Koncentrált paraméterű szűrők ekvivalens zajsávszélességének meghatározása kifejtési tétellel

B. NAGY PÉTER
BME Alkalmazott
Biofizikai Laboratórium

Zajelnyomás szempontjából egy szűrő szelektivitását a szűrő ekvivalens zajsávszélességével jellemezhetjük a legegyszerűbben. Az eljárásnak két alapvető hiányossága van. Egyrészt, hogy a szűrő kimeneti zajteljesítményére csak „fehér" bemeneti zaj esetén kapunk helyes értéket, másrészt, hogy a szűrő ekvivalens zajsávszélessége csak egy rendkívül nehézkes integrálással nyerhető a szűrő átviteli függvényéből.

A szűrő átviteli függvényét egy alkalmas korrekciós tényezővel kiegészítve az elsőként említett probléma gyakran megkerülhető. Egy ilyen korrekció azonban bizonyos zajforrások (pl. flickerzaj) esetén csak durva közelítéssel található, ugyanis a zaj teljesítményspektruma nem állítható elő egy koncentrált paraméterű szűrő átviteli függvényeként [1, 2].

Az alábbiakban a másodikként említett problémával fogunk foglalkozni. Egy egyszerű módszert mutatunk be, ami lehetővé teszi az ekvivalens zajsávszélesség meghatározásához szükséges integrálás elkerülését.

Alkalmazott jelölések

$A(p)$	az átviteli függvény számlálója,
$B(p)$	az átviteli függvény nevezője,
C_{ik}, S_{ik}	parciális együtthatók,
f	frekvencia,
f_n	a normálási frekvencia,
f_m	a maximális átvitelhez tartozó frekvencia,
$g(\omega)$	pozitív valós függvény,
i, k	természetes számok,
$I(z)$	komplex integrál,
$K(p)$	átviteli függvény
$K_t(p)$	transzformált átviteli függvény,
n	a pólusok száma,
n_1	a valós pólusok száma,
n_2	a komplex póluspárok száma,
$N(k)$	indexfüggvény,
p	komplex frekvencia,
p_i	átviteli pólus,
p_{ti}	transzformált átviteli pólus,
z	komplex változó,
β	ekvivalens zajsávszélesség,
μ_i	az i-edik pólus multiplicitása,
ω	körfrekvencia,
ω_0, ω_1	transzformációs paraméterek.

Beérkezett: 1979. VIII. 6.

Az ekvivalens zajsávszélesség meghatározása

A $K(p)$ átviteli függvénnyel rendelkező szűrő ekvivalens zajsávszélessége

$$\beta=\frac{1}{|K(2\pi j f_n)|^2}\int_0^\infty |K(2\pi j f)|^2 df, \tag{1}$$

ahol f_n a normálási frekvencia. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a $|K(2\pi j f_n)|$ értéket mindig egységnyinek választjuk. Megjegyzendő, hogy az ekvivalens zajsávszélesség definíciójában $|K(2\pi j f_n)|$ helyett gyakran az átviteli függvény abszolút értékének a maximuma, $|K(2\pi j f_m)|$ szerepel. Vizsgálataink során az előbbi, általánosabb definíciót fogjuk használni.

Az (1)-ben szereplő határozott integrál analitikus úton történő meghatározása lehetséges ugyan néhány speciális esetben [3, 4 és 5], de szükségesnek látszik egy általános érvényű eljárás kidolgozása is.

Közismert, hogy racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformációja egyszerűen végezhető el a Heaviside-féle kifejtési tétel alkalmazásával [6]. A módszer lényege, hogy a racionális törtfüggvényt parciális törtek összegére bontjuk, és az inverz transzformációt tagonként végezzük el. Kézenfekvőnek látszik, hogy az ekvivalens zajsávszélesség számítása során felmerülő bonyolult integrálást is hasonló módon próbáljuk meg elkerülni.

$K(p)$-t írjuk fel polinomok hányadosaként:

$$K(p)=\frac{A(p)}{B(p)} \tag{2}$$

Az átviteli függvény pólusait jelöljük p_i-vel, az i-edik pólus multiplicitását pedig μ_i-vel.

$$B(p)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{\mu_i}(p-p_i)^k \tag{3}$$

Abban az igen gyakori esetben, amikor az átviteli függvénynek csak egyszeres pólusai vannak a számítások jelentősen egyszerűsödnek, ezért célszerűnek látszik ezzel a speciális esettel nem csak az általános megoldás részeként, hanem önállóan is foglalkozni.

Kifejtési tétel egyszeres pólusok esetére

Az ekvivalens zajsávszélesség definíciójában szereplő határozott integrál argumentumát jelöljük $g(\omega)$-val.

$$\beta=\int_0^\infty g(\omega)df=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(\omega)d\omega, \tag{4}$$

ahol

$$g(\omega)=[K(p)K(-p)]_{p=j\omega} \tag{5}$$

$g(\omega)$-ra alkalmazzuk az egyszeres pólusok esetére vonatkozó Heaviside-féle kifejtési tételt:

$$g(\omega)=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)+B(p_i)B'(-p_i)}\frac{1}{p-p_i}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{A(-p_i)A(p_i)}{B'(-p_i)B(p_i)+B(-p_i)B'(p_i)}\frac{1}{-p-p_i}\right]_{p=j\omega} \tag{6}$$

(6)-ban figyelembe vettük, hogy $|K(p)|^2$ pólusai rendre p_i és $-p_i(i=1, 2, \ldots)$.

Hozzuk közös nevezőre a p_i és a $-p_i$ pólusokhoz tartozó parciális törteket és használjuk ki, hogy $B(p_i)=0$.

$$g(\omega)=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)}\frac{-2p_i}{p_i^2-p^2}\right]_{p=j\omega}=$$
$$=2\sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)}\frac{-p_i}{p_i^2+\omega^2} \tag{7}$$

A (7) szerinti $g(\omega)$ függvényt helyettesítsük be (4)-be:

$$\beta=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)}\int_0^\infty\frac{-p_i}{p_i^2+\omega^2}d\omega \tag{8}$$

A (8) szerinti határozott integrál tetszőleges komplex z mellett $I(z)$ [7]:

$$I(z)=\int_0^\infty\frac{z}{z^2+\omega^2}d\omega=\begin{bmatrix} 0 & \text{ha} & z=0, & \\ \pi/2 & \text{ha} & \operatorname{Re} z>0 & \text{és} \\ -\pi/2 & \text{ha} & \operatorname{Re} z<0. & \end{bmatrix} \tag{9}$$

Mivel Re p_i mindig negatív, β-ra az alábbi végeredményt nyerhetjük:

$$\beta=1/2\sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)} \tag{10}$$

A fenti végeredménnyel kapcsolatban fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy β-t akkor kapjuk a szokásos mértékegységben, tehát Hz-ben, ha a pólusok értékét is a szokásos mértékegységben, tehát rad/secban helyettesítjük be. Ha a pólusok és zérusok értéke Hz-ben áll rendelkezésünkre, a (10) egyenlet jobb oldalát 2π-vel meg kell szorozni, hogy β-t változatlanul Hz-ben kapjuk meg.

Példák a kifejtési tétel alkalmazására egyszeres pólusok esetén

Egyszeres valós pólusok

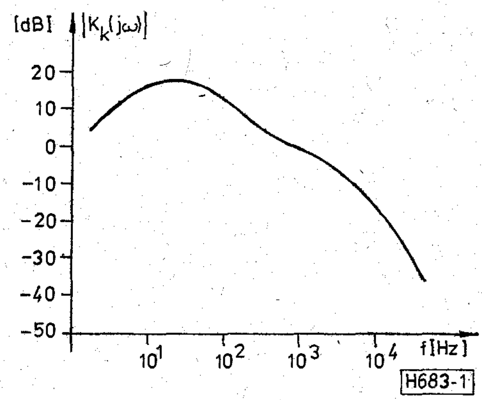
Határozzuk meg egy lemezjátszó korrekciós erősítő ekvivalens zajsávszélességét! Célunk a kifejtési tétel számítástechnikájának bemutatása, ezért az egész számok érdekében némileg eltérünk a szabványos korrekciós karakterisztikától. A korrekciós erősítő átviteli függvénye:

$$K_k(p)=\frac{4.01\ 10^7 p(p+500)}{(p+10)(p+50)(p+(2000)(p+20\,000)} \tag{11}$$

A korrekciós erősítő átviteli függvénye 1 kHz-re van normáiva (*1. ábra*). A 11. szerinti $K_k(p)$-hen azt is figyelembe vettük, hogy a tényleges szűrőt tartalmazó erősítő átvitele 10 Hz alatt és 20 KHz felett 20 dB/D meredekséggel csökken.

A korrekciós erősítő ekvivalens zajsávszélessége β_k. A (10) egyenletbe történő behelyettesítéskor vegyük figyelembe, hogy a törésponti frekvenciákat Hz-ban adtuk meg!

$$\beta_K=\pi\left[\frac{(-10)\ 10\ 490\ 510}{20\ 60\ 40\ 2010\ 1990\ 20\,010\ 19\,900}+\ldots\right]\cdot$$
$$\cdot[4.01\ 10^7]^2=9175\ \text{Hz} \tag{12}$$



1. ábra. A korrekciós erősítő átviteli függvénye

Egyszeres komplex póluspárok

Komplex póluspárok esetén a (10) egyenlet szerinti összegezésnél célszerű figyelembe venni, hogy a komplex póluspárok csak páronként adnak valós eredményt, azaz

$$1/2\left[\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)}+\frac{A(p_i^*)A(-p_i^*)}{B'(p_i^*)B(-p_i^*)}\right]=$$
$$=\operatorname{Re}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)} \tag{13}$$

A (13) egyenlet felhasználásával korábbi végeredményünket írjuk át egy látszólag ugyan bonyolultabb, de komplex póluspárok esetén a gyakorlatban jobban használható alakba:

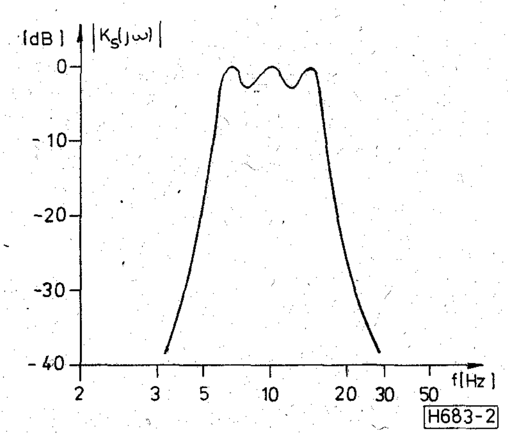
$$\beta=1/2\sum_{i=1}^{n_1}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)}+\sum_{i=n_1+1}^{n_1+1+n_2}\mathrm{Re}\frac{A(p_i)A(-p_i)}{B'(p_i)B(-p_i)} \tag{14}$$

$K(p)$-nek n_1 valós pólusa és n_2 komplex póluspárja van, tehát az összes pólus száma $n=n_1+2n_2$.

Példaként határozzuk meg az alábbi 10 Hz-re hangolt harmadfokú egyenletes (Csebisev-) közelítésű sávszűrő ekvivalens zajsávszélességét, β_s-et. A sávszűrő átviteli függvénye

$$K_s(p)=\frac{2\cdot 43\,10^5\,p^3}{(p^2+0.9p+43)(p^2+3p+100)(p^2+21p+233)} \tag{15}$$

A vizsgált sávszűrő átviteli függvénye a *2. ábrán* látható.



2. ábra. A sávszűrő átviteli függvénye

A fenti eredményeink alapján a $K_s(p)$ átviteli függvénnyel rendelkező sávszűrő ekvivalens zajsávszélessége minden további nélkül meghatározható. Célszerű azonban a feladatot az alábbi tétel felhasználásával egyszerűsíteni [5].

Ha egy $K_a(p)$ átviteli függvénnyel rendelkező aluláteresztő szűrő a $p/\omega_1\langle-\rangle p/\omega_0+\omega_0/p$ frekvenciatranszformációval egy $K_s(p)$ átviteli függvénnyel rendelkező sávszűrővé transzformálható, akkor a két szűrő ekvivalens zajsávszélessége között az alábbi egyszerű kapcsolat áll fenn:

$$\beta_s=\frac{\omega_0}{\omega_1}\beta_a \tag{16}$$

Mivel a vizsgált sávszűrő átviteli függvénye logaritmikus frekvencialéptékben szimmetrikus, a fenti segédtétel alkalmazásával feladatunkat jelentősen egyszerűsíthetjük. Vegyük észre, hogy $K_s(p)$ a $p\langle-\rangle p/10+10/p$ helyettesítéssel nyerhető az alábbi aluláteresztő jellegű átviteli függvényből:

$$K_a(p)=\frac{0{,}243}{(p+0.3)(p^2+0.3p+0.81)} \tag{17}$$

Határozzuk meg a fenti aluláteresztő szűrő ekvivalens zajsávszélességét, β_a-t. $K_a(p)$ pólusai -0.3 és $-0.15\ \pm j\,0.89$. A behelyettesítés részleteit ezúttal mellőzve:

$$\beta_a=0{,}767\ \mathrm{Hz} \tag{18}$$

(16) szerint a keresett ekvivalens zajsávszélesség:

$$\beta_s=10\beta_a=7{,}67\ \mathrm{Hz}. \tag{19}$$

Kifejtési tétel többszörös pólusok esetén

Általánosítsuk a fenti eljárást többszörös pólusok esetére is! Az (5) szerinti $g(\omega)$ függvény a szokásos módon parciális törtek összegére bontható.

$$g(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{C_{ik}}{(p_i^2+\omega^2)^k} \tag{20}$$

A C_{ik} együtthatók az alábbi módon határozhatók meg [6]:

$$C_{ik}=\frac{1}{(\mu_i-k)!}\frac{\partial^{\mu i-k}}{\partial(\omega^2)^{\mu i-k}}(\omega^2+p_i^2)^{\mu_i}K(j\omega)$$

$$K(-j\omega)\Big|_{\omega^2=-p_i^2} \tag{21}$$

A keresett ekvivalens zajsávszélességet a (20) egyenletnek a (4)-be történő behelyettesítésével nyerhetjük:

$$\beta=1/2\pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\mu_i}C_{ik}\int_0^\infty\frac{d\omega}{(\omega^2+p_i^2)^k} \tag{22}$$

Tetszőleges z komplex számra [5]

$$\int_0^\infty\frac{d\omega}{(z^2+\omega^2)^k}=\frac{N(k)}{z^{2k-1}}\,I(z), \tag{23}$$

ahol $I(z)$ a (9) egyenlet szerinti, és $N(k)$ az alább indexfüggvény:

$$N(k)=1\cdot1/2\cdot3/4\cdot\ldots\cdot(2k-3)/(2k-2)=$$

$$=\frac{(2k-2)!}{((k-1)!)^2 2^{2k-2}} \tag{24}$$

Mivel $\mathrm{Re}\,p_i$ mindig negatív $I(p_i)=-\pi/2$.

$$\beta=1/2\pi\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\mu_i}C_{ik}\frac{N(k)}{p_i^{2k-1}}\frac{-\pi}{2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\mu_i}S_{ik}, \tag{25}$$

ahol

$$S_{ik}=\frac{-C_{ik}N(k)}{4p_i^{2k-1}}. \tag{26}$$

A (25) egyenlet szerint az ekvivalens zajsávszélesség meghatározása nagyon egyszerűen, az S_{ik} együtthatók összegzésével végezhető el. Sajnos azonban az S_{ik}, ill. ezen belül a C_{ik} együtthatók meghatározása komoly nehézséget jelent.

Ha a $K(p)$ átviteli függvényt a C_{ik} együtthatók meghatározása előtt egy egyszerű transzformációnak vetjük alá, akkor a C_{ik} együtthatókat a továbbiakban már a racionális törtfüggvények inverz Laplacetranszformációjánál megszokott és viszonylag egyszerű módszerrel számíthatjuk ki.

$$C_{ik}=\frac{1}{(\mu_i-k)!}\,\frac{\partial^{\mu_i-k}}{\partial p^{\mu_i-k}}(p-p_{it})^{\mu_i}K_t(p)\Big|_{p=p_{it}}, \qquad (27)$$

ahol p_{it} és $K_t(p)$ az alábbi transzformált mennyiségek:

$$p_{it}=-p_i^2 \qquad (28)$$

és

$$K_t(p)=K(p)\Big|_{p_i=p_{it}} \qquad (29)$$

Ez a megoldás természetesen egyszeres pólusok esetén is alkalmazható, de ebben az esetben már a segédtranszformáció nélkül kapott eredményünk, (10) is egyszerű behelyettesítéssel szolgáltatja a keresett ekvivalens zajsávszélességet.

Valós pólusok esetén S_{ik} is valós, míg komplex póluspárok esetén a két megfelelő komplex együttható összege lesz valós.

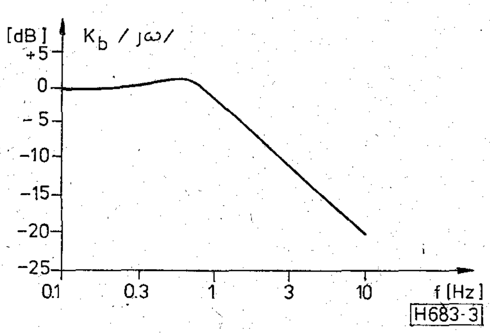
Mivel a C_{ik} együtthatók meghatározása még a javasolt számítástechnikai eljárás mechanikus alkalmazása esetén is meglehetősen nehézkes, célszerűnek látszik a többszörös pólusokat több egymáshoz közeli különböző pólusként kezelni. A számításokat ilyenkor feltétlenül kalkulátorral kell végezni, mert ez az eljárás fokozottan érzékeny a részeredmények számítási pontatlanságaira.

Példa a kifejtési tétel alkalmazására többszörös pólusok esetén

Határozzuk meg az alábbi $K_b(p)$ átviteli függvénnyel rendelkező amplitúdókorrektor ekvivalens zajsávszélességét!

$$K_b(p)=\frac{(p+0{,}5)(p+2)}{(p+1)^3} \qquad (30)$$

Az átviteli karakterisztika 0 Hz-re van normáiva (*3. ábra*).



3. ábra. Az amplitúdókorrektor átviteli függvénye

A C_{ik} együtthatók meghatározásához végezzük el $K_b(p)$-n a szükséges átalakítást:

$$K_{bt}(p)=\frac{(p+0{,}25)(p+4)}{(p+1)^3} \qquad (31)$$

A C_{ik} együtthatókat a (27) egyenlet felhasználásával határozhatjuk meg. A nulladik-, első- és másodrendű deriváltak rendre $p^2+4{,}25p+1$, $2p+4{,}25$ és 2, így $C_{13}=-0{,}56$, $C_{12}=0{,}56$ és $C_{11}=0{,}25$. Mivel a zérusok és pólusok frekvenciáját Hz-ben adtuk meg

$$\beta_b=2\pi(0.25+0.56/2-0.56\cdot 3/8)=2.0125\ \text{Hz} \qquad (32)$$

Mint arra már korábban utaltunk, többszörös pólusok esetén is kielégítő pontosságú eredmény nyerhető az egyszeres pólusok esetére kapott eredményünk (10) felhasználásával.

Bontsuk fel a $K_b(p)$ átviteli függvény nevezőjét az alábbi közelítés felhasználásával:

$$K_b(p)\simeq\frac{(p+0{,}5)(p+2)}{(p+0{,}99)(p+1)(p+1{,}01)} \qquad (33)$$

A (10) egyenletben kijelölt összegzések elvégzésével β_b közelítő értékére 2,0128 Hz-et kapunk. A számítások során több közel egyforma nagy szám különbségét kell képeznünk, ami hátrányos a végeredmény pontossága szempontjából. Más szóval, ez az eljárás a részletszámítások során kihasználja a kalkulátor pontosságát (és gyorsaságát is).

Következtetések

A fentiekben áttekintettük a Heaviside-féle kifejtési tétel alkalmazásának lehetőségét koncentrált paraméretű, lineáris, invariáns szűrők ekvivalens zajsávszélességének meghatározására. A parciális törtek együtthatóit a jólismert módon határozhatjuk meg, amelyekből a keresett ekvivalens zajsávszélesség egyszerű összegzéssel nyerhető. A javasolt módszer a legegyszerűbb kalkulátorral is gyors, pontos eredményt szolgáltat.

IRODALOM

[1] *Ambrózy A.:* Elektronikus zajok. Műszaki Könyvkiadó, 1972.
[2] *Cooke, H. F.:* Causes of noise. Druckschrift M-1 der Firma Texas Instruments, Dallas, München.
[3] *Bode, H. W.:* Hálózatok és visszacsatolt erősítők tervezése. Műszaki Könyvkiadó, 1961.
[4] *B. Nagy P.:* Tranziens elven történő ultrahang szintmérés. Egyetemi doktori értekezés, 1979.
[5] *B. Nagy P.:* Transzformált szűrők ekvivalens zajsávszélessége. Híradástechnika (közlés alatt).
[6] *Géher K.:* Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, 1968.
[7] *Korn, G. A., Korn, T. H.:* Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, 1975.