Transzformált szűrők ekvivalens zajsávszélessége

B. NAGY PÉTER
BME Alkalmazott Biofizikai Laboratórium

Kimutatjuk, hogy ha két lineáris, invariáns szűrő transzfér függvénye egymásból a $p+p^{-1} \langle - \rangle s$ transzformációval nyerhető, akkor a két szűrő ekvivalens zajsávszélessége között egy nagyon egyszerű, közvetlen kapcsolat áll fenn. A javasolandó segédtétel bizonyítása után egy egyszerű példát mutatunk be annak felhasználására.

Alkalmazott jelölések

a, Q	szűrőparaméterek,
$f(x)$	általános páros skalárfüggvény,
$K(p)$	az eredeti szűrő transzfer függvénye,
$K_t(p)$	a transzformált szűrő transzfer függvénye,
p	komplex frekvencia,
s	transzformált komplex frekvencia,
n	a szűrő fokszáma,
x, y	általános skalár változók,
β	az eredeti szűrő ekvivalens zajsávszélessége,
β_t	a transzformált szűrő ekvivalens zajsávszélessége,
ω, ω'	frekvencia,
Ω	transzformált frekvencia,
ω_0, ω_1	transzformációs paraméterek.

A transzformáció hatása az ekvivalens zajsávszélességre

A szokásos $p+p^{-1} \langle - \rangle s$ transzformáció esetén a két frekvenciatartomány között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$S/\omega_1 = p/\omega_0 + \omega_0/p \tag{1}$$

és

$$\Omega/\omega_1 = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega. \tag{2}$$

ω_0 és ω_1 két független transzformációs paraméter, ti. a viszonyítási frekvenciák a két különböző frekvenciatartományban. A továbbiakban ω_1-et válasszuk egységnek.

A transzformált szűrő transzfer függvényét a fenti frekvenciatranszformáció segítségével nyerhetjük az eredeti szűrő transzfer függvényéből.

$$K_t[p] = K[s] = K[p/\omega_0 + \omega_0/p] \tag{3}$$

Beérkezett: 1979. VI. 4.

A két szűrő ekvivalens zajsávszélessége a jól ismert definíció alapján a következő:

$$\beta = \frac{[2\pi]^{-1}}{|K[j\omega]|^2_{\max}} \int_0^\infty |K[j\omega]|^2 \, d\omega \tag{4}$$

és

$$\beta_t = \frac{[2\pi]^{-1}}{\left|K\left[j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\right|^2_{\max}} \int_0^\infty \left|K\left[j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\right|^2 d\omega. \tag{5}$$

Bár a hosszadalmas integrálás megfelelő irodalmi segédlet [1] felhasználásával gyakran elkerülhető, általában már β meghatározása is nehézkes. β_t kiszámítása látszólag még bonyolultabb, de — mint ahogy azt a későbbiekben kimutatjuk — ez valójában nincs így, mivel β és β_t között egy nagyon egyszerű, közvetlen kapcsolat található.

A későbbiekben bizonyítandó tétel szerint

$$\beta_t = \omega_0 \beta, \tag{6}$$

vagyis a transzformált szűrők ekvivalens zajsávszélessége tulajdonképpen invariáns a transzformációra, mindössze a viszonyítási frekvenciák hányadosával (ω_0) szorzódik meg.

A javasolt tétel bizonyítása

Könnyen belátható, hogy

$$|K[j\omega]|_{\max} = \left|K\left[j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\right|_{\max} \tag{7}$$

és

$$\int_0^\infty \left|K\left[j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\right|^2 d\omega =$$

$$= \omega_0 \int_0^\infty \left|K\left[j\left(\omega' - \frac{1}{\omega'}\right)\right]\right|^2 d\omega', \tag{8, 9}$$

így a javasolt tétel bizonyításához elegendő kimutatni, hogy

$$\int_0^\infty \left|K\left[j\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\right]\right|^2 d\omega=\int_0^\infty |K[j\omega]|^2\, d\omega. \qquad (10)$$

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy minden páros $f(x)$ függvényre

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx. \qquad (11)$$

Mivel minden lineáris, invariáns szűrő transzfer függvények abszolút értéke a frekvencia páros függvénye [2], így (11)-ből (10) egyértelműen következik.

A (11) bal oldalába helyettesítsünk be egy új y változót, amelyre

$$y=x-\frac{1}{x}. \qquad (12)$$

Mivel az $y(x)$ függvény a $[0, \infty]$ intervallumban szigorúan monoton, így invertálható is. Inverze az alábbi $x(y)$ függvény:

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}, \qquad (13)$$

továbbá

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}. \qquad (14)$$

Alakítsuk át a (11) egyenlet bal oldalát a (12), (13) és (14) egyenletek felhasználásával.

$$\int_0^\infty f\left(x-\frac{1}{x}\right)dz=\int_{-\infty}^\infty f(y)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right]dy. \qquad (15)$$

(15) bal oldalán bontsuk fel az integrálási tartományt két részre. Az így kapott összeg két utolsó tagjában cseréljük fel az integrálási változó előjelét, és használjuk ki, hogy $f(y)$, $f(x)$-hez hasonlóan, páros függvény.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f\left(x-\frac{1}{x}\right)dz&=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)dy+\frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy-\\ &-\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} f(y)\,dy-\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} f(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy=\\ &=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\,dy+\frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy+\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\,dy-\frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy=\\ &=\int_0^\infty f(y)\,dy=\int_0^\infty f(x)\,dx \end{aligned} \qquad (16)$$

Példa a segédtétel alkalmazására n-szeres elsőfokú aktív sávszűrők ekvivalens zajsávszélessége

Az alábbiakban egy egyszerű példát mutatunk be a fentiekben levezetett segédtétel alkalmazására. Határozzuk meg az olyan szűrők ekvivalens zajsávszélességét, melyek n db azonos elsőfokú sávszűrő alaptagot tartalmaznak!

A vizsgált szűrők transzfer függvénye, $K_t(p)$, az alábbi módon adható meg:

$$K_t[p]=\{K_{t1}[p]\}^n. \qquad (17)$$

Elsőfokú sávszűrőnek nevezzük az alábbi két transzfer függvény valamelyikével leírható szűrőket.

$$K_{t1,1}[p]=\frac{1+a^2}{a^2}\,\frac{pa/\omega_0}{[1+pa/\omega_0][1+p/a\omega_0]} \qquad (18)$$

$$K_{t1,2}[p]=\frac{p/Q\omega_0}{1+p/Q\omega_0+p^2/\omega_0^2} \qquad (19)$$

$K_{t1,1}(p)$ két valós pólussal, $K_{t1,2}(p)$ pedig egy komplex póluspárral rendelkezik. A két szűrőfajta között fennálló fizikai különbségek (pl tranzienseik jellege) matematikai szempontból nem lényegesek, hiszen alkalmas helyettesítéssel teljesen azonos alakra hozhatók:

$$Q=\frac{1}{a+a^{-1}}. \qquad (20)$$

A továbbiakban ezért általánosan használjuk a (19) szerinti transzfer függvényt minden elsőfokú sávszűrő jellemzésére. A $K_t(p)$ transzfer függvénnyel rendelkező szűrő ekvivalens zajsávszélességének, β_t-nek a meghatározása a definícióban szereplő bonyolult integrálás elvégzésével rendkívül nehéz lenne, azért használjuk fel a fenti segédtételt.

$K_t(p)$-t írjuk át a transzformáció elvégzésére alkalmasabb alakba:

$$K_t[p]=\left[\frac{p/Q\omega_0}{1+p/Q\omega_0+p^2/\omega_0^2}\right]^n=\left[\frac{1}{1+Q\left[\frac{p}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{p}\right]^2}\right]^n. \qquad (21)$$

A fenti segédtétel szerint

$$\beta_t=\frac{\omega_0}{Q}\beta, \qquad (22)$$

ahol β az alábbi $K(p)$ transzfer függvénnyel rendelkező szűrő ekvivalens zajsávszélessége:

$$K[p]=\left[\frac{1}{1+p}\right]^n, \qquad (23)$$

és

$$\beta=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |K[j\omega]|^2\, d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{[1+\omega^2]^n}. \qquad (24)$$

A (24)-ben szereplő határozott integrálra egyszerű rekurzív formulát találhatunk.

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{[1+\omega^2]^n} = \frac{\omega}{[1+\omega^2]^n}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-2n\omega^2}{[1+\omega^2]^{n+1}}\,d\omega =$$

$$= 2n \int_0^\infty \frac{\omega^2}{[1+\omega^2]^{n+1}}\,d\omega \qquad (25)$$

A (25) egyenlőség bal oldalát bontsuk törzstényezős alakra:

$$\frac{\omega^2}{[1+\omega^2]^{n+1}} \equiv \frac{1}{[1+\omega^2]^n} - \frac{1}{[1+\omega^2]^{n+1}}, \qquad (26)$$

így

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{[1+\omega^2]^n} = 2n\left\{\int_0^\infty \frac{d\omega}{[1+\omega^2]^n} - \int_0^\infty \frac{d\omega}{[1+\omega^2]^{n+1}}\right\}. \qquad (27)$$

(27) rendelkezésével kaphatjuk meg a keresett rekurzív formulát:

$$\frac{2n-1}{2n}\int_0^\infty \frac{d\omega}{(1+\omega^2)^n} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{n+1}}. \qquad (28)$$

Az $n=1$ esetben az integrálás könnyen elvégezhető:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2} = \operatorname{artg}\omega\Bigg|_0^\infty = \pi/2. \qquad (29)$$

(28) és (29) felhasználásával tetszőleges n esetében is zárt formulát adhatunk a (27) szerinti határozott integrálra:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{[1+\omega^2]^n} = \frac{\pi}{2}\left[1\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{2n-3}{2n-2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}}. \qquad (30)$$

(22), (24) és (30) felhasználásával az n-szeres elsőfokú sávszűrők ekvivalens zajsávszélessége az alábbi:

$$\beta_t = \frac{\omega_0}{4Q}\,\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}}. \qquad (31)$$

Végkövetkeztetések

A fentiekben kimutattuk, hogy a lineáris, invariáns szűrők ekvivalens zajsávszélességét — a viszonyítási frekvenciák hányadosától eltekintve — nem befolyásolja a széleskörben használatos $p+p^{-1}$ $\langle - \rangle$ s transzformáció. A tétei gyakorlatilag minden szűrőre alkalmazható, de tényleges egyszerűsítést csak az aluláteresztőből transzformált sávszűrők esetében tesz lehetővé, amikor is a vizsgált szűrő transzfer függvénye logaritmikus frekvenialéptékben szimmetrikus [3]. Befejezésül a javasolt segédtétel egy konkrét felhasználási lehetőségét is áttekintettük.

IRODALOM

[1] *Bode, H. W.:* Hálózatok és visszacsatolt erősítők tervezése. Műszaki Könyvkiadó, 1961.

[2] *Géher Károly:* Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, 1968.

[3] *B. Nagy Péter:* Tranziens elven történő ultrahang szintmérés. Egyetemi doktori értekezés, 1979.