DR. MAGOS ANDRÁS
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

Inhomogén szigetelésű hullámvezetők diszperziós függvényének számítása sorbafejtéssel

ETO 621.372.85.001.24

Olyan veszteségmentes, inhomogén szigetelésű csőtápvonalakkal foglalkozunk, amelyeknél a szigetelőanyag permittivitása és permeabilitása a keresztmetszet egyes tartományaiban állandó. Módszert mutatunk be, amellyel a terjedési együttható frekvenciafüggését hatványsor alakjában lehet meghatározni. Stevenson [1], [2] szórási problémák elektromágneses terét számította frekvencia szerinti hatványsor segítségével, a nulla frekvenciát választva a sorfejtés középpontjául. A most vizsgált probléma bonyolultabb, mert nemcsak a tér, hanem a terjedési együttható sorát is meg kell határozni, és esetünkben a sorfejtés középpontja tetszőleges frekvencia lehet.

A sajátérték-feladat differenciálegyenlete és határfeltételei

A koordinátarendszer z-tengelye legyen párhuzamos a hullám terjedési irányával, és az ebbe az irányba mutató egységvektort jelölje k. A keresztmetszet A_m-mel jelölt m-edik tartományában, ahol a permittivitás és a permeabilitás az ε_m, ill. μ_m érték, az elektromos és a mágneses térerősség komplex kifejezését az alábbi alakban írjuk fel:

$$\mathbf{E}_m=(\mathrm{e}_{Tm}+\mathrm{e}_{zm})\exp(-pz), \tag{1}$$

$$\mathbf{H}_m=(\mathrm{h}_{Tm}+\mathrm{h}_{zm})\exp(-pz). \tag{2}$$

Itt p a terjedési együtthatót jelöli, az e_{Tm} és h_{Tm} vektor merőleges a z-tengelyre, az e_{zm} és h_{zm} vektor párhuzamos azzal, és mind a négy csak a keresztmetszetbe eső két koordinátától függ. A továbbiakban, ha ez nem okoz félreértést, az A_m tartományra utaló m indexet elhagyjuk.

Az e_T vektorral a másik három vektort a következőképp lehet kifejezni:

$$\mathrm{e}_z=\frac{\mathrm{k}}{p}\,\mathrm{div}\,\mathrm{e}_T, \tag{3}$$

$$\mathrm{h}_z=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{e}_T, \tag{4}$$

$$\mathrm{h}_T=\frac{\mathrm{k}}{p}\times\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\mathrm{e}_T+\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{e}_T\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{j}\omega\mu}\times\left(p\mathrm{e}_T+\frac{1}{p}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{e}_T\right). \tag{5}$$

Minden tartomány belsejében e_T kielégíti a

$$\Delta\mathrm{e}_T+(p^2+\varepsilon\mu\omega^2)\mathrm{e}_T=0 \tag{6}$$

egyenletet, a tartományok határán pedig az alábbi határfeltételeket. Az ideális vezetők kontúrja mentén

$$\mathrm{n}\times\mathrm{e}_T=0, \tag{7}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{e}_T=0, \tag{8}$$

és a szigetelőanyag A_m és A_k tartományát elválasztó kontúr mentén

$$\mathrm{n}\times\mathrm{e}_{Tm}=\mathrm{n}\times\mathrm{e}_{Tk}, \tag{9}$$

$$\varepsilon_m\mathrm{n}\mathrm{e}_{Tm}=\varepsilon_k\mathrm{n}\mathrm{e}_{Tk}, \tag{10}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{e}_{Tm}=\mathrm{div}\,\mathrm{e}_{Tk}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\mu_m}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{e}_{Tm}=\frac{1}{\mu_k}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{e}_{Tk}, \tag{12}$$

ahol n a kontúrra merőleges egységvektort jelöl [3].

A (6) egyenlet és a (7)–(12) határfeltételek egy az e_T vektoriális függvényre vonatkozó peremértékfeladatot jelölnek ki, amelyben ω^2 egy paraméter szerepét játssza. Minden ω^2 érték mellett ezen peremértékfeladat megoldásaként végtelen sok p^2 sajátérték adódik. Így a $p^2(\omega^2)$ függvénynek végtelen sok ága van, amelyek megfelelnek a különböző módusoknak. A $p^2(\omega^2)$ függvény egyes ágaihoz, vagyis az egyes módusokhoz tartozik egy $\mathrm{e}_T(\mathrm{r},\omega^2)$ függvény, amely a módus tranzverzális elektromos terét adja meg a frekvencia függvényében.

A sajátérték-feladat megoldása frekvencia szerinti hatványsor alakjában

Az $\mathrm{e}_T(\mathrm{r},\omega^2)$ és $p^2(\omega^2)$ függvény vizsgált ágát egy ω_0^2 pont környezetében ω^2 szerinti hatványsor alakjában határozzuk meg. ω_0^2 tetszőleges pozitív érték lehet. A sorfejtéshez célszerű bevezetni a

$$w=\frac{\omega L}{c} \quad \text{és} \quad w_0=\frac{\omega_0 L}{c} \tag{13}$$

dimenziótlan mennyiségeket, ahol c a fénysebesség vákuumban és L egy tetszőleges, hosszúság dimenziójú állandó. A hatványsorokat a

$$p^2=L^{-2}\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{a}_i(w^2-w_0^2)^i, \tag{14}$$

$$\mathrm{e}_T=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{e}_i(w^2-w_0^2)^i \tag{15}$$

Beérkezett: 1979. X. 12.

alakban írjuk fel. Itt az a_i együtthatók dimenziótlanok.

A (13)–(15) összefüggéseket a (6) egyenletbe helyettesítve, $(w^2-w_0^2)$ hatványainak együtthatóiból az e_i vektorokra a tartományok belsejében az alábbi egyenletek adódnak:

$$L^2 \Delta e_0 + (w_0^2 \varepsilon_r \mu_r + a_0) e_0 = 0, \qquad (16)$$

$$L^2 \Delta e_i + (w_0^2 \varepsilon_r \mu_r + a_0) e_i = = -\varepsilon_r \mu_r e_{i-1} - \sum_{j=1}^{i} a_j e_{i-j} \qquad i=1, 2\ldots \qquad (17)$$

ahol ε_r és μ_r a tartományban érvényes relatív permittivitást, ill. permeabilitást jelöli. Mivel az e_T vektor minden frekvencián teljesíti a határfeltételeket, az e_i vektoroknak is minden i értékre különkülön teljesíteniük kell azokat.

A (16) egyenlet és a határfeltételek egy peremértékfeladatot jelölnek ki, amelyből a_0 mint sajátérték meghatározható. a_0-t meghatározni ugyanaz, mint a hullámvezetőre vonatkozó sajátértékfeladatot megoldani az ω_0 frekvencián. Ha a vizsgált módushoz tartozó sajátérték egyszeres, akkor a (15) alatti sor e_0 együtthatóját a peremértékfeladat egy konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározza. Ez a szorzó tetszőlegesen megválasztható. Először az ilyen egyszeres sajátértékek esetével foglalkozunk.

A hatványsorok együtthatóinak meghatározása egyszeres sajátérték esetén

Az a_0 és e_0 ismeretében az a_i és e_i együtthatókat egymás után egy rekurziós eljárással lehet számítani. Az e_i vektort a (17) egyenlet és a határfeltételek által kijelölt peremértékfeladatból kell meghatározni. Mivel ezen peremértékfeladat homogén megfelelőjének van nem triviális megoldása, az inhomogén feladatnak csak akkor van megoldása, ha a (17) egyenlet jobb oldala bizonyos feltételt kielégít [5]. Ebből a feltételből határozható meg az a_i együttható.

A feltételt egy olyan h vektor segítségével fogalmazzuk meg, amely megadja a (2)-ben szereplő h_T vektort az ω_0 frekvencián. A h vektor az

$$L^2 \Delta h + (w_0^2 \varepsilon_r \mu_r + a_0) h = 0 \qquad (18)$$

egyenletből határozható meg az alábbi határfeltételek figyelembevételével [3]. Az ideális vezető kontúrja mentén

$$nh = 0, \qquad (19)$$

$$\mathrm{rot}\ h = 0. \qquad (20)$$

Az A_m és A_k tartományt elválasztó kontúr mentén

$$n \times h_m = n \times h_k, \qquad (21)$$

$$\mu_m n h_m = \mu_k n h_k, \qquad (22)$$

$$\mathrm{div}\ h_m = \mathrm{div}\ h_k, \qquad (23)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_m} \mathrm{rot}\ h_m = \frac{1}{\varepsilon_k} \mathrm{rot}\ h_k. \qquad (24)$$

Mivel az a_0 sajátérték egyszeres, a fenti peremértékfeladatból h egy konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározható. Ha a vizsgált módus nem egy olyan kvázi-TE vagy kvázi-TEM módus, amelynek ω_0 épp határfrekvenciája, vagyis ha az a_0 és div e_0 mennyiségek közül legalább az egyik nem nulla, akkor egyszerűbb h-t az (5)-ből adódó

$$h = k \times \left(w_0^2 \varepsilon_r e_0 - \frac{L^2}{\mu_r} \mathrm{rot\ rot}\ e_0 \right) = = \frac{1}{\mu_r} (a_0 e_0 + L^2 \mathrm{grad\ div}\ e_0) \times k \qquad (25)$$

összefüggésből számolni.

Bebizonyítható, de itt a bizonyítástól eltekintünk, hogy csak akkor létezik a (17) egyenletet és a határfeltételeket kielégítő e_i függvény, ha teljesül a

$$\int_A \left[\left(\varepsilon_r \mu_r e_{i-1} + \sum_{j=1}^{i} a_j e_{i-j} \right) \times h \right] d\mathbf{A} = 0 \qquad (26)$$

feltétel, ahol az A felület a szigetelőanyag keresztmetszetét jelöli. Az A felületre végzett integrálás természetesen azt jelenti, hogy az egyes A_m tartományokra kell integrálni, és ezeket az integrálokat összeadni. Vezessük be az

$$u_j = \int_A (e_j \times h)\, d\mathbf{A}, \qquad (27)$$

$$v_j = \int_A \varepsilon_r \mu_r (e_j \times h)\, d\mathbf{A} \qquad (28)$$

jelöléseket. Ha h számítható a (25) összefüggés alapján, akkor u_j és v_j az alábbi alakban is megadható:

$$u_j = \int_A \left(w_0^2 \varepsilon_r e_0 e_j - \frac{L^2}{\mu_r} \mathrm{rot}\ e_0\ \mathrm{rot}\ e_j \right) d\mathrm{A}, \qquad (29)$$

$$v_j = \int_A \varepsilon_r (L^2\ \mathrm{div}\ e_0\ \mathrm{div}\ e_j - a_0 e_0 e_j)\, d\mathbf{A}. \qquad (30)$$

Ezekkel a jelölésekkel a (26) feltételből az a_i együtthatóra az

$$a_i = -\left(v_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_j u_{i-j} \right) \Big/ u_0 \qquad (31)$$

érték adódik, feltéve, hogy u_0 nem nulla. Az $u_0 = 0$ eset arra utal, hogy a $p^2(\omega^2)$ függvény az ω_0^2 pont körül nem fejthető Taylor-sorba. Ez akkor fordul elő, ha ω_0^2 a $p^2(\omega^2)$ függvénynek elágazási pontja [3].

Az előzőek alapján felépíthető egy rekurziós eljárás. Az eljárás i-edik lépésének megkezdésekor ismert az $a_0 \cdots a_{i-1}$ és $e_0 \cdots e_{i-1}$ együttható. Ezekből (31) alapján számítható a_i, a (17) és a (7)–(12) összefüggések alapján pedig e_i. Itt jegyezzük meg, hogy ehhez hasonló eljárás építhető fel a mágneses térerősség tranzverzális komponense alapján. Ennek alkalmazása például akkor kényelmesebb, ha a vizsgált módus olyan kvázi-TE módus, amelynek ω_0 épp határfrekvenciája.

A hatványsorok együtthatóinak meghatározása többszörös sajátérték eseténn

Ha az a_0 sajátérték többszörös, vagyis az e_0 függvényre vonatkozó peremértékfeladatnak több egymástól lineárisan független megoldása létezik ugyanazon a_0 mellett, akkor több olyan módus van, amelynek a terjedési együtthatója az ω_0 frekvencián ugyanaz a $p=\sqrt{a_0}/L$ érték.

Legyen a_0 egy k-szoros sajátérték. Határozzuk meg valamilyen módon a (16) és a (7)—(12) összefüggések által kijelölt sajátértékfeladat k számú, egymástól lineárisan független e_{0l} megoldását, majd a (18)—(24) összefüggések által kijelölt peremértékfeladat k számú, egymástól lineárisan független h_l megoldását. A vizsgált módushoz tartozó e_0 együttható az e_{0l} függvények egy lineárkombinációjaként adható meg:

$$\mathbf{e}_0=\sum_{l=1}^{k} b_{0l}\mathbf{e}_{0l}. \tag{32}$$

Hasonlóképp, ha e_i^* a (17) egyenletet és a peremfeltételeket kielégítő partikuláris megoldás, akkor a keresett e_i együttható az alábbi alakban adható meg:

$$e_i=e_i^*+\sum_{l=1}^{k} b_{il}e_{0l}. \tag{33}$$

Most a (26) feltételnek mind a k számú $\mathbf{h}_l$ függvényre teljesülnie kell. Ezt a k számú feltételt egy mátrix-egyenletbe foglaljuk össze. Ehhez a (32) és (33) összefüggésben szereplő b_{jl} együtthatókat összefoglaljuk egy k elemű $\bar{b}_j$ vektorba. Értelmezzük az ugyancsak k elemű $\bar{u}_j=[u_{jl}]$, $\bar{u}_j^*=[u_{jl}^*]$ és $\bar{v}_j=[v_{jl}]$ vektorokat, továbbá a $k\times k$ elemű $\bar{\bar{s}}=[s_{lq}]$ és $\bar{\bar{t}}=[t_{lq}]$ mátrixokat, amelyek elemeit az

$$u_{jl}=\int_A (\mathbf{e}_j\times\mathbf{h}_l)\,d\mathbf{A}, \tag{34}$$

$$u_{jl}^*=\int_A (\mathbf{e}_j^*\times\mathbf{h}_l)\,d\mathbf{A}, \tag{35}$$

$$v_{jl}=\int_A \varepsilon_r\mu_r(e_j^*\times h_l)\,dA, \tag{36}$$

$$s_{lq}=\int_A (e_{0q}\times h_l)\,d\mathbf{A}, \tag{37}$$

$$t_{lq}=\int_A \varepsilon_r\mu_r(e_{0q}\times h_l)\,d\mathbf{A}, \tag{38}$$

összefüggések adják meg. Ezekkel a jelölésekkel a (26) feltételek a

$$(\bar{\bar{t}}+a_1\bar{\bar{s}})\bar{b}_0=\bar{0}, \tag{39}$$

$$(\bar{\bar{t}}+a_1\bar{\bar{s}})\bar{b}_i=-\bar{v}_i-a_1\bar{u}_i^*-\sum_{j=2}^{i+1} a_j\bar{u}_{i-j+1} \quad i=1,2\ldots \tag{40}$$

alakba írhatók át.

A (39) egyenletnek csak akkor van nem triviális megoldása, ha a $\bar{\bar{t}}+a_1\bar{\bar{s}}$ mátrix szinguláris. Az innen adódó algebrai egyenletből a_1 meghatározható. Itt csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a_1 a reá vonatkozó algebrai egyenletnek egyszeres gyöke. Ilyenkor a (39) egyenletből a megfelelő $\bar{b}_0$ vektor és ezzel együtt az e_0 együttható egy konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározható. A

$$\bar{c}^T(\bar{\bar{t}}+a_1\bar{\bar{s}})=\bar{0} \tag{41}$$

egyenletből ugyancsak egy konstans szorzó erejéig meghatározható a $\bar{c}$ vektor. A (40) egyenletnek csak akkor van megoldása, ha jobb oldala ortogonális a $\bar{c}$ vektorra. Innen az a_{i+1} együtthatóra az

$$a_{i+1}=-\bar{c}^T\left(\bar{v}_i+a_1\bar{u}_i^*+\sum_{j=2}^{i} a_j\bar{u}_{i-j+1}\right)\Big/\bar{c}^T\bar{u}_0 \quad i=1,2\ldots \tag{42}$$

összefüggés adódik.

Az előzőek alapján felépíthető a rekurziós eljárás. Az eljárás i-edik lépésének megkezdésekor ismert az $a_0\cdots a_i$ és az $e_0\cdots e_{i-1}$ együttható. Ezek ismeretében meghatározható a (17) egyenlet egy e_i^* partikuláris megoldása, majd (42)-ből az a_{i+1} együttható, (40)-ből a $\bar{b}_i$ vektor és ezzel együtt az e_i együttható.

Ha a_1 a reá vonatkozó egyenletnek többszörös gyöke, akkor általában két vagy több olyan egymástól lineárisan független $\bar{b}_0$ vektor található, amely kielégíti a (39) egyenletet. Ez arra utal, hogy létezik két vagy több olyan módus, amelyeknél mind az a_0, mind az a_1 együttható megegyezik, vagyis, amelyek diszperziós görbéje nemcsak metszi, hanem érinti is egymást az ω_0 frekvencián. Ezek a módusok csak az a_2 együttható alapján különböztethetők meg egymástól. Így a $\bar{b}_0$ vektor meghatározásához ismerni kell az a_0, a_1 mellett még az a_2 együtthatót is, hasonlóképp $\bar{b}_i$ meghatározásához az a_{i+2} együtthatót is. Mivel ez az eset csak igen speciális paraméterkombinációk mellett fordulhat elő, az ilyenkor követhető számítási eljárás ismertetésétől itt eltekintünk. Bizonyos szimmetrikus elrendezéseknél előfordulhat, hogy két vagy több módus teljes diszperziós görbéje, vagyis az összes a_i együtthatója megegyezik. Ezek a módusok csak további szempontok alapján különíthetők el egymástól. Ezen szempontok érvényesítésével általában a számítás elvégezhető úgy, mint egyszeres sajátértéknél.

Befejezésül megjegyezzük, hogy ha ω_0 a vizsgált módus határfrekvenciája, akkor megadható egy olyan eljárás a hatványsorok meghatározására, amely az itt leírtnál számítástechnikailag előnyösebb. Ezzel foglalkozik két korábbi dolgozatunk [3], [4], amelyekben numerikus példák is szerepelnek.

IRODALOM

[1] *Stevenson, A. R.:* Solution of Electromagnetic Scattering Problems as Power Series in the Ratio Dimension of Scatterer/Wavelength, J. Appl. Phys. 24, 1134—1142. (1953)

[2] *Stevenson, A. R.:* Electromagnetic Scattering by an Ellipsoid in the Third Approximation, J. Appl. Phys. 24, 1143—1151. (1953)

[3] *Magos A :* Calculation of Guided Wawes by Expansion in Powers of the Frequency, Per. Pol. El. Eng. 22, 229—249. (1978)

[4] *Magos A.:* Calculation of Quasi-TEM Waves by Series Expansion in Powers of Frequency, Per. Pol. El. Eng. 23. (1979)

[5] Ладыженская, О. А.: Краевые задачи математической физики, Наука, Москва (1973)