$ | decibel | $\sqrt[20]{10}$ | dB |
| $a = \ln A$ | neper | e | Np |
| $a = \log_2 A$ | oktáv | 2 | |

*6. táblázat* $a = k \log_c A$

| | | D | B | dB | Np | oktáv |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Egység | lg | $\log_{\sqrt{10}} A$ | $\log_{\sqrt[20]{10}} A$ | ln A | $\log_2 A$ |
| a | D | 1 | 0,5 | 0,05 | 0,434 | 0,301 |
| | B | 2 | 1 | 0,1 | 0,869 | 0,602 |
| | dB | 20 | 10 | 1 | 8,69 | 6,02 |
| | Np | 2,3 | 1,151 | 0,115 | 1 | 0,693 |
| | oktáv | 3,32 | 1,66 | 0,166 | 1,443 | 1 |

Az egységek közötti átszámításhoz a függőleges oszlopokat használjuk.

Például a dekád oszlopából:

$$1 \text{ D} = 2 \text{ B} = 20 \text{ dB} = 2{,}3 \text{ Np} = 3{,}32 \text{ oktáv}.$$

### 7.2. *A Np, B és dB mint feszültség- és teljesítményviszony logaritmusa*

A híradástechnikában éppen úgy, mint a matematikában kétféle alapú logaritmus terjedt el: a 10-es alapú és a természetes „e" alapú.

Sajnálatos módon a két logaritmus használata is kissé eltér egymástól.

Feszültségviszonyokra:

$$a = \ln \frac{U_1}{U_2} \text{ [Np]} = \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ [D]} = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ [B]} =$$
$$= 20 \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ [dB]}. \tag{12}$$

Teljesítményviszonyokra:

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \text{ [Np]} = \frac{1}{2} \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ [D]} = \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ [B]} =$$
$$= 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ [dB]}. \tag{13}$$

Tehát feszültségviszonyokra a Np, teljesítményviszonyokra a B és dB tűnik természetesebbnek, mert nem tartalmazza a 2-es szorzót, illetve osztót. A 2-es tényező nyilvánvalóan a feszültségről a teljesítményre való áttérésből adódik, a $P = \frac{U^2}{R}$ összefüggésből.

A 2-es tényező, amint láttuk, jelenthet a logaritmus előtt egy szorzó vagy osztót, jelentheti a log-jel után a négyzetre emelést vagy gyökvonást és jelenthet más alapú logaritmusra való áttérést.

A Np és dB eltérő definíciója történelmi okokra vezethető vissza. Ezen ma már változtatni nem lehet. Súlyosabb és indokolatlan viszont, hogy az SI-rendszer bevezetésével a dB lett alapegységnek elfogadva. A d=deci csupán szorzószámot jelent, az alapegység a B=bel.

Nem áll fenn az az indoklás, hogy a B túl nagy egység. Egyrészt a B és a Np közel azonos nagyságú egységek, másrészt ugyanúgy, mint más területeken, a szorzószámok alkalmazása, a dB, cB, mB kisebb egységek bevezetése minden további nélkül lehetővé teszik a dB használatát is, ha az alapegység a B. A dB alkalmazása különösen a fizikai képletek írását teszi nehézkessé. Így például, ha dB-ben akarunk feszültség- vagy teljesítményviszonyt kifejezni:

$$\frac{U_1}{U_2} = 10^{\frac{a}{20}} \quad \text{és:} \quad \frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a}{10}} \quad [a] = [\text{dB}].$$

Ha pedig $a$-t $B$-ben értjük:

$$\frac{U_1}{U_2} = 10^{\frac{a}{2}} \quad \text{és:} \quad \frac{P_1}{P_2} = 10^{a} \quad [a] = [\text{B}].$$

Hasonlóan zavaró egyéb képletekben is a dB használata. Például a reflexió kifejezésében:

$$a_r = 20 \lg \left|\frac{Z-Z_0}{Z+Z_0}\right| \text{ [dB]} = 2 \lg \left|\frac{Z-Z_0}{Z+Z_0}\right| \text{ [B]}.$$

A fentiek alapján világos, hogy feltétlenül szükséges a bel, mint alapegység bevezetése. Ebben az esetben fizikai formuláink egyszerűek és az SI-rendszer bevezetésének szellemében számértékre is helyesek maradnak, anélkül, hogy utalnunk kellene rá, milyen logaritmikus egységet használunk. Ettől függetlenül és ha konkrét adatokról van szó, automatikusan adódik a megfelelő szorzószám vagy betű használata.

*Például:*

$$a_r = 22 \text{ [dB]}, \quad a = 5 \text{ [cB] stb.}$$

### 7.3. *Az abszolút feszültség- és teljesítményszint*

A logaritmikus egységek puszta számok. Azonban sokszor előnyös, ha a logaritmikus egységek tényleges fizikai mennyiséget fejeznek ki. Ennek egyszerű módja, hogy az illető mennyiséget egy jól definiált alapegységhez viszonyítva fejezzük ki. A híradástechnikában két ilyen egység terjedt el: az abszolút feszültségszint és az abszolút teljesítményszint. Alapegységnek elfogadva:

$$U_0 = 0{,}775 \text{ V} \quad \text{és} \quad P_0 = 1 \text{ mW}.$$

Így:

Az abszolút feszültségszint:

$$20 \lg \frac{U^{[\mathrm{V}]}}{0{,}775} \text{ [dBu]}. \tag{14}$$

Az abszolút teljesítményszint:

$$10 \lg \frac{P^{[\mathrm{mW}]}}{1} \text{ [dBm]}, \tag{15}$$

ahol az „m" index a „milliwattra" utal.

*Példa*: Fejezzük ki 0,1 V, 5 V, 10 μW és 20 mW-ot abszolút szintekkel.

$$0{,}1 \text{ V} = 20 \lg \frac{0{,}1}{0{,}775} = -17{,}8 \text{ dBu},$$

$$5 \text{ V} = 20 \lg \frac{5}{0{,}775} = +16{,}2 \text{ dBu},$$

$$10 \ \mu\text{W} = 10 \lg 10^{-2} = -20 \text{ dBm},$$

$$20 \text{ mW} = 10 \lg 20 = +13 \text{ dBm}.$$

Itt a [V]=[dBu] és [mW]=[dBm] dimenziók közé egyenlőségjelét tehetünk, mert mindkettő feszültséget, illetve teljesítményt fejez ki.

### 7.4. *Logaritmikus szintek az akusztikában*

Az akusztikában a feszültségnek az effektív hangnyomás, a teljesítménynek a hangintenzitás, az 1 $m^2$-en áthaladó teljesítmény felel meg:

$$\begin{aligned} [\mathrm{p}] &= \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = Pa\right], \\ [\mathrm{I}] &= \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

A logaritmikus egységek bevezetéséhez az 1000 Hz-en füllel még éppen hallható

$$\begin{aligned} p_0 &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ [Pa, N/m}^2] \quad \text{és a hozzá tartozó:} \\ I_0 &= 10^{-12} \text{ [W/m}^2], \end{aligned} \tag{17}$$

alapegységeket választották. Így a logaritmikus hangszint:

$$a = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 20 \lg \frac{p}{p_0} \text{ [dB]}.$$

A híradástechnika és akusztika további logaritmikus egységeinek a tárgyalása helyett csupán az irodalomra utalunk.

### 7.5. *A fázisszög figyelembevétele a logaritmikus egységeknél*

A 10-es alapú logaritmusra való áttérés semmiféle nehézséget nem jelent, amíg valós mennyiségekről van szó. Áthidalhatatlan nehézségek merülnek azonban fel, ha komplex mennyiségekről van szó, vagyis a fázisforgatást is figyelembe kell venni. Ugyanis

$$\left.\begin{aligned} &\text{ha: } \bar{A} = |A| e^{j\varphi} = |A| 10^{0{,}434 j\varphi} \quad [\varphi \text{ radián}] \\ &\text{akkor: } \ln A = \ln |A| + j\varphi \\ &\qquad \lg A = \lg |A| + j\, 0{,}434\, \varphi \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

A természetes logaritmusnál a képzetes rész közvetlenül megadja a fázisforgatást radiánban, a 10-es alapúnál viszont csak egy konstanssal szorozva.

A nehézségek érzékeltetésére csak egy példát hozunk fel. Vegyük a feszültségeloszlást egy távvezeték mentén. Ismeretes, hogy:

$$U(x) = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x} = A e^{(\alpha + j\beta)x} + B e^{-(\alpha + j\beta)x},$$

ahol a terjedési állandó:

$$\gamma = \alpha + j\beta \text{ [Np, radián/km]}.$$

Áttérve 10-es alapra:

$$U(x) = A\, 10^{\left(\frac{\alpha}{20} + j\,0{,}434\,\beta\right)x} + B\, 10^{-\left(\frac{\alpha}{20} + j\,0{,}434\,\beta\right)x},$$

ahol:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \text{[dB, radián/km]}.$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti írásmód rendkívül nehézkes és teljesen áttekinthetetlen. További bonyodalmat jelent, hogy az sh*x*, ch*x*, th*x* függvények mind úgy vannak értelmezve, hogy *x* (illetve komplex Z) Np és radiánban van megadva. Ezért a fizikai képletekben továbbra is meg kell maradnunk a Np használata mellett. Azok az országok, amelyek eddig is a dB-t használták, mint az USA és Anglia, az elméleti irodalomban kizárólag ezeket a természetes egységeket használják.

## Irodalom


1. Ligeti Imre: A nemzetközi mértékegység-rendszer és használata, 1979.
2. Cebe László: Átviteltechnika I–II. KKVMF jegyzet, 1979.