

## Inhomogén elosztott paraméterű RC-vonalak koncentrált paraméterű hálózati modellje

ETO 621.3.011.732.24

Az integrált áramkörti technikában kialakított félvezető ellenállások és összeköttetések alapvetően elosztott paraméterű RC vonalak. Az integrált áramkörök számítógépes analízise megköveteli az elosztott RC vonalak modelljének a programba építését.

Az elosztott RC vonalak szokásos modelljei közül az ún. vezető pólusokkal történő modellezés elsősorban a magában álló vonal átviteli tulajdonságainak vizsgálatát teszi lehetővé. Programba építése körülményes, ha egyáltalán lehetséges, és rendszerint nagyszámú mátrixiterációt végrehajtó speciális szubrutinok kialakítását követeli meg [1].

Célszerű ezért olyan modellel helyettesíteni az RC vonalat, amely a programban megengedett koncentrált paraméterű hálózati elemeket tartalmaz. Kézenfekvő az RC létrahálózatok használata. Azonban ezek adott optimum (pl. maximális lapos közelítés) elérésére nehezen identifikálhatók. Célul tűztük ki ezért olyan koncentrált paraméterű modell kialakítását, amely az admittancia-paramétereket azonos rendben maximális laposan közelíti és az approximáció rendjének növelésekor szisztematikusan fejleszthető tovább, ideértve az identifikáló egyenletrendszert is.

A dolgozatban bemutatjuk az admittancia-paraméterek  $s$  szerinti sorfejtése együtthatóinak meghatározására kidolgozott eljárást. Ezután meghatározzuk az admittancia-karakterisztikát maximális laposan approximáló hálózatok struktúráját, majd bemutatjuk ezen hálózatok paraméter-identifikációját.

### 1. Elosztott paraméterű RC vonalak admittancia karakterisztikája

Az admittancia-paraméterek  $s$  szerinti sora együtthatóinak meghatározását az alábbiakban  $r(x) = R_0/f(x)$ ;  $c(x) = C_0/(x)$  paraméterekkel rendelkező vonalra mutatjuk be, de az eljárás minden nehézség nélkül általánosítható tetszés szerinti  $r(x)$ ,  $c(x)$  profilfüggvényekkel rendelkező vonalakra is.

Az  $x$  tengely mentén 0 és  $L$  között elhelyezkedő RC vonal leíró egyenletei

$$-\frac{dU}{dx} = \frac{R_0}{f} I; \quad -\frac{dI}{dx} = sC_0 f U, \quad (1a; b)$$

amelyekből a feszültségre az alábbi másodrendű egyenlet írható fel:

$$\frac{d}{dx} \left( f \frac{dU}{dx} \right) - sR_0 C_0 f U = 0. \quad (2)$$

Célunk az admittancia-paraméterek

$$y_{ik}(s) = y_{ik}^{(0)} + s y_{ik}^{(1)} + s^2 y_{ik}^{(2)} + \dots \quad (3)$$

alakú sorának előállítására. E célból először meghatározzuk a feszültség

$$U(x, s) = U^{(0)}(x) + s U^{(1)}(x) + s^2 U^{(2)}(x) + \dots \quad (4)$$

alakú sorának együtthatóit, ahol  $U^{(n)}(x)$  még az  $U_1 = U(0, s)$  és  $U_2 = U(L, s)$  mennyiségektől is lineárisan függ. Ezek után a (3) sor együtthatói  $(1/a)$  felhasználásával az

$$y_{11}^{(n)} U_1 + y_{12}^{(n)} U_2 = - \frac{f}{R_0} \frac{dU^{(n)}}{dx} \Big|_{x=0} \quad (5a)$$

$$y_{21}^{(n)} U_1 + y_{22}^{(n)} U_2 = \frac{f}{R_0} \frac{dU^{(n)}}{dx} \Big|_{x=L} \quad (5b)$$

egyenletekből  $U_1$  és  $U_2$  együtthatóinak egyenlőségét kifejezve határozhatók meg.

A (4) sor együtthatóinak meghatározásakor el kívánjuk kerülni a (2) differenciálegyenlet — zárt alakban legtöbbször elő sem állítható — megoldásának meghatározását. E célból a (4) sort behelyettesítjük a (2) egyenletbe, és a kifejezést rendezzük  $s$  hatványai szerint. Ezek után megköveteljük, hogy az egyenlőség  $s$  különböző hatványainak együtthatóira külön-külön is teljesüljön. (Az eljárás tulajdonképpen perturbációs módszer az  $s$  perturbációs paraméterrel.)

Eredményül az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{d}{dx} \left( f \frac{dU^{(0)}}{dx} \right) = 0; \quad U^{(0)}(0) = U_1, \quad U^{(0)}(L) = U_2; \quad (6a)$$

$$\frac{d}{dx} \left( f \frac{dU^{(n)}}{dx} \right) = R_0 C_0 f U^{(n-1)}; \quad U^{(n)}(0) = U^{(n)}(L) = 0. \quad (6b)$$

A (6/a) homogén egyenlet  $\kappa_1(0) = \kappa_2(L) = 1$ ;  $\kappa_1(L) = \kappa_2(0) = 0$  peremfeltételeknek eleget tevő alapmegoldás-rendszere:

$$\kappa_1(x) = \int_x^L \frac{dx}{f} \Big/ \int_0^L \frac{dx}{f}; \quad \kappa_2(x) = \int_0^x \frac{dx}{f} \Big/ \int_0^L \frac{dx}{f} \quad (7)$$

és az egyenletnek a peremfeltételeket kielégítő megoldása

$$U^{(0)}(x) = U_1 \kappa_1 + U_2 \kappa_2 \quad (8)$$

(5)-ből az admittancia-karakterisztika nulladrendű tagjai

$$y_{11}^{(0)} = y_{22}^{(0)} = -y_{12}^{(0)} - y_{21}^{(0)} = 1/R_0 \int_0^L \frac{dx}{f}. \quad (9)$$

Az RC vonal nulladrendű approximációja egyetlen soros ellenállás.

A (6/b) inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet egybeesik (6/a)-val, így megoldását a (7) alrendszer felhasználva az állandók variálásának módszerével határozhatjuk meg:

$$U^{(n)}(x) = -R_0 C_0 \int_0^L \frac{dx}{f} \left[ \kappa_2 \int_x^L f \kappa_1 U^{(n-1)} dx + \kappa_1 \int_0^x f \kappa_2 U^{(n-1)} dx \right] \quad (10)$$

ahol felhasználtuk, hogy a (7) függvények Wronskideterminánsa  $W = \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_1' \kappa_2 = 1/f \int_0^L \frac{dx}{f}$ , és érvényesítettük a peremfeltételeket.

A (3) sor együtthatóit (10)-ből (5) felhasználásával kapjuk. Bizonyítható, hogy az n-edrendű együtthatók abszolút értékben kisebbek, mint  $R_0^{n-1} C_0^n M^{2n+1} N^{2n} L^{2n-1} 2^{2n} B_n / (2n)!$ , ahol  $f(x) \leq M$  és  $1/f(N) \leq x$ .  $B_n$ -ek a Bernoulli számok. Látható, hogy elegendően nagy n esetén a nevező sokkal gyorsabban nő, mint a számláló. A sorok együtthatói elegendően gyorsan csökkennek, hogy minden véges s-re az egyenletes konvergencia biztosított legyen.

Az elsőrendű közelítés realizálható admittancia-paraméterekre vezet [2], [3]. Ezek az ún. négyelemű approximáló hálózatok azonban konzekvensen nem fejleszthetők tovább, mivel az admittancia-paraméterek magasabb rendű közelítő polinomjai koncentrált paraméterű passzív elemekből álló hálózattal nem realizálhatók. Más úton kell tehát olyan hálózati struktúrát keresnünk, amely magasabb rendű közelítésekhez következetesen kiterjeszhető. E célból megvizsgáljuk az elosztott RC vonalak megszámlálhatóan végtelen koncentrált paraméterű elemet tartalmazó ekvivalens hálózatának struktúráját.

2. Az ekvivalens hálózat struktúrája

Realizálható hálózatra az admittancia-paraméterek parciális törtekre bontásával [4] juthatunk. Hosszadalmas számítás után kapjuk

$$y_{11} = \frac{1}{L} + \frac{1}{R_0^2 C_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{(-s_k)(s-s_k)} \left[ f \frac{d\varphi_k}{dx} \Big|_{x=0} \right]^2 \quad (11a)$$

$$-y_{12} = -y_{21} = \frac{1}{L} + R_0 \int_0^L \frac{dx}{f}$$

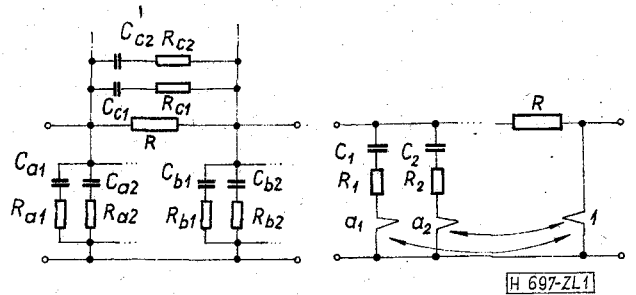
$$+ \frac{1}{R_0^2 C_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{(-s_k)(s-s_k)} \left[ f \frac{d\varphi_k}{dx} \Big|_{x=0} \right] \left[ f \frac{d\varphi_k}{dx} \Big|_{x=L} \right] \quad (11b)$$

$$y_{22} = \frac{1}{L} + \frac{1}{R_0^2 C_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{(-s_k)(s-s_k)} \left[ f \frac{d\varphi_k}{dx} \Big|_{x=L} \right]^2 \quad (11b)$$

Az összefüggésekben  $\varphi_k(x)$  a (2) egyenlet  $\varphi_k(0) = \varphi_k(L) = 0$  peremfeltételeket kielégítő sajátfüggvénye, amelyet

$$\int_0^L f(x) \varphi_k^2(x) dx = 1 \quad (12)$$

alakban normáltunk.  $s_k$  és  $\varphi_k$  sajátfüggvényhez tartozó sajátérték, amely az egyenlet tulajdonságaiból következően mindig negatív. Ugyancsak az egyenlet tulajdonságaiból következik, hogy a (11/b)-ben szereplő szumma tagjai váltakozó előjelűek. A végtelen sorok minden véges s értékre egyenletesen konvergensek.



1. ábra. Elosztott paraméterű RC vonal ekvivalens hálózatai a) π-tag; b) Cauer-ekvivalens

A (11) admittancia-paramétereknek megfelelő két ekvivalens kapcsolás az 1. ábrán látható. Az a. jelű a hálózat π ekvivalense, a b. jelű pedig Cauer-szintézissel [5] állítható elő. Mindkét hálózat elemei (11)-ből egyértelműen meghatározhatók. (11/b) említett viselkedése következtében a π ekvivalens negatív értékű elemeket is tartalmaz, míg a Cauer ekvivalens transzformátoráttelei váltakozó előjelűek. Megemlítendő még, hogy

$$R_{ak} C_{ak} = R_{bk} C_{bk} = R_{ek} C_{ek} = -1/s_k; R_k C_k = -1/s_k. \quad (13)$$

A végtelen sok elemű hálózatokhoz hasonló struktúrájú, de csupán véges elemet tartalmazó hálózattal fogjuk a (3) sorok n-edrendű approximációját elvégezni. Magasabb rendű közelítéshez így mindig azonos csomópontok közé kell azonos struktúrájú új ágakat helyezni.

3. A közelítő helyettesítő kép paramétereinek meghatározása

Maximális lapos közelítésnél két lehetőség között választhatunk:

a) Az admittancia-paraméterek első néhány pólusát pontosan reprezentáljuk a (13)-nak elegendő hálózati elemekkel, és további elemeket használunk az együttható-illesztés céljaira. Ez az eljárás általában nagyobb sávszélességet eredményez azonos ren-

dű közelítés esetén, de természetesen nagyobb számú elemmel, továbbá a sajátértékek és sajátfüggvények meghatározását követeli (pl. variációs módszerrel).

b) Valamennyi elemet maximális lapos illesztésre használjuk, és nem követeljük meg (13) teljesülését. Így általában szűkebb frekvenciasávban érvényes, de ott pontosabb approximációt kapunk [6].

A továbbiakban az utóbbi eljárást vázoljuk, de a mondottak értelemszerűen kiterjeszthetők az előbbi eljárásra is.

3.1. A  $\pi$  tag paramétereinek meghatározása

A  $\pi$  tag egy elemében  $k$  darab soros RC tagot kapcsolva párhuzamosan az eredő admittancia:

$$Y = \sum_{v=1}^k \frac{1}{R_v} \frac{s}{s + 1/R_v C_v} \quad (14)$$

Az admittancia  $s$  szerinti sorában az  $i$ -edrendű tag együtthatója:

$$\frac{1}{i!} \frac{d^i Y}{ds^i} \Big|_{s=0} = (-1)^{i-1} \sum_{v=1}^k (C_v R_v)^{i-1} C_v; \quad i=1, 2, \dots \quad (15)$$

A nulladrendű tagokra összesen egy feltételünk van (9) értelmében.

(15)-öt a (3) sor megfelelő együtthatóival összevetve, némi rendezés után a paraméterek meghatározására az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$y_{11}^{(i)} + y_{12}^{(i)} = (-1)^{i-1} \sum_{v=1}^{k_a} (C_{av} R_{av})^{i-1} C_{av}, \quad (i6a)$$

$$y_{22}^{(i)} + y_{12}^{(i)} = (-1)^{i-1} \sum_{v=1}^{k_b} (C_{bv} R_{bv})^{i-1} C_{bv}, \quad i=1, 2, \dots \quad (i6b)$$

$$-y_{12}^{(i)} = (-1)^{i-1} \sum_{v=1}^{k_c} (C_{cv} R_{cv})^{i-1} C_{cv}, \quad (16c)$$

ahol  $k_a, k_b, k_c$  az egyes admittanciák párhuzamosan kapcsolt soros RC tagjainak a számát jelöli.

Látható, hogy a (16) egyenletrendszerben az  $a, b$ , ill.  $c$  indexű elemek teljesen szétválnak. Mivel minden egyenletrendszerben páros az ismeretlen száma, ezért az egyes admittancia-paraméterek csak páros rendben approximálhatók. Ha megköveteljük továbbá, hogy valamennyi paramétert azonos rendben approximáljuk, akkor  $k_a = k_b = k_c = k$  kell legyen. Így az összes paraméterek száma  $1 + 6k$ . Mivel az összes admittancia-paraméterek  $n$ -edrendű illesztéséhez  $1 + 3n$  hálózati paraméter szükséges,  $k = n/2$ .

A (16) egyenletrendszer analitikusan is megoldható [7].

3.2. A Cauer-típusú hálózat paramétereinek meghatározása

Mivel valamennyi keresztág 3 szabad hálózati paramétert enged meg, valamennyi admittancia-paraméter  $n$ -edrendű közelítéséhez éppen  $n$  keresztágot kell felvennünk.

Az  $n$  keresztágot tartalmazó hálózat admittancia-paramétereit sorbafejtve és a sor együtthatóit a (3) sor együtthatóival összevetve az alábbi egyenletrendszert kapjuk a paraméterek meghatározására:

$$y_{11}^{(i)} = (-1)^{i-1} \sum_{v=1}^n (C_v R_v)^{i-1} C_v, \quad (i7a)$$

$$-y_{12}^{(i)} = (-1)^{i-1} \sum_{v=1}^n (C_v R_v)^{i-1} C_v a_v, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (i7b)$$

$$y_{22}^{(i)} = (-1)^{i-1} \sum_{v=1}^n (C_v R_v)^{i-1} C_v a_v^2. \quad (i7c)$$

Az egyenletrendszer megoldásánál szerzett tapasztalatok azt mutatják, hogy a megoldás csak páros  $n$  esetén biztosított. A transzformátor áttételek változó előjelűek, és azonos számú pozitív, ill. negatív áttételű transzformátor van a hálózatban. Bár az állítást általánosságban bizonyítani nem sikerült,  $n=1$  esetén (17) megoldhatatlansága nyilvánvaló,  $n=2$  és  $n=4$  esetén sikerült az egyenletek transzformációjával analitikusan is könnyen megoldható egyenletrendszert kapnunk,  $n=3$  esetén pedig a megoldhatatlanságot bizonyítanunk.

4. A hálózati modellek összehasonlítása

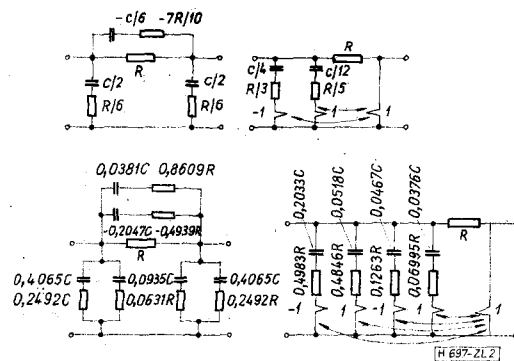
Az alábbiakban táblázatosan megadjuk a fent vizsgált hálózatok, valamint azonos (páros) rendben approximáló RC létrahálózatok néhány jellemzőjét.

	Új csomóponti egyenletek	Állapotváltozók	Ágak
Cauer hálózat	$n(3n)$	$n$	$1 + 3n(1 + 4n)$
$\pi$ -tag	$3n/2$	$3n/2$	$1 + 3n$
RC létra (asszím)	$3n/2_{+0}$	$3n/2_{+0}$	$1 + 3n$
RC létra (szim)	$2n_{+0}$	$2n_{+0}$	$1 + 4n$

A Cauer típusú hálózatnál az első adat feltételezi, hogy a transzformátort és ellenállást minden keresztágban egy kétkapuként kezeljük. Nyilvánvaló, hogy csomóponti analízisre ilyen esetben a Cauer-hálózat a legjobb.

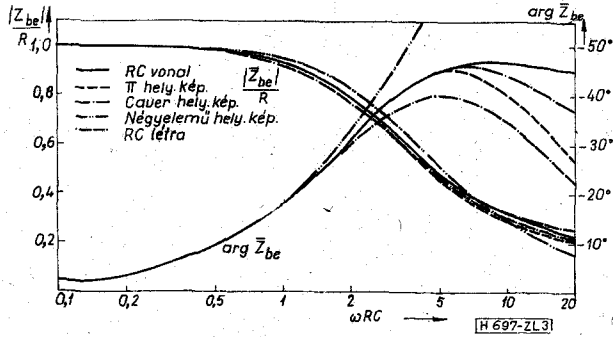
Ugyanakkor figyelmet érdemel, hogy azonos rendű approximáció esetén a  $\pi$  tag nagyobb rendszámú hálózat, ezért időtartománybeli viselkedése feltehetőleg jobb. A két hálózat (jóllehet azonos rendű approximációt valósít meg) nem ekvivalens.

5. Mintapéldák

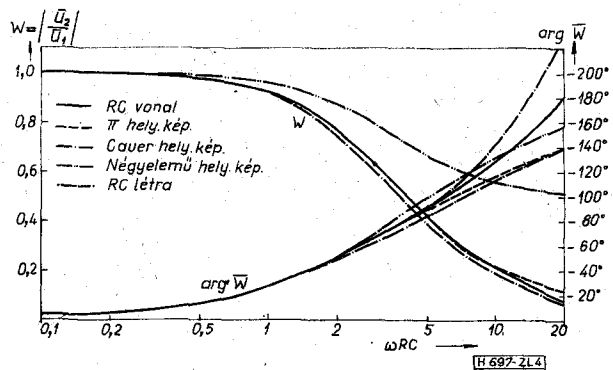


2. ábra. Homogén RC vonal másod- és negyedrendű helyettesítő képe

**SZEMLE**



3. ábra. Rövidzárási bemeneti impedancia



4. ábra. Üresjárási feszültségátviteli függvény

Az ismertett eljárással meghatároztuk a homógen RC vonal másodrendű és negyedrendű  $\pi$ , illetve Cauer-típusú helyettesítő képét (2. ábra). Látható, hogy a negyedrendű approximáció a vezető pólusokat reprezentáló elemeket már gyakorlatilag pontosan adja meg.

A 3. ábrán bemutatjuk az elsőrendű és másodrendű approximáló hálózatok rövidzárási bemeneti impedanciájának, a 4. ábrán pedig az üresjárási feszültségátviteli függvényének frekvenciafüggését, összehasonlítva az RC vonalával és az 5 elemű elsőrendben approximáló RC létrahálózatával.

**Köszönetnyilvánítás**

A szerző e helyen is szeretné kifejezni köszönetét dr. Fodor György professzornak és dr. Magos András adjunktusnak értékes tanácsaikért.

**IRODALOM**

- [1] Rajput, Y. V.: Modelling distributed RC lines for the transient analysis of complex networks. Int. J. Electron. 36, 709 (1974)
- [2] Гурарай, М. М.: Об одном методе построения динамических моделей компонент интегральных схем. Микроэлектроника, вып. 4. Москва, „Сов. радио“. 1971.
- [3] Bhattacharyya, A. B.—M. L. Gupta: Single-section lumped models for integrated circuit resistors. Solid St. Electron. 16, 1506 (1973)
- [4] Korn, G. A.—Korn, T. M.: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Bp. Műszaki K. 1975. 15. 3. 8. szakasz.
- [5] Géher K.: Lineáris hálózatok. Bp. Műszaki K. 1972. 5. 4., 1. szakasz.
- [6] Magos A.: Lumped equivalent networks of transmission lines. Per. Pol. El. Eng. 16, 235 (1972)
- [7] Magos A.: Személyes közlés.

(Folytatás a 355. oldalról)

Helyi távbeszélő-hálózatokban, ahol sok az egyedi kábelér, az üvegszálkábel gazdaságossági szempontok miatt belátható időn belül nem tud konkurrálni a rézkábelrel. A helyközi összeköttetéseknel azonban az üvegszálkákélek kedvező tulajdonságaik — főleg nagy átviteli kapacitásuk miatt — hamarosan kiszorítják a hagyományos rézkábeleket. (VDI Nachrichten, 1979. febr. 23. [633]).

\*

Híradástechnikai berendezésekben már alkalmaznak mikroprocesszorokat és integrált áramköröket. További fejlődést a CMOS jelent csekély teljesítményfelhasználása és egyszerű alkalmazása miatt. CMOS segítségével nemcsak analóg és digitális műveleteket lehet egy digitális kapcsoláson belül megvalósítani, hanem előnyösen lehet a lényegesen szélesebb üzemi feszültségtartományt (1,5-től 18 V-ig) kihasználni. Az áramfelvétel alacsony frekvenciánál elenyészően kicsi. CMOS gyártásával a National Semiconductor foglalkozik. Nemrég létesített egy CMOS-termékágazatot Skóciában a nagy „4-Zoll-Wafer” (szelet) gyártására. A CMOS alkalmazási területe igen széles körű, így pl. telefonoknál, televíziókészülékek-nél, távvezérlő-kapcsolásoknál. (Nachrichten Elektronik, 1979. jan. [634])

\*

Az US Navy 1979-ben navigációs műholdak felbocsátását tervezi, amelyek segítik a tengerészeket a navigáció ellátásában. A jelenlegi szatellitok információit minden 16 órában felül kell vizsgálni. Az új Nova szatellit esetén a navigációs mérést hét napig lehet tárolni.

A készülékek számítógépe a földről programozható, méréseket fognak tárolni a katonai és kereskedelmi hajók számára. A készülék 600 tengeri mérföld távolságba fog a Föld körül keringeni. (Design News, 1978. okt. [635])

\*

A Szovjetunió 50 millió font sterling értékben korszerű telefonközponti berendezéseket rendelt a francia Thomson—CSF cégtől. A megállapodás évi 1 millió telefonvonal-kapacitá-sú gyár szállítására és a technológia megvásárlására terjed ki. A szovjet rendelés tárgya az eredetileg az ITT által kifejlesztett, tökéletesített változatú korszerű MT—20 számítógépes telefonközpont. A Thomson—CSF csak mintegy 3 éve foglalkozik digitális kapcsolóberendezésekkel, miután maga-ba olvasztotta az ITT francia leányvállalatát, a Le Matériei Téléphonique-t. A Thomson—CSF sikerét a francia kormány támogatásának is köszönheti. Egyébként a kormány a Thomson—CSF versenytársát, a CIT Alcatelt is segíti külföldi piacok keresésében: az E 10 elektronikus központot már 14 országba sikerült eladni.

Az E 10 és MT—20 versenytársaként ez év szeptemberében jelenik meg a picon az angol gyártmányú „System X”. (The Engineer, 1979. márc. [636])

\*

A Philips Data Systems nemrég mutatta be az első optikai adattárolót, amely a jelenleg használt mágneslemez-tárolókkal egyenértékű a tárkapacitás, valamint a hozzáférési idő és a hosszú idejű tárolóképeség szempontjából.

Ez az első adattároló a világon, amely dióda-lézerrel működik. A mindkét oldalán használható forgó műanyag lemeze előzőleg vágott barázdákon fél millió géppel írott szöveggel tárolható. A kis dióda-lézer egy 0,1 mm élhosszúságú chipen levő alumínium-gallium-arszénidből áll. Mindegyik lemezoldalon 45000 spirálsáv található és 128 szektor egymás mellett. Optikai tárolórétegeként tellúrtartalmú anyagot gözölgtetnek fel: Az adatok olvasása, ill. beírása lézersugárral történik. Az optikai író-olvasó fej pozicionálása lineármotor segítségével történik. A legkülső sávtól a legbelső sávig történő elmozduláshoz max. 0,1 másodperc szükséges. Az optikai adattárolóknak két alkalmazási területe lehetséges; egyrészt alfanumerikus adatok, másrészt képek tárolása. (Funkschau, 1979. feb. [637])